శ్రీరస్తు—శ్రీరామచంద్రాయనమః

శ్రీ భాస్కరాచార్య విరచిత మగు

వాసనాభాష్య సహిత

లీలావతీ గణితము

నకు

పిడపర్తి కృష్ణమూర్తి శాస్త్రి

ప్రణీత మగు

ఆంధ్ర వ్యాఖ్యానము.

ప్రతిపద టీకా, తాత్పర్య, ఉదాహరణ, ఉపపత్తి,
ప్రశ్న, విశేషాది బహువిషయములతో గూడియున్నది.

మొదటికూర్పు 1200

శ్రీ విద్యాముద్రాక్షరశాలయందు ముద్రితము

విజయనగరం సిటీ.

1936

సర్వస్వామ్య సంకలితము]

[దీని వెల 4-0-0

ఈ గ్రంథము గోదావరీమండలమునందు వాసిష్ఠాగౌతమీ మధ్యభాగమున గోపాలపుర సంస్థానములోచేరిన, పొడగట్లపల్లి జానకీపురాగ్రహారము నివాసముగాగల, పిడపర్తి చినపూర్ణయ్య సిద్ధాంతి గారి, తృతీయపుత్రుడు కృష్ణమూర్తిశాస్త్రిచే రచించి ప్రకటింపబడినది. మఱియు జ్యోతిశ్శాస్త్రమునకు సంబంధించిన గణిత, సిద్ధాంత, జాతక, ముహూర్త, వాస్తు సంహితాది భాగములందును ఉద్గ్రంథములు గ్రంథమాలగా ప్రకటింపబడగలవు.

వెలయువారు :—

దైవజ్ఞభూషణ పిడపర్తి కృష్ణమూర్తిశాస్త్రి,
పొడగట్లపల్లి,
గోపాలపురం సబ్ పోష్టు : తూర్పు గోదావరిజిల్లా.

OPINIONS.

Lilavati, an ancient mathematical treatise composed by Bhaskaracharya, is a work of undying interest and inspiration to all our present day Hindu mathematicians. The position which Bhaskara occupies in the galaxy of our ancient mathematicians and astronomers is unique.

A study of old Indian mathematical books is not merely of historical interest to us. Translation of these books into our mother tongue provides us with a very useful instrument in the vernacularisation of studies in our schools and colleges. The extent of mathematical knowledge which this book displays, covers S.S.L.C. and Intermediate syllabuses and a part of the B.A., syllabus.

Mr. Krishnamurty Sastri, besides possessing an extensive and deep knowledge of the ancient mathematical and astronomical treatises, reveals a firm grip on modern mathematical books. His clear exposition and explanations make the book easily intelligible to all.

I hope that teachers and students of mathematics in our Andhra Country will read this book with profit and encourage the author to make this the beginning of a series of such books.

Vizianagram,
D. 2—1—36

(Sd.) **SONTI PURUSHOTHAM,**
CHIEF LECTURER IN MATHEMATICS.
MAHARAJAH'S COLLEGE.

పి. ఎల్. నరసింహాము, బి.ఏ.,బి.ఎల్.
అడ్వకేటు.

శ్రీ

విశాఖపట్నం,
తే 28—డిశంబరు 1935.

మాతృభాషాభివృద్ధికి సాధనములుగ ప్రాచీన సంస్కృత గ్రంథములు, వివిధశాస్త్రములకు సంబంధించినవి, పరివర్తింపబడుట మిక్కిలి యవసరమని పలువిధముల చిరకాలమునుండి యుపన్యసించుచుంటిని. శాస్త్రీయ పారిభాషిక శబ్దనిఘంటువు లేమిని, కొలది పరివర్తన ప్రయత్నములును, పలు తెలుగుల బట్టి సుబోధములు కాక యున్నవి.

నామిత్రులు బ్ర॥ పిడపర్తి కృష్ణమూర్తిశాస్త్రిగారు గణితశాస్త్రమునం దిట్టి కొఱంతను బాపదలచి సుప్రసిద్ధ లీలావతీగణితము నాంధ్రీకరించియుండిరి. జ్యోతిశ్శాస్త్రమునందు వారిప్రజ్ఞ యాంధ్రలోకమునకే కాక యితరులకును దెలిసిన విషయమే. గణితశాస్త్రమునందు లేశమాత్రము ప్రవేశములేనివారికి గూడ నతిసులభముగ బోధపడునట్లు వారు రచించిన వ్యాఖ్య వర్ణనాతీతము. ఆంగ్లభాషాభ్యాసవశమున నాభాషాసాంప్రదాయముల ననుసరించిగాని యవగాహన చేసికొన జాలని యాధునికయువజనులకు గూడ నాశ్చర్యజనకమగు రీతిని క్లిష్టవిషయములను కరతలామలకముల గావించిరి.

దీనివలన ప్రాచీనవిద్యాగౌరవోన్నతులు గోచరింపక తప్పవు. గణితశాస్త్రమునందు ముఖ్యముగ బీజగణిత రేఖాగణితములందును ఖగోళశాస్త్రమునందును పూర్వులు సల్పిన కృషి యత్యద్భుతమై పాశ్చాత్యవిజ్ఞానమున కేమాత్రము దీసిపోవునది కాదని తెలిసికొన దగినట్లు బోధింపగల శ్రీ కృష్ణమూర్తిశాస్త్రిగారి బోధనశక్తియు నపారమే. ఇంకను జ్యోతిశ్శాస్త్రగ్రంథముల నాంధ్రమున పరివర్తనముచేసి దేశోపకారము కావించునటుల నాంధ్రులు వారికి తగు ప్రోత్సాహము కలిగింపవలసినవిధి యై యున్నది. ఇట్టి యుత్తమగ్రంథము లింకను వివిధశాస్త్రముల వెలువడినయెడల భాషాదారిద్ర్యము తొలగి మాతృభాషయందే యుత్తమవిద్య గఱపుటకు విశ్వవిద్యాలయములకు సాధ్యమగును. ఆ మూలమున దేశోన్నతియు, భాషాసేవయు, విద్యార్థిజనమునకు కేవల మనుకరణ పద్ధతులే కాక మౌలికపరిశోధనశక్తియు వికాసమును లభ్యములగును. భారతీయులకు స్వతంత్రవిజ్ఞానశక్తి కొలదిమాత్ర మను నపవాదయు నశించును. విజ్ఞానసంపద పెంపు వహించును. కళాశాలలయం దిట్టి యుత్తమగ్రంథములు పఠనీయములుగ చేయదగును.

(Sd.) ప్రభల లక్ష్మీనరసింహము,
అడ్వకేటు.

శ్రీః

ఈగ్రంథము

శ్రీమన్మహారాజ రాజశ్రీ శ్రీమద్రాజాధిరాజ
శ్రీమదుత్కళ రాష్ట్రాంతర్గత జయపుర మండలాధీశ్వరులును
సాహిత్య సమ్రాట్, డి. లిట్ ఇత్యాదిపద భూషితులును
సంస్కృతాంధ్రోత్కళాది భాషా కవిత్వధురంధరులును
జ్యౌతిషాలంకారాది బహుశాస్త్ర పారంగతులునగు
మహారాజా శ్రీ శ్రీ శ్రీ విక్రమదేవవర్మ ప్రభువర్యులకు
స మ ర్పిం ప బ డి న ది.

కృతిపతులు.

శ్రీ మన్మహారాజ రాజశ్రీ శ్రీమద్రాజాధిరాజ శ్రీమజ్జయపుర
సంస్థానాధీశ్వర సాహిత్య సమ్రాట్, డి. లిట్
శ్రీ శ్రీ శ్రీ శ్రీ శ్రీ విక్రమదేవ వర్మ మహారాజావారు.

శ్రీరస్తు

కృతిసమర్పణము.

1 శ్రీమాఞ్జయపురరాష్ట్రాధీశ శ్రీకృష్ణ చంద్ర దేవ విభోః।
పుత్ర శ్శ్రితజనకల్ప శ్శ్రీవిక్రమ దేవ నృపవరో జయతి॥

2 అనేక భాషా కవితా విశారద
స్సాహిత్య సమ్రాట్సుగుణాలవాలః।
సారస్వతజ్ఞ ప్రవరాగ్రగణ్య
శ్చకాస్త్యసౌ విక్రమ దేవ రాజః॥

3 ధర్మాత్మజో ధర్మవివేచనే, నయే
కవిః, కవిత్వే ఖలు కాళిదాసః।
రసజ్ఞతాయా మపి భోజరాజః,
కల్పద్రుమః ప్రాజ్ఞకదంబ తోషణే॥

4 ప్రభో రయుక్తం త్విదమేవ మన్యే
భాషారతో ఽపి శ్రుత శీల వృద్ధః।
తారుణ్యతో రాజ్య రమాం గృహీత్వా
శుద్ధాం దిగంతే విససర్జ కీర్తిం॥

5 సర్వాశా వల యావకాశ విమలోద్వేల్ల ద్యశో భాసుర
శ్రీగోవింద పదారవింద యుగళ ధ్యానానుష క్తాంతరః।
దుర్గక్ష్మాతల రాజరా డరికరిం దోస్తుంగ కంఠీరవో
దీనానాం పరిపోషకో విజయతే శ్రీ విక్రమక్ష్మాపతిః॥

6 నేతా కృతే ర్మే నృపపుంగ వోసా
వాచంద్రతారార్క కుటుంబవృద్ధ్యా।
చిరాయు రారోగ్య యశోవితానై
ర్జీయా త్సదా కృష్ణ కృపాతిరేకాత్॥

శ్రీ శ్రీ శ్రీ

విషయసూచిక.

విషయము	పుట
వివిధ మానములు	2
సంఖ్యానీకము-సంఖ్యోత్పత్తి	8
సంఖ్యాలేఖనము-సంఖ్యాపఠనము	10
సంకేతములు	13
2 అభిన్నపరికర్మాష్టకము	17
ప్రసిద్ధాధారములు	,,
సంకలనవ్యవకలనములు	18
గుణనము	27
భాగహారము	45
అపవర్తనోపాయములు	54
ఘాతమూలములు	62
వర్గపద్ధతి	66
వర్గమూలపద్ధతి	77
ఘనానయనము	89
ఘనమూలము	101
అభీష్టఘాతము	108
పూర్వానుబంధము	110
మహత్తమాపవర్తనము	113
లఘుతమాపవర్త్యము	120
3 భిన్నపరికర్మాష్టకము	125
భిన్నసంఖ్యావ్యుత్పాదనము	,,
భిన్నభాగజాతి	130
ప్రభాగజాతి	135
భాగానుబంధ భాగాపవాహములు	138
స్వాంశానుబంధ స్వాంశాపవాహములు	139
భిన్నసంకలన వ్యవకలనములు	145
భిన్నగుణనము	147
భిన్నభాగహారము	150
భిన్నఘాతమూలములు	152
ఆసన్నమూలము	154
ఆసన్నమానము, వితతభిన్నసంఖ్య	160
దశాంశగణితము	168
4 శూన్యపరికర్మాష్టకము	181
5 వ్యస్తవిధి	188
6 ఇష్టకర్మ	192
ద్వీష్టకర్మ	199
7 సంక్రమణము	203
8 వర్గకర్మ	210
9 గుణకర్మ	217
10 త్రైరాశికము	226
వ్యస్తత్రైరాశికము	233
11 పంచరాశికాదికము	240
12 భాండప్రతిభాండ వ్యవహారము	250
13 మిశ్రవ్యవహారము	257
వృద్ధిమూలమిశ్రము	,,
మూలధనమిశ్రము	261
ప్రక్షేపమిశ్రము	265
వాపీపూరణమిశ్రము	267
క్రయవిక్రయమిశ్రము	270
రత్నమిశ్రము	274
సువర్ణగణితము	277
వ్యక్తిభేదగణితము	287

విషయము.	పుట
14 శ్రేఢీవ్యవహారము	296
సంకలితాదిశ్రేఢి	299
వర్గాదిశ్రేఢి	304
చయవృద్ధిశ్రేఢి	310
గుణోత్తరశ్రేఢి	318
సమవిషమవృత్తగణితము	322
విశేషములు	326
15 క్షేత్రవ్యవహారము	331
జాత్యత్రిభుజములు	337
జాత్యసంబంధి పద్ధతులు	351
అక్షేత్రలక్షణము	366
త్రిభుజఫలాద్యానయనము	368
చతుర్భుజ ప్రకరణము	382
చతుర్భుజభేద ఫలము	384
చతుర్భుజ లంబానయనము	392
,, కర్ణానయనము	394
,, ద్వితీయ కర్ణానయనము	395
,, ఇష్టకర్ణ కల్పనము	398
సమలంబ చతుర్భుజము	401
బ్రహ్మగుప్త కర్ణానయనము	406
భాస్కర కర్ణానయనము	410
సూచీక్షేత్రము	417
వృత్త క్షేత్రము	426
విశేష సూత్రములు	448
16 ఖాత వ్యవహారము	451
సూచీస్పష్టఫలము	460
17 చితివ్యవహారము	461
18 క్రకచవ్యవహారము	464
19 రాశివ్యవహారము	468
20 ఛాయావ్యవహారము	472
21 కుట్టక వ్యవహారము	484
స్థిరకుట్టకము	507
గ్రహగణితోపయోగము	509
సంశ్లిష్ట కుట్టకము	367
22 అంకపాశ్యవ్యవహారము	520
భాస్కరనివాసము	513
ప్రశ్నోత్తరములు	515
తప్పొప్పులు	545

ప్రశంస.

పురాతన భారతీయవిజ్ఞానపటిమ ఇటీవలివరకు భారతీయులమయ్యు మనకు తెలియరాకుండుటకు కారణము లనేకములున్నవి. పాశ్చాత్యపరిశోధకులు బయలువెడలి యక్కడక్కడ శిథిలములై పడియున్న వ్రాతగ్రంథములను భూస్థాపితములగు శాసనములను వెలికితీసి విమర్శించి నంతటినుండియు, వారికి భారతీయులయెడ గౌరవాదరములు గలుగజొచ్చినవి. వారివిమర్శనములు ప్రకటింపబడినప్పటి నుండియే మనకు మనపూర్వుల సర్వతోముఖ పాండిత్యము దెలియుటకు వీలైనది. ప్రాచీనభారతీయులలో నఖండవిజ్ఞానసంపన్నులగు మహనీయు లనేకులున్నారు. అట్టివారలలో సిద్ధాంతశిరోమణికర్త యగు భాస్కరుడొకడు. అర్థశాస్త్రవిజ్ఞానమందు చాణక్యుడెట్టికీర్తి వహించి మించెనో గణిత గ్రహగణిత శాస్త్రవిచారమందు భాస్కరు డంతప్రతిభఁగాంచెను.

సిద్ధాంతశిరోమణి యొక యపూర్వగ్రంథము. ఇందు అంకగణిత బీజగణిత గ్రహగణిత విధానములు సులలితమగు సంస్కృతభాషలో శ్లోకరూపమున వర్ణింపబడియున్నవి. ఈగ్రంథమును విమర్శించిన పాశ్చాత్యపండితులు చలనకలన(Differential Calculus) గురుత్వాకర్ష (Law of Gravitation)ణాది నవీనసిద్ధాంతములకు బీజములీగ్రంథమునందుసూచితములై యున్నవనినిర్ధారించియున్నారు. సిద్ధాంతశిరోమణియందలి అంకగణితాధ్యాయమును గ్రంథకర్త లీలావతియని పేర్కొనెను. ఇందలిశైలి కడుసరళమై లాలిత్యముగ నుండుటచే నీనామము సార్థకమైనది. ఇందు అనేక గణితవిధానములు సంగ్రహముగ వర్ణింపబడియున్నవి. ఇందు అంకగణితమార్గములే కాక ఉచ్చబీజగణితమును సంబంధించిన శ్రేఢీ, కుట్టక, అంకపాశాదులును వర్ణితములై యున్నవి. మనపూర్వ గణిత శాస్త్రవేత్తలు గణితప్రశ్నకు దేనికైనను ఉత్తరమే ప్రధానముగనుకన్యాసబాహుళ్య

మనవసరమని భావించినట్లు తోచుచున్నది. ఉపపత్తియే ప్రధానాదర్శముగజూచు పాశ్చాత్యగణితాభ్యాసకులకు ఈ హైందవసంప్రదాయము కొంచెము వింతగదోచును.

ఈ 'లీలావతి'కి ఆంధ్రానువాదము లతిస్వల్పముగనున్నవి. అవియును పూర్వసంప్రదాయములనే యవలంబించి ఉపపత్తి వివరణములందు సంకుచితములై గ్రంథము సుగ్రాహ్యముజేయు తలంపుతో వ్రాయబడినట్లు గానరావు. ఇట్లుండ నామిత్రులు బ్ర॥ శ్రీ పిడపర్తి కృష్ణమూర్తిశాస్త్రిగారు లీలావతీవ్యాఖ్యకుగడంగి తామువ్రాసిన భాగమును నాకుజూపిరి. ఇందలి గణితప్రదర్శనము నూతనమార్గము ననుసరించియున్నది. ప్రతిపద్ధతికిని ఉపపత్తియో యుక్తియో వ్రాయబడినది. ఒక్కొక్కచో 2,3, ప్రకారములుగను ఉపపత్తులిందు గానబడుచున్నవి. ఈవ్యాఖ్య అక్షరాన్యులగు సామాన్యులకు గూడ స్వయముగ గణితము నభ్యసింప సాధనమైయున్నది. కావున దీనిని ప్రకటించుటకు ప్రోత్సాహము చేయబడినది.

ఇందు ప్రతి పరికర్మయందును అనేకనూతనాంశములు చేర్పబడినవి, ఆయావ్యవహారములందు నూతనవిశేషములు సోపపత్తికముగ నమర్పబడినవి.

శ్రీ శాస్త్రిగారు నాకు చిరపరిచితులు. వీరుఅనాదిగ స్కంధత్రయ జ్యోతిశ్శాస్త్ర సంపన్న మగు పిడపర్తివంశ సంభూతులు. వీరుబాల్యమునందే చక్కనిసాహిత్యమును గడించి స్వయముగ జ్యోతిషగ్రంథముల నవగతముచేసికొని గ్రహగణితాదులందు సోదరులకు సహాయపడజొచ్చిరి.

వీరు కులక్రమాగతశాస్త్రవిషయముల నభ్యసించుటయ కాక వారణాశియందు రాజకీయ కలాశాలయందు ప్రధానజ్యోతిశ్శాస్త్రాచార్యులగు మ.మ.పం. మురలీధర ఝూ వారివద్ద వీరి రెండవఅన్న గారగు బ్ర॥ శ్రీ॥ సుబ్రహ్మణ్యశాస్త్రిగారితో కలసి ఉద్గ్రంథముల జదివి జ్యోతిశ్శాస్త్రమున విశేషపరిశ్రమము సలిపియున్నారు. వీరికి

ఉభయభాషలందును సాహిత్యపరిశ్రమ మధికము. ఇతరశాస్త్రములందును పరిచయము గలదు. భారతదేశసుప్రసిద్ధులగు శ్రీశాస్త్రిగారినిగూర్చి విశేషముగ వ్రాయనక్కరలేదు. వీరికి ప్రాచీన నవీన గణితమార్గములు రెండును కరతలామలకములు. కావుననే వీరి ఈ వ్యాఖ్యానము సరళముగను సమగ్రముగను ఒప్పుచున్నది.

సంస్కృతభాషాపరిచయము లేనివారలకును వీరివ్యాఖ్యానము కేవలము స్వతంత్ర గణితగ్రంథముగ నుపయోగింపగలదు.

(1) సంఖ్యానీకము (2) ఘాతఘాతమూలములు (3)మహత్తమాపవర్తనము 4) లఘుతమాపవర్త్యము (5) ఆసన్నమూలము (6) ఆసన్నమానములు (7) దశాంశగణితము (8) నిష్పత్తివిచారము ఇదువిశేషముగ చేర్పబడినవి. ఇతరములు విస్తృతముగ వివరింపబడినవి. వలయుచోటులందు ఇతరప్రశ్నములునుగలవు. ఆయాఉపపత్తులు బీజగణితము, రేఖాగణితము, త్రికోణమితి, మొదలగు గణితవిశేషముల సంబంధించియున్నవి.

దీనిని పఠించుటచే అభ్యాసకులకు చక్కనిగణితపరిచయము మలవడును. గణితజ్ఞులకు నూతనాంశములు పరిచితములగును. ఈ గ్రంథము ప్రస్తుతపాఠశాలలందు పాఠ్యపుస్తకముగ నియోగించుట కెల్లవిధముల తగియున్నది.

ఇతరవిశ్వవిద్యాలయములందు లీలావతీగణితము పాఠ్యపుస్తకముగ నియమింపబడినను, మన యాంధ్రవిశ్వవిద్యాలయమున ఉపేక్షింపబడుట విచారకరమగు విషయము.

శ్రీశాస్త్రిగారికి ఆంధ్రలోకము తగిన అవకాశమునిచ్చుచో వీరు జ్యోతిశ్శాస్త్రమునందును గణితములందును ఇట్లు సరలములగు నాంధ్రవ్యాఖ్య లొనరించి వెలువరింప తగియున్నారు.

21—6—35,
విజయనగరము.

ఇట్లు,
ఏచూరి వెంకటరామయ్య,
డి. యస్. సి; (పారిస్) ఏ. యన్ట్స్. పి.

పీఠిక.

సకలశాస్త్రములకు, గణితశాస్త్రము పునాదివంటిది. గణితసిద్ధాంతసహాయప్రయోగములేక భౌతికశాస్త్రమెద్దియైనను వృద్ధినొందదు. గణితమునకు అంకము మూలాధారము. అట్టియంకసంజ్ఞకును, దశగుణితస్థాన సంకేతమునకును, అంకగణితమునకును, మన భరతఖండమే జన్మస్థానమనియు తొలుత గంగా గోదావరీ తటప్రాంత స్థితబ్రాహ్మణులే యంకబీజగణితముల సృష్టించిరనియు పాశ్చాత్య పండితులే యంగీకరించియున్నారు.

హైందవప్రాచీనగణితాచార్యులలో ఆర్యభటుడు (క్రీ. శ. 476) బ్రహ్మగుప్తుడు (క్రీ. శ. 598) భాస్కరుడు (క్రీ. శ. 1108) అనువారు సుప్రసిద్ధులు. ఆర్యభటుడు బీజగణితసృష్టికర్తయని కీర్తివహించెను. ధనఋణాంకసంజ్ఞాకల్పనముకూడ నితనికీర్తిని చాటుచున్నది. వర్గసమీకరణ (Quadratic Equations) విధానము, తత్సంబంధమూలద్వయ సిద్ధాంతము, బ్రహ్మగుప్తునిచే తొలుత కల్పింపబడెను. శ్రేఢీవ్యవహార కుట్టకవ్యవహార విధానకల్పనా నిపుణతయు మనభారతీయగణితాచార్యులకే చెందినది. వేయేల? ప్రస్తుత ప్రచారమందుండు నంకగణితములో నన్నిపద్ధతులను మనభరతఖండమేలోకమునకుప్రసాదించియున్నది. అంకగణితమందునాటినుండి నేటివరకు నూతనపద్ధతి పుట్టలేదు. ఇకబీజగణితమందు నూతనముగ బయలువెడలిన సిద్ధాంతములు మూడు. అవి ద్వియుక్పదసిద్ధాంతము (Binomeal Theorem), అంకతత్వము (Theory of numbers), ప్రాయికత్వతత్వము (Theory of Probability). ఇవితప్ప తక్కిన యుచ్చబీజగణిత (Higher Algebra) ప్రక్రియములన్నియు భారతీయ గణితపండితప్రోక్తములే.

భారతీయగణితాచార్యులలో భాస్కరాచార్యుడు ప్రముఖుడు. ఇతడురచించినగ్రంథము 'సిద్ధాంతశిరోమణి'. నిజముగ నీగ్రంథము ఈనామమునకు దగియున్నది. ఏలయన దీనిజన్మవర్షమగు క్రీ.శ. 1144 నుండి నేటివఱకు మనభరతఖండమున జ్యోతిషసిద్ధాంతులందరు దీనినే ప్రథమమున నభ్యసించుచున్నారు. ఇందు అంకగణితాధ్యాయము, బీజగణితాధ్యాయము, గ్రహగణితాధ్యాయము, గోలాధ్యాయము, అనునాల్గుభాగములుగలవు. వానిలో నంకగణితాధ్యాయమునకు ఆచార్యుడు లీలావతియను నామమిడెను.

ప్రస్తుతమాంగ్లభాషయందు అంకగణితము (Arithmetic) అనుశీర్షికక్రింద చర్చింపబడు విషయములన్నియు సంగ్రహముగ లీలావతియందు వర్ణింపబడియున్నవి, అవి క్రమముగ పరికర్మాష్టకము Four rules of Arithmetic, Square, Square root, Cube, (cube root) భిన్నములు (Fractions) వాని ప్రయోగములు (application to problems of daily life) త్రైరాశికము (Rule of Three) క్షేత్రవ్యవహారము (Mensuration). ఇంతియగాక ఉచ్చబీజగణితమునకుజేరిన శ్రేఢీవ్యవహారము (Progressions) వ్యక్తిభేద, అంకపాశ వ్యవహారములు (Combination and Permutations) కుట్టకవ్యవహారము (Solutions of Indeterminate Equations) కూడ నీగ్రంథమునందు వర్ణింపబడియున్నవి. కుట్టకవ్యవహారసందర్భమున వితతభిన్న (Continued Fractions) ఆసన్నమాన (Convergent) ఆనయనములునుసంగ్రహముగసూచింపబడియున్నవి. శూన్యపరికర్మసిద్ధాంతములుకూడ వర్ణితములైయున్నవి.

శూన్యపరికర్మనుగురించి భాస్కరుడుచెప్పిన

శూన్యే గుణకేజాతే ఖం హారశ్చేత్పునస్తదారాశిః।
అవికృత ఏవ జ్ఞేయస్తథైవ ఖేనోనితశ్చ యుతః॥

అనుసూత్రమునందలి విషయము, ఒకరాశిని శూన్యముచే గుణించి భాగించినయెడల రాశియొక్క మూల్యము మారదని జెప్పుచున్నది. దీనింబట్టి భాస్కరుడు శూన్యమునకుకూడ నంకధర్మమును కల్పించెనని తెలియుచున్నది. కాని ఏదేని ఒకఅంకమును శూన్యముచే

గుణించిన ఫలము శూన్యమని సూత్రప్రథమ పాదమం దుపపాదింప బడియున్నది ఆఫలమును శూన్యముచే హరింపలబ్ధము దురూహ్యము ఈ రూపమును నవీనగణితజ్ఞులు (Indeterminate form) అనిరి

నవీనగణితములలో చేర్పబడు దశాంశగణితము (Arithmetic of Decimals) లీలావతియందు లేదు. ప్రక్రియలకుగాని సిద్ధాంతములకుగాని యుపపత్తిని వ్యక్తీకరించు నాచారము మన పూర్వగణితాచార్యులు పాటింపలేదు.

విషయమంతయు సంకేతపదసమన్విత శ్లోకరూపమున సంక్షేపముగ వ్రాయబడియుండుటచే నీగ్రంథము సాధారణముగ స్వతంత్ర పఠనమునకు లొంగుబాటుకాదు

ఈగ్రంథమునకు సంస్కృతవ్యాఖ్యానము లనేకములుగలవు. ఆంధ్రభాషానువాదములు రెండే కనబడుచున్నవి. వల్లభరాయుని దొకటి, తడకమళ్ళ వెంకటకృష్ణారావుగారిదొకటి. ఈగ్రంథములు రెండును పద్యాత్మకములు. వీనియందును సాంకేతికపదములు విరివిగ గానవచ్చును. పదనిఘంటువును నేర్చికొనినగాని దీనియందలి పద్యము లన్వయముకావు.

ఇట్టితరి, అస్మన్మిత్రులగు, బ్రహ్మశ్రీ పిడపర్తి కృష్ణమూర్తి శాస్త్రిగారు 'లీలావతి'ని సామాన్యముగ తెలుగు వ్రాయఁజదువ నేర్చినవారికెల్ల స్పష్టముగ తెలియురీతిని సరళమగునాంధ్రమున వివరించి యాంధ్రలోకమునకు మహోపకారమొనర్చిరి. వీరు కులక్రమాగతజ్యోతిషపాండిత్యసంపద్విభూతిచే వెలయు పిడపర్తి వంశసంజాతులు. అదియుగాక జ్యోతిశ్శాస్త్రమునందు (Astronomy) విశేషపరిశ్రమ సల్పియున్నారు. వీరు బాల్యముననే సంస్కృతలీలావతిని స్వతంత్రముగ నభ్యసించి తెలుగువ్యాఖ్యవ్రాసిరి. ఈ అంశమొకటియే వీరి కుశాగ్రబుద్ధిని దెల్పుచున్నది.

శాస్త్రిగారి ఆంధ్రలీలావతియందలి విశేషములు :

1. తొలుదొలుత 'అంకము' అనుపదమునకు నిర్వచనము వ్రాయబడెను.

2. ప్రతిఅధ్యాయమునకు నారంభమున పారిభాషికపదముల కర్థమునిచ్చి విషయము సులభముగ నన్వయించుటకు వీలుగ నుపోద్ఘాతము వ్రాసియున్నారు.

3. సూత్రవివరణము చేయునపుడు అందందు 'సూత్రోపలబ్ధ నూతనపద్ధతులనుచేర్చి వానినిసుబోధముచేయునుదాహరణము లిచ్చియున్నారు.

4. ఆసన్నమాన (Convergent)మను సాంకేతికమును భిన్నపరికర్మాష్టక ప్రకరణమందే వర్ణించి దానింగనుగొనువిధానమును విశదీకరించుటలో వితతభిన్న (Continued Fractions) విధానమును వర్ణించి, కొన్ని న్యాసపూర్వకోదాహరణముల నిచ్చియున్నారు.

5. కుట్టకప్రకరణమందు భాస్కరుడు

పరస్పరం భాజితయో ర్యయో ర్య
శ్శేష స్తయో స్స్యా దపవర్తనం సః।
తే నాపవర్తేన విభాజితౌ యౌ
తౌ భాజ్యహారౌ దృఢసంజ్ఞకౌ స్తః॥

అనుసూత్రమం దపవర్తనపద్ధతిని వివరించియున్నాడు. శాస్త్రిగారిపద్ధతిని పరికర్మాష్టకమందే విశదీకరించి మహత్తమాపవర్తన (G. C. M.) మను సాంకేతికమును వ్యక్తపరచియున్నారు.

6. ఆంగ్లగణితగ్రంథసంప్రదాయమును పాటించి దీనివెంబడి లఘుతమాపవర్త్య (L. C. M) మును దెలియువిధానమును వివరించియున్నారు.

7. దశాంశగణితవిషయములను కొంతవరకు వివరించియున్నారు.

8. సూత్రములకన్నిటికిని బుజువులఁజూపియున్నారు. పలుచోట్ల నుపపత్తింజేర్చియున్నారు ఒక్కొకచో 2, 3 ప్రకారములుగను ఉపపత్తిని వ్రాసియున్నారు.

9. అచ్చటచ్చట సందర్భోచితముగ నవీనసిద్ధాంతముల నిమిడ్చియున్నారు.

భాస్కరీయశ్లోకసూత్రములతో ప్రసక్తిలేకయే కేవలము శ్రీశాస్త్రిగారి ఆంధ్రవివరణమునంతను జదివినయెడల చక్కగా నొకఆంధ్రగణితగ్రంథముగ గనుపట్టును. భాస్కరీయశ్లోకములతో చూచినయెడ భాష్యముగ గనుపట్టుచున్నది. ఈగ్రంథమును రచించుటచేత శాస్త్రిగారు, మనపురాణపురుషుల మేధాశక్తిని నిరసించు నిక్కాలపువారిని మేలుకొలిపి, వారియెడ గౌరవాదరముల పురిగొల్పిరి. రెండవది, వలసినంతవరకు నవీనవిజ్ఞానమునుచేర్చి గ్రంథస్థ విషయముల విస్తరించిరి.
కావున నీగ్రంథము పఠనీయముగ నేర్పరుచుటకు తగియున్నది.

పారిభాషికపదములగురించి యొకమాట:—

ప్రస్తుతము ఆంధ్రమునందు ప్రారంభగణితములు ఊరికొకటి ప్రకటింపబడుచున్నవి. భారతీయ పురాతనగణితగ్రంథపరిచయము గ్రంథకర్తలలో చాలమందికి లేకపోవుట వింతకాదు. అందుచే ఎవరికి తోచినట్లువారు పరిభాష కల్పించి ఉపయోగించుచున్నారు.

ఇట్టికార్యము భాషాభివృద్ధి కెంతమాత్ర ముపకరింపదు. కావలసిన పారిభాషికపదములన్నియు మనపురాతన గణిత గ్రంథములందు ధారాళముగ నుపయోగింపబడియున్నవి. అట్టిపూర్వాచార్య వ్యవహృతములగు పారిభాషికపదములను సమయానుగుణముగ వివరించుచు నుపయోగించి శ్రీశాస్త్రిగారు రాబోవు ఆంధ్రగణితగ్రంథ కర్తలకు మార్గదర్శకులగుచున్నారు.

బీజగణిత గ్రహగణిత గోలాధ్యాయములకు కూడ నిట్టియాంధ్రభాష్యముల శాస్త్రిగారు వెలువరింతురని నమ్ముచు నింతటవిరమించుచున్నాను.

ఇట్లు,

విజయనగరం, శ్రీమహారాజావారికళాశాల. — వింజమూరి హనుమంతరావు, గణితశాస్త్రోపన్యాసకుడు.

శ్రీరామచంద్రపరబ్రహ్మణేనమః

ప్రస్తావన.

బ్రహ్మణే సాంఖ్యవేద్యాయ। బాహ్యాంతరతమోనుదే।
వ్యక్తావ్యక్తనిదానాయ। భాస్కరాయాస్తు మే నతిః॥

ప్రకృతము అంకగణిత (Arithmetic) మని వ్యవహరించుగణితమును ప్రాచీనులు వ్యక్తగణితమనియు పాటీగణితమనియు వ్యవహరించిరి. అంకెలచేనగు గణితమగుట నంకగణితమనినట్లు అంకములు స్పష్టముగ నాయాసంఖ్యలను బోధించునవియగుటచే ఆగణితము స్పష్ట(వ్యక్త)సంఖ్యలచేనగునదికావున వ్యక్తగణితమనియు, అంకెలచేగణించుట పరిపాటి(పద్ధతి)లోనిది (నలిగినది) అగుటచే పాటీగణితమనియును వ్యవహరించుట అన్వర్థముగానున్నది.

ఈరెండుసంజ్ఞలను భాస్కరాచార్యులు "పాటీంసద్గణితస్య" అనియు (ఇందలి మొదటిశ్లోకము) "ద్వివిధగణితముక్తంవ్యక్తమవ్యక్తయుక్తం"(శిరోమణి) అనియును వాడియున్నారు.

ఇట్లు తెలియబడని (అవ్యక్తమగు) పరిమాణముగలసంఖ్యలకు 'యా' మొదలగువర్ణముల పరిమాణములుగ గల్పించిచేయుగణితము అవ్యక్తసంఖ్యలచేనగునది కావున అవ్యక్తగణితమనియు (అవ్యక్తం బీజం యస్య తత్ అవ్యక్తబీజం)అవ్యక్తసంఖ్యాబీజము (కారణము)గ గలగణితము అవ్యక్తబీజము అనువ్యుత్పత్తిచే అవ్యక్తబీజగణితము, బీజగణితమున్ను అనియును లేక వ్యక్తగణితమునందలి పద్ధతులు విశేషముగ అవ్యక్తగణితమునుబట్టి నిర్మింపబడినవగుటచే వ్యక్తగణితమునకు బీజమైనదిగావున బీజగణితమనియును వ్యవహరించుట యుక్తియుక్తముఅగుచున్నది.

ఈకడపటిఅభిప్రాయమును శ్రీభాస్కరాచార్యులు సూచించిరి

"పూర్వం ప్రోక్తం వ్యక్త మవ్యక్తబీజం"
"వ్యక్తస్య కృత్స్నస్య తదేకబీజః" (బీజగణితము)

భాస్కరాచార్యులు.

అట్టివ్యక్తావ్యక్తగణితములు రెండును, 3గ్రహగణితాధ్యాయము, 4 గోలాధ్యాయము, అనునాలుగుభాగములుగ "సిద్ధాంతశిరోమణి" యను ప్రౌఢసిద్ధాంతగ్రంథమును శ్రీభాస్కరాచార్యులు శా॥ శ ౧౦౬౬ సంవత్సరము (క్రీ॥ శ॥ 1144 సం॥)న రచించియున్నారు. క్రీ॥ శ॥ 1177 సం॥మున కరణకుతూహలమను కరణగ్రంథమును రచించెను. ఈరెండును ప్రస్తుతము ప్రసిద్ధములు. అందు 'శిరోమణి' భారతదేశమందను ఇతరదేశములందును విశేషఖ్యాతినందియున్నది.

శా॥ శ॥ ౧౦౩౬ (క్రీ॥ శ॥ 1108 సం॥)లో జన్మించినట్లును 36 వ యేట శిరోమణిని రచించినట్లును శిరోమణియందు తుదను చెప్పికొనెను.

రసగుణపూర్ణమహీసమశకనృపకాలే భవ న్మమోత్పత్తిః।
రసగుణవర్షేణ మయా సిద్ధాంతశిరోమణీ రచితః॥
సిద్ధాంతశిరోమణి

ఇతడు మహేశ్వరాచార్యునికుమారుడు. తండ్రివలననే శాస్త్రముల నభ్యసించెను. ఈతనిగోత్రము శాండిల్యసగోత్రము. యజుశ్శాఖ. మహారాష్ట్రబ్రాహ్మణుడు. సహ్యాద్రిసమీపమునను న్న విజ్జడబిడమును గ్రామము నివాసము

ఈవిషయములను భాస్కరుడిట్లు చెప్పెను:—

ఆసీ త్సహ్యకులాచలాశ్రితపురే త్రైవిద్యవిద్వజ్జనే
నానాసజ్జనధామ్ని విజ్జడబిడే శాండిల్యగోత్రే ద్విజః।
శ్రౌతస్మార్త విచారసారచతురో నిశ్శేష విద్యానిధి
స్సాధూనామవధి ర్మహేశ్వరకృతీ దైవజ్ఞచూడామణిః॥
తజ్జ స్తచ్చరణారవిందయుగలప్రాప్తప్రసాద స్సుధీ
ర్ముగ్ధోద్బోధకరం విదగ్ధగణకప్రీతిప్రదం ప్రస్ఫుటం।
ఏత ద్వ్యక్తసదుక్తియుక్తిబహులం హేలావగమ్యం విదాం
సిద్ధాంతగ్రథనం కుబుద్ధిమథనం చక్రే కవి ర్భాస్కరః॥
శిరోమణి

డాక్టరు "భాఉదాజీ" అనువారిచే సంపాదింపబడి నాసికాక్షేత్రసమీపమందు లబ్ధమైన తామ్రశాసనమునందలి శ్లోకములు గణకతరంగిణియందు వ్రాయబడినవి. అందుభాస్కరునిగూర్చిన శ్లోకములు :

ఉద్భటబుద్ధి ర్భట్టే సాంఖ్యే సంఖ్య స్వతంత్రధీ స్తంత్రే।
వేదేనవద్యవిద్యో నల్ప శిల్పాదిషు కలాసు॥ ౧
స్వచ్ఛందోథ ఛ్ఛందసి శాస్త్రే వైశేషికే విశేషజ్ఞః।
యః శ్రీప్రభాకరసమః ప్రాభాకర దర్శనే కవిః కావ్యే॥ ౨॥
బహుగుణగణితప్రభృతిస్కంధత్రితయే త్రినేత్రసమః।
విబుధాభి వందితపదో జయతి శ్రీభాస్కరాచార్యః॥ ౩॥

ఈశ్లోకములచే సాంఖ్యవైశేషికసాహిత్యమీమాంసాదీతర శాస్త్రములందును, వేదములందునుకూడ పాండిత్యమధికముగ గలవాఁడట్లు తెలియుచున్నది. మరియునొకచాటుపద్యము భాస్కరాచార్యునిగూర్చియున్నది. దానిని ప్రాయికముగ లీలావతీతుదను కొందరు ప్రకటించుచున్నారు. అదియు నిచట చూపబడుచున్నది:

అష్టౌ వ్యాకరణాని షట్చభిషజాం వ్యాచష్ట తా స్సంహితా
షట్తర్కా న్గణితాని పంచ చతురో వేదా నధీతేస్మ యః।
రత్నానాం త్రితయం ద్వయం చ బుబుధే మీమాంసయో రంతరం
సద్బ్రహ్మైక మగాధబోధమహిమా సోస్యాః కవి ర్భాస్కరః॥

దీనియందు 4 వేదములను, 8వ్యాకరణములను, ౬ వైద్యసంహితలను 6దర్శనశాస్త్రములను, మీమాంసాశాస్త్రములతారతమ్యమును, రత్నశాస్త్రమును, 5 గణితములను, నెరింగియున్నట్లు చెప్పబడినది (5 గణితములనగా, పౌలిశ, రోమశ, వాసిష్ఠ, సౌర, పైతామహసిద్ధాంతములైదు అని కొందరుచెప్పుచున్నారు)

ఇతడు గొప్పపండితుడనుట ఈతనిగ్రంథములవలననే తెలియుచున్నది. మరియునితనివంశ మనాదిగ పండితకుటుంబమైనట్లును పైశాసనమువలననే తెలియుచున్నది. అందు త్రివిక్రమభట్టునుండి భాస్కరునిపౌత్రునివరకును వంశవృక్షమీయబడినది. అదియు నిచట చూపబడుచున్నది.

త్రివిక్రమ
|
భాస్కరభట్ట
|
గోవింద
|
ప్రభాకర
|
మనోరథ
|
మహేశ్వర
|
భాస్కరాచార్య
|
లక్ష్మీధర
|
చంగదేవ

ఇందు రెండవ భాస్కరభట్టు భోజరాజుకాలమువాడనియు నాతనిచే మన్ననగాంచెననియుగలదు. ఈత్రివిక్రమభట్టు నలచంపుచేసిన త్రివిక్రమభట్టగావచ్చునని శంకరబాలకృష్ణదీక్షితులుఊహించియున్నారు.మన(7)భాస్కరాచార్యులు సర్వతోభద్రవసిష్ఠతుల్యములను ఇతరగ్రంథములను రచించినట్లు తెలియుచున్నది.గాని, అవిలభించుటలేదు.బీజోపనయనమనుగ్రంథమిశనురచించినట్లు ఇపుడు ప్రకటింపబడినది. గాని, దానింగూర్చి వివాదముగలదు. శ్రీభాస్కరాచార్యులు తనసిద్ధాంతశిరోమణియందద్వితీయప్రతిభ గనుపరచెననుట పాశ్చాత్యపౌరస్త్యవిద్వాంసులందరు నేకగ్రీవముగ సిద్ధాంతీకరించినవిషయము. భాస్కరాచార్యులు బ్రహ్మగుప్తసిద్ధాంతమును ప్రమాణీకరించి శిరోమణినివ్రాసెను. గాని విమర్శింప సిద్ధాంతశేఖరకర్తయగు, శ్రీపతి భట్టును (శా॥ శ॥ ౯౬౧ క్రీ॥ శ॥ ౧౦౩౯) అనుసరించెననియు గానవచ్చెడిని. సిద్ధాంతశేఖరమునందలి శ్లోకములుకొన్నికొన్ని స్వల్పవ్యత్యాసముతో నిందుగానవచ్చెడిని. శ్రీపతికవిత్వమతిలలితము కావున, దానియందలిప్రీతిచే దానినిబోలియుండునట్లు చేసెననితోచెడిని.

ఏదియెట్లున్నను భాస్కరులు కొన్ని నూతనాంశములను చేర్చుట, కవిత్వము లలితముగనుండుట, సిద్ధాంతశిరోమణియందన్ని భాగములకును ఉపపత్తి వ్రాయుట, మొదలగు కారణములచే అన్నిటికంటెను శిరోమణికి ప్రాముఖ్యముగలిగెను. ప్రకృతము భారతవర్షమున నీసిద్ధాంతమును జ్యోతిశ్శాస్త్రమునందు ముఖ్యముగ చదువుచున్నారు. ప్రాచీనులగు రంగనాథ నృసింహాదివ్యాఖ్యాతలు ఇతరగ్రంథములవ్యాఖ్యలందు పూర్వసిద్ధాంతములవిడచి, దీనినే ప్రమాణీకరించిరి. వేయేల? పాశ్చాత్యపండితులును ఈభాస్కరునిఅభిప్రాయమున ననుసరించియే ప్రాచీనార్ష సిద్ధాంతములకును తమఅనువాదములం దభిప్రాయమును వ్రాసియున్నారు. మన ఆంధ్రదేశమునతప్ప తక్కినభారతభూమియందంతటను నిది మహోత్కృష్టదశ నందియున్నది. ఇట్లు భారతదేశమున ముఖ్యముగ పఠింపబడునది కమలాకరుని తత్త్వవివేకము రెండవది.

ఈభాస్కరుడు లీలావతియందు అంకపాశము, వ్యక్తిభేదగణితము, గణోత్తరశ్రేఢీఫలానయనము, వృత్త, పృష్ఠ, ఘన, ఫలసాధనము, బీజగణితమున కుట్టకవిశేషములు, కరణీవర్గాదినియమములు, సమీకరణములందు విశేషములు, శిరోమణియందు ఉదయాంతరసాధనము, తాత్కాలిక భోగ్యఖండసాధనము, అక్షక్షేత్రములు, భగణోపపత్తి, త్రిప్రశ్నాధికారవిశేషములు, మహాప్రశ్నాధికారవిశేషములు, మొదలగు విషయములను స్వకీయప్రతిభావిశేషముచే నిర్మించెను. (కాని కేశవాది నామవాచ్యములగు శ్రీహరిస్వరూపములు అంకపాశమును సంబంధించినవియని ఆగమశాస్త్రములు చెప్పుచున్నవి.)

ఇందలితాత్కాలిక భోగ్యఖండసాధనము చలగణితముచే నుపపత్తి చెప్పదగియుండుటచే,నీతనికి చలగణితజ్ఞానమూహింపబడుచున్నది. ఇట్టిచలగణితవిషయములుకొన్నిగలవు. వేయేల? ఈతడు భాస్కరావతారమని గణింపబడియున్నాడు.

ఈతనిజన్మస్థలము బీజపురమని శ్రీసుధాకరులు వ్రాసియున్నారు. విజ్జడబిడము బీజపురమని వారియభిప్రాయము. ఇతరులు కొందరు దీనింగూర్చి భిన్నాభిప్రాయులుగనున్నారు. భాస్కరుని జన్మస్థలమునుగూర్చి వేరుగవ్రాయబడినది.

లీలావతీనామము.

ఆభాస్కరీయవ్యక్తగణితము లీలావతియని ప్రసిద్ధికెక్కియున్నది. ఈ నామమును గ్రంథాదియందు "లాలిత్యలీలావతీం"అని సూచించియును, గ్రంథాంతమందు "లీలావతీహ సరసోక్తి ముదాహరంతీ" అని చెప్పియును, గ్రంథకర్తయే వ్యవహరించెను.

ఇందులకు కారణముగ అనేకకథలుగలవు

(1) తనభార్యలీలావతియనియును సంతతిలేక ఖేదపడునామె పేరనీగ్రంథమును రచించెననియును కొందరుచెప్పుదురు. భాస్కరునకు లక్ష్మీధరుడనుపుత్రుడు జైత్రపాలుడను నృపతియొక్క సంస్థానమందున్నట్లును, పౌత్రుడగు చంగదేవుడు సింఘణచక్రవర్తికి సంస్థానజ్యోతిషికుడైనట్లును పైశాసనమువలన తెలియుచుండుటచే నీకథ విశ్వాసపాత్రముగాదు.

(2) కొందరాతనివేశ్యనామ మిది యందురు. అట్టిపండితుని వేశ్యాలోలుడనుటకు తగినకారణములు గానరామి నదియును విశ్వాసార్హము గానేరదు.

(3) ఆతనికుమార్తె లీలావతియనియు ఆమెకు బాల్యవైధవ్యయోగమున్నట్లు జాతకమునవలన నెరింగి, ఆమెకు నాయోగమును తప్పింప మంచిముహూర్తమున వివాహముసేయతలపెట్టి శుభలగ్నసమయము నెరుంగుటకు (పూర్వపద్ధతి) ఘటీయంత్రమునుచూచుచు కార్యపుతొందరలోనుండ వివాహమునకై యలంకరింపబడిన యాతనిపుత్రికయు నొకమారుచూడగ, నామెకర్ణాభరణముజారి యాఘటియందు పడెననియు, దానిని నాతడు తొలుత గమనింపక, కాలాతిపాతమై శుభలగ్నము దాటిపోవుట తెలిసికొని, దైవమునందు భారము వైచి వివాహము సేయ, నామె కాయోగము తటస్థించెననియు, నాకారణమున పుత్రీప్రేమచే నీగ్రంథమున కామెకీర్తికై లీలావతీ నామ ముంచెననియును, ఒక కథ గలదు.

ఇందు "అయే బాలే లీలావతి" (ఉదా 1 శ్లో)

"బాలే బాల కురంగ లోల నయనే లీలావతి" (ఉదా 2 శ్లో)

ఇట్లు లీలావతీసంబోధనము గలదు. కావుననే "లాలిత్య లీలావతీం"అను ప్రథమశ్లోకమందలి పదమునకు మహాకవిప్రయోగముగ 'లాలిత్య' అని పదవిభాగము చేసి 'లీలావతిని లాలించి' అని అర్థము చెప్పుట సమంజసమా? అను సంశయము గలుగుచున్నది. (టీక చూ) కాని బాగుగ విమర్శింప నిందు 'మిత్ర' 'సఖే' 'నందన' 'గాణితిక' 'విద్వన్' ఇత్యాది సంబోధనములు పురుషపరములును బహుళములు గానవచ్చుచున్నవి.

వారియు గ్రంథాంతమందు భాస్కరాచార్యులు

యేషాం సుజాతి గుణ వర్గ విభూషితాంగీ
శుద్ధాఖిల వ్యవహృతిః ఖలు కంఠసక్తా।
లీలావతీహ సరసోక్తి ముదాహరంతీ
తేషాం సదైవ సుఖసంప దుపైతి వృద్ధిమ్॥ ఈశ్లోకమున

"లీలావతి యెవ్వారి కంఠాలింగన మొనరించునో వారు సుఖించెదరు."

అని శ్లేషించియున్నారు. కుమారికాపరముగ నైనను భార్యాపరముగ నైన నిట్లు శ్లేషించుట యసంగతమగుటచే పైగాథలు సత్యదూరములును కల్పితములును అని తోచుచున్నది. మరియు నిట్లు గోలాధ్యాయ ప్రథమశ్లోకమునందు 'లాలిత్య లీలావతీ' అని ప్రయోగించి ఆపదమునకు 'మాధుర్యగుణసంపన్నా' అని అర్థమును శ్రీఆచార్యులు వ్రాసియున్నారు. కావున అట్లు అపప్రయోగముగ గ్రహించుటకంటె లాలిత్యముగలది యను నర్థమే సమంజసము.

భాస్కరుని కవిత్వ మంతయు లలిత మైనను ఇందు లాలిత్య మధికము. లాలిత్యవిలాసము గలిగినది యగుట గ్రంథకర్త లీలావతీసంజ్ఞ నిడెనని చెప్పుట సమంజసముగ గన్పట్టుచున్నది. గ్రంథకర్తలు తమకృతులకు పుత్రీభావనచే స్త్రీలింగనామమును చేయుటయు పరిపాటిగ నున్నది. శతానందుడు తన కరణగ్రంథమునకు 'భాస్వతి' యని పేరు బెట్టెను. ఇట్లు అనేకములు.

ఈ లీలావతీగణితము అట్టి పదలాలిత్యము, చక్కని ప్రకరణవిభాగము, విషయ బాహుళ్య సంగ్రహము, సుబోధములగు ఉదాహరణ న్యాసములు, మొదలగు విశేషములు గలది యగుటచే శ్రీధరాచార్యత్రిశతిక, మహావీరాచార్య గణితసారసంగ్రహము, మొదలగు పూర్వాచార్యకృత వ్యక్తగణితములన్నిటికంటె విశేషఖ్యాతి నందియున్నది. గణితమునందభిలాషగలవా రెవ్వరైనను దీనిని గూర్చి ప్రస్తావించుకొననివా రుండరని నావిశ్వాసము.

వాస్తవముగ చూచినను ప్రాచీనములును నవీనములు నగు వ్యక్తగణితము లన్నిటి కన్న నిది మిన్న యనుటకు తగియున్న దనుట సర్వవిమర్శకులకును సమ్మతమును సమ్మతిపాత్రము నైయున్నది.

ప్రస్తుతము మనమద్రరాజధానియందు అందును ఆంధ్రదేశమునందును నెట్లున్నను తదితరభారతదేశమునందు సంస్కృతభాషలో జ్యోతిశ్శాస్త్రమునభ్య

సించువారల కిది ప్రథమపఠనీయముగానున్నది. కాశికా రాజకీయ (గవర్నమెంటు) సంస్కృత కలాశాలయందు లీలావతి సమగ్రముగ మధ్యమపరీక్షయందును, లీలావత్యుపపత్తి సంపూర్ణముగ నాచార్యపరీక్షయందును పఠనీయముగనున్నది. వేయేల ? ఇది చదివినగాని జ్యోతిశ్శాస్త్రాభ్యాసమున కర్హుడుగాడు. అట్లు ఇది జ్యోతిశ్శాస్త్రాభ్యాసకులకె గాక సర్వసాధారణముగ ప్రాపంచికవ్యవహారమునకై వలయు లెక్కలన్నియును(Problem relating to daily life) అతిరిక్తవిషయములును గలది యగుటచే లెక్కలను నేర్చుకొనువారల కెల్లరకును ఉపయోగించునదియై యున్నది. గణితజ్ఞులకైనను ప్రాచీనుల గణితవిశేషములను సులభపద్ధతులను తెలియగోరువారల కిది అవశ్యపఠనీయము.

దీనికి సంస్కృతమున చాల వ్యాఖ్యలు గలవు. కొన్ని అముద్రితములును కొన్ని ముద్రితములు నై యున్నవి. గంగాధర (క్రీ॥ శ॥ 1411) గణేశదైవజ్ఞ (క్రీ॥ శ॥ 1492) సూర్యదాస (క్రీ॥ శ॥ 1702) లక్ష్మీదాస (క్రీ॥ శ॥ 1494) మునీశ్వర (క్రీ॥ శ॥ 1597) మొదలగువారివ్యాఖ్యలు అముద్రితములు.

దుర్గాదాస, బాపూదేవశాస్త్రి, సుధాకర, మహీధరాచార్యుల, టీకలు ముద్రితములు. ఈగ్రంథమునకు పారసీకభాషయందును ఆంగ్లభాషయందును అనువాదములును చేయబడినవి. మహీధరాచార్యటీక ఆంధ్రదేశముననే గలదు.

స్వీయవృత్తాంతము.

ఈ లీలావతీ గణితమును, అస్మత్పితృష్వస్రీయులును సాహిత్యచక్రవర్తులు నగు బ్రహ్మశ్రీ దర్భా బైరాగిశాస్త్రి గారి వద్ద వారిసోదరులగు శ్రీ సర్వేశ్వరశాస్త్రిగారును నేనును సాహిత్యగ్రంథములు చదువునపుడు మాకు నభ్యసింప తలంపుగలిగి సర్వేశ్వరశాస్త్రిగారును నేనును స్వయముగ నభ్యసించితిమి.

అపుడు (1) మ.మ.పం. బాపూదేవ శాస్త్రిగారి (ఉపపత్తి) టిప్పణితో గూడిన లీలావతి (2)మ.మ,పం,సుధాకరద్వివేదిగారి (ఉపపత్తి)టిప్పణితోగూడిన లీలావతి (3)తడకమళ్ల వెంకటకృష్ణ రాయ విరచితములగు ఆంధ్రపద్యములతోడను ఆంధ్రవివరణముతోడను మహీధరాచార్యకృత సమన్వయరూప సంస్కృత టీకతోడను(1863)వావిళ్లవారిచే ప్రకటితమగు లీలావతి. ఈపుస్తకములు లభించినవి ఇందు 1,2 పుస్తకములు సంస్కృతములోగలవు. (3)వ పుస్తకమునందు వివరణము సంగ్రహముగ గలదు. సూత్రశ్లోకములకు సమన్వయము లేదు, ఆంధ్రీకృత

పద్యములు సంస్కృతముకంటె దుర్గ్రాహ్యములుగ నున్నవి. మహీధరచార్యటీకయును అతిసంకుచితమై క్లిష్టస్థలములందు ఔదాసీన్యము వహించియున్నది. ఈ కారణములచే మాకు కేవలభాస్కరాచార్యవాసనాభాష్యమునందలి వ్యాసములే విశేషసహకారములైనవి. ఆ వావిళ్లవారిచే ప్రకటితమగు లీలావతియును దుర్లభమైనది. దానివలన ఇట్లు సంగ్రహముగ సకలగణితవిషయముల బోధించు గ్రంథరత్నమునకు ప్రతిపదాంధ్రటీక యావశ్యకమని సంకల్పము గలుగుటచే నలసంవత్సర మార్గశీర్షమున నారంభించి సోదాహరణముగ 2,3 మాసములకు పూర్తగునంతకును ప్రతిపద టీకా తాత్పర్యముల వ్రాసితిమి.

ఇతరశాస్త్రవిషయములను, కులక్రమాగత జ్యోతిశ్శాస్త్రమునున్ను, స్వల్పముగ నభ్యసించి, కాశీ రాజకీయ సంస్కృతకలాశాలా జ్యోతిశ్శాస్త్రప్రధానోపాధ్యాయులగు (కీ శే) మ.మ.పం. మురలీధర ఝా వారి వద్ద జ్యోతిశ్శాస్త్రపరిశ్రమము నొందినపిమ్మట నీలీలావతీగణితమునకు ఆంధ్రటీకను సోపపత్తికముగ ప్రకటింప తలంపు గలిగి నేను రక్తాక్షిసంవత్సర కార్తికమాసమున మిశ్రవ్యవహారము వరకును ఉపపత్తిని ఆయావిశేషాంశములతో టీకనున్ను వ్రాసియుంటిని.

శుక్ల సంవత్సర కార్తికమున మా ప్రమోదసంవత్సర పంచాంగ ముద్రణమును గూర్చి నేను బ్ర॥శ్రీ॥ వావిళ్ల వెంకటేశ్వరశాస్త్రి వారివద్దకు వెళ్లినపుడు అచ్చటి కార్యనిర్వాహకు లగు బ్ర॥చంద్రమౌళీశ్వర శాస్త్రిగారితో లీలావతీ గణితమునకు సోపపత్తికమగు నాంధ్రటీక వ్రాసితి ననియు, దానిని ముద్రింప తలంపు గలదనియును ప్రస్తావించితిని. వారు, మేమును మా పుస్తకమును ఉపపత్తి వ్రాయించి ప్రకటింప సంకల్పించితి మని చెప్పిరి. ఐనను ఆరంభించిన కార్యమును విడువక ముద్రింపు తలంపుతోడనే యుంటిని.

ఈలీలావతీ ప్రసక్తివలన (తొలుతటీక వ్రాయునపుడు) బీజగణితము, రేఖాగణితము, సరలత్రికోణమితి, ఇత్యాది గణితములందును జ్ఞానము కొంత గలుగుటచే గురుతుల్యమగు నీలీలావతీటీకయందు నాకు గౌరవము అధికమగుటయు ఇందులకు ముఖ్యకారణము.

దీనినిగూర్చి 2,3సార్లు పంచాంగములలో ప్రకటించితిని. మా రెండవఅన్నగారగు బ్ర॥సుబ్రహ్మణ్యశాస్త్రిగారివద్ద గణితశాస్త్రము నభ్యసించుచు జాతకఫలాదేశమునందు పరిశ్రమ నందిన శ్రీ శ్రీ శ్రీ కుంచెపూడి నరసింహాచార్యుల వారు

(చిరుతపూడి కోనసీమ) నస్ని కార్యమునకు ప్రోత్సహించుచు రూ 116 ల నొసంగియున్నారు. ఈలీలావతికై గ్రాహకులవలన విశేషముగ నుత్తరములు వచ్చుచున్నవి. కొందరు చందాల నిచ్చియున్నారు. అంతరాయపరంపరచేతను, ద్రవ్యాల్పత్వము చేతను, ఈకార్యముపట్ల నా కధైర్యము గలిగినది.

ఈ నా పరిస్థితిని చూచి శ్రీ శ్రీ శ్రీ విజయనగరం మహారాజావారి కలాశాలాధ్యక్షులు (Principal)ను, మంత్రిశేఖరులును నై విశేషఖ్యాతి నొందియున్న మ.రా. శ్రీ బ్ర.శ్రీ. ఏచూరి నరసింహం పంతులుగారును, వీరి కుమారులు ఆ కలాశాలయందే విజ్ఞానశాస్త్రపరిశోధకు లగు బ్ర.శ్రీ. మ.రా.శ్రీ డాక్టరు ఏచూరి వెంకటామయ్య (D-Sc.)గారును నాయందుగల పరిపూర్ణానుగ్రహముతో ఈలీలావతీముద్రణమునుగూర్చి సర్వవిధముల నాకభయహస్తమొసంగిరి. శ్రీ భావసంవత్సర మార్గశిరమాసారంభము నుండియు వారిగృహంబున నుండియే ఇదివరకు వ్రాయబడిన గ్రంథమును శుద్ధముగ వ్రాయుటయు, శేషించిన భాగమునకు ఉపపత్తి విశేషములతో టీక వ్రాయుటయు, ముద్రణమునకైయిచ్చుటయు, ఈపనులను చేయగలిగితిని. సర్వవిధములను వారు ఈ కార్యభారమును వహించి నాచే ఈపనిని చేయించిరి. అట్లు నాయందు పూర్ణానుగ్రహముగల శ్రీనరసింహం పంతులు గారికిని, వీరి కుమారులు శ్రీ వెంకటామయ్య గారికిని, నాకృతజ్ఞతా వందనముల నర్పించుచు, వారి కుటుంబమునకు కృతజ్ఞుడను.

కార్యవశముచే నేను మధ్య మధ్య స్వగ్రామమునకు వెళ్లినపుడు ముద్రిత భాగముల శోధించుటయందును, శ్రీ డాక్టరు ఏచూరి వెంకటామయ్యగారు శ్రమచెందియున్నారు. మరియు మ.రా. శ్రీ కలాశాలా గణితశాస్త్రోపన్యాసకు లగు, వింజమూరి హనుమంతరావుగారు అపుడపుడు ముద్రితభాగముల శోధించియు ఆంగ్ల పారిభాషికపదముల సేకరించియు చేసిన సహాయమునుగూర్చి వారికిని కృతజ్ఞుడను.

నే నీ టీకయందు వలయు ఆసన్నమానానయనాదినూతనవిషయములనున్ను చేర్చియున్నాడను. టీకయందతిరిక్తవిషయములను చేర్చుట అప్రసక్తముగ కొందరు భావింపవచ్చును. ఐనను వ్యక్తగణితజ్ఞానము పూర్ణముగ గలుగుటకై నూతనాంశములను చేర్చుట ఆవశ్యకమని తలంచితిని. అచటచట నవసరమునుబట్టి చేర్పబడిన విషయములును నిర్వచనములును, విశేషములును, గ్రంథవిషయములును అన్నిటికిని

కలిపి ప్రక్రియసంఖ్యను వేసియుంటిని. సంస్కృతభాషాపరిచయ మేమాత్రమైనను లేక కేవలాంధ్రభాషాస్వల్పజ్ఞానమాత్రము గలవారును, దీనిసహాయముచే నారంభమునుండియు గణితనైపుణ్యము నలవరచుకొనుటకై సంకల్పించి వ్రాసితిని. సంస్కృతభాషాభిజ్ఞులకును నూతనమార్గము లావశ్యకములు కాకపోవు.

ఈవ్రాయుటయందు నా ప్రజ్ఞావిశేష మేమియును లేదు. ఆయాగ్రంథములందలి విషయములనే నొకచో చేర్చి, యిందు వ్రాసినాడను. అచటచట భాస్కరీయ పద్ధతులకు చెప్పదగిన ఇతరములగు నుపపత్తులు అనేకములున్నను గ్రంథవిస్తరభీతిచే కొన్నిటినే చూపియుంటిని. ఇది ప్రారంభగణితమగుటచే, అన్నిటికిని బీజగణితముచే నుపపత్తిని వ్రాయుట సర్వజనసుబోధము గాదని యెంచి సాధారణవిషయములకు వీలైనంతవరకు వ్యక్తప్రక్రియచేత నుపపత్తిని వ్రాసియుంటిని. తక్కిన ప్రకరణములందు సులభమార్గముగ బీజగణితముచే నుపపత్తుల వ్రాసియుంటిని. ఇట్లిందింకను ప్రకారాంతరోపపత్తులు రేఖాగణిత ఉచ్చబీజగణిత దీర్ఘవృత్తలక్షణాదులచే చెప్పదగినవి గలవు. వాటినన్ని, పూర్వాచార్యులు అచటచట వ్రాసిన వ్యక్తగణితవిశేషాంశములనున్ను, మ. మ. పం. బాపుదేవశాస్త్రి, మ. మ. పం. సుధాకరద్వివేదిగార్ల విశేషాంశములనున్ను, నాకు తెలిసినంతవర కొకచో చేర్చి అనుబంధముగ ప్రకటింప సంకల్పము గలదు.

మరియు నిందు శూన్యపరికర్మాష్టకమున ఒకానొకసంఖ్యను శూన్యముచే గుణించి శూన్యముచే భాగించినచో, ఆసంఖ్యయే యుండునని చెప్పబడినది. ఇది భాస్కరాచార్యుని 'శూన్యే గుణకే జాతే ఖం హారశ్చేత్పున స్తదా రాశిః। అవికృత ఏవ జ్ఞేయః' అను సూత్రము ననుసరించి వ్రాయబడినది.

కాని $\frac{5\times 0}{0}$ దీనియొక్క ప్రమాణము నవీనగణిత సిద్ధాంతములందు దుర్విజ్ఞేయముగ నిరూపింపబడినది. అట్లుగనే $\frac{0}{0}$ దీనియొక్క పరిమాణమునుగూర్చి వివరింపదగినవి చాలగలవు. వ్యక్తగణితప్రక్రియచే సామాన్యముగ నిందు వ్రాయబడినది. అనుబంధమున కొంచెము విస్తరింపగలను. వాస్తవముచే నిదియంతయు ఉచ్చబీజగణితము (Higher Algebra)ను సంబంధించినది.

ఆయా సూత్రముల ఉదాహరణములందు స్వల్పముగ ఇతర ప్రశ్నములను అచ్చటచ్చటమాత్రమే చూపియుంటిని. ప్రతిసూత్రమునకును ఇతరప్రశ్నములను

విస్తరభీతిచే చూపలేదు. వాస్తవముచే గణిత మభ్యాసమగుటకు రెండుమార్గములు. (1) సూత్రమును, దానియొక్క ప్రవృత్తిని, అనుభవముచేసికొనుట (2) ఆసూత్రమును సంబంధించిన అనేకప్రశ్నముల గణితమును చేయుట. ఇందు ప్రథమపద్ధతి ముఖ్యము. ఎన్నిప్రశ్నముల చేసినను సూత్రప్రవృత్తి తెలియనిచో, క్రొత్తప్రశ్నము వచ్చినపుడు క్లేశము గలుగును. అందువలన సాధ్యమైనంతవరకు సూత్రపద్ధతిని వివరించుటకై ప్రయత్నించితిని. దానిచే గ్రంథబాహుళ్య మగుటవలన ప్రశ్నముల నియ్యలేదు. అట్టిప్రశ్నములను అనుబంధమున చూపగలను. ఈశ్వరానుగ్రహముండిన, 1 సంవత్సరములో అనుబంధమును వెలువరించెదను.

పారిభాషికపదములు.

ప్రకృతము ప్రాయికముగ మనభారతీయులు ఆంగ్లపారిభాషికపదముల కలవడి దేశీయపదముల మరచిరి. అందులకై ఇట్టి శాస్త్రీయ పుస్తకములందు ఆయా పారిభాషికపదములకు ప్రక్కను, కోష్ఠములో ఆంగ్లపారిభాషికపదములను గూడ చూపుట పరిపాటిగ నున్నది. నేనట్లు చేయలేదు, ఈపుస్తకము కేవలాంగ్లభాషాభిజ్ఞులకెగాక, అందరకు నుపయోగించునది యగుటచే, నాయా పారిభాషికపదములకు నిర్వచనము ముఖ్యమని యెంచి, దానినే చేసియుంటిని. అదియుగాక దేశీయ పారిభాషికపదముల నెరుంగని యాంగ్లభాషాభిజ్ఞులకు, ఈపద్ధతివలననే దేశీయ పదాభ్యాసము రూఢమగునని తలంచితిని. ఐనను వాటిని గూడ మొదట నొక నిఘంటువుగ నిచ్చియున్నాను. దానివలన రెండుభాషలలోని పారిభాషికపదము లొకమారు దృష్టిపథమున బడుటచే నగు, వినువులేక ప్రాయికముగ సంతసించువారును నుండవచ్చును.

దేశీయపారిభాషికపదములును అనేకవిధములగుచున్నవి. పూర్వగ్రంథములందు మనపూర్వాచార్యు లుపయోగించిన పదముల విడచి నవీనులు క్రొత్తపదముల సృజించుచున్నారు అందులకు కారణము తెలియదు. రెండుసంఖ్యలను నిశ్శేషముగ భాగించు పెద్దసంఖ్యను (G. C. M.) మహత్తమాపవర్తన మని ప్రాచీనులు వ్యవహరించిరి ఇది నూతనసృష్టిలో గరిష్ఠసామాన్యప్రమాణమని చెప్పబడుచున్నది. ఇట్లు కొన్నిసంఖ్యలచే నిశ్శేషముగ భాగింపబడు చిన్నసంఖ్య, (L. C. M.)లఘుతమాపవర్త్యమును కనిష్ఠసామాన్యగుణజ మనుచున్నారు. ఈ లఘుతమాపవర్త్యమును గనుగొను పద్ధతిని భాస్కరుడు సూచించెను కమలాకరుడు (క్రీ॥శ॥1652)

చెప్పెను. ఇట్లు అనేకములు. భూగోలగ్రంథములందు ఆయా క్షితిజవృత్తము మొదలగునవి నూతనపదముల నందియున్నవి. పారిభాషికపదములను దేశమంతట నొకతీరుగ నుపయోగింపక ఎవరియిచ్చవచ్చినట్లు వారుపయోగించుట శాస్త్రము యొక్క నిమ్నస్థితియని నాతాత్పర్యము. భారతదేశమునందు శ్రీసుధాకరాదులు ఔత్తరీయులును, మహారాష్ట్రులును సంస్కృతభాషయందును దేశభాషలందును ఈశాస్త్రమునందు నవీనపద్ధతుల ననుసరించి బహుగ్రంథముల వ్రాసియుండిరి. వాటి ననుసరించి మనమును ప్రయోగించుట యుక్తము. మరియు నీ లీలావతి యందు మిశ్రవ్యవహారమున (289 పుట చూ) వ్యక్తిభేదములగూర్చి (Combination) గణితము గలదు. ఈగణితము నిపుడు అంకయోగమని కొందరు వాడుచున్నారు. ఈగణితస్వరూప మేమనగా య, క, గ, అను 3గ్గురు మనుష్యులు గలరనుకొందము. అందు ఒక్కొకరు వచ్చుచో మూడువిధములుగ రావచ్చును. ఇద్దరిద్దరువచ్చుచో యక, యగ, కగ, ఇట్లు మూడువిధములుగ రావచ్చును. ముగ్గురు వచ్చుట ఒకేవిధముగనగుచున్నది. ఇందు 'యకగ, యగక, కగయ, కయగ, గకయ, గయక,' ఇట్లు స్థానభేదముచేనైన సన్నివేశములు గణింపబడవు. అట్టి స్థానభేదసన్నివేశములు అంకపాశము (Permutation) లోనివి. ఇందు ముగ్గురును ఒకమారువచ్చుటయే గణింపదగినది గావున, ముగ్గురును ఒక్కచోటనుండుటచే నగువ్యక్తిభేద మొకటియే యగును. అట్లు రెండిటిచేతనగుభేదములును గ్రహింపదగినవి. ఈగణితమునుగూర్చి ప్రస్తావించునపుడు మ.మ.పం. సుధాకరాదులు "ఏకద్విత్ర్యాది భేదానయనము" అని ప్రాయికముగ వాడియున్నారు. భాస్కరాచార్యులును ఏకద్విత్ర్యాదిభేదపదము నుపయోగించెను. కాని వాసనాభాష్యమందు "వ్యక్తిమితిజ్ఞానం" అనియు

ప్రశ్నమునందు "గణక కతి వద వ్యంజనే వ్యక్తిభేదాః"

"పాదే వ్యక్తయః కతి" అనియు నుపయోగించెను.

ఇట్లు అన్నివిధములగు భేదములయొక్కయు మొత్తము వ్యక్తిమితిపదముచే చెప్పబడినది. అంకపాశప్రకరణమున

"నవాన్వితస్థానకసంఖ్యకాయా ఊనేంకయోగే కథితం" అని

ఒక్కొక ప్రస్తారమందైన అంకెలయొక్క మొత్తమును అంకయోగపదముచే చెప్పియున్నాడు. యోగశబ్దము సంకలనవాచకముగ బహుప్రచారములోనున్నది.

కావున దీనికి అంకయోగపదమును వాడుట అసమంజసముగ తోచుచున్నది. ఇట్లు నూతనపద ప్రయోగమునుచేయుచో శాస్త్రము అర్థజ్ఞానములేక అవ్యవస్థిత మగును. ఇట్టి అవ్యవస్థ మన ఆంధ్రభాషకు గలుగుచున్నది. ఐనను నాశక్తికొలది పూర్వాచార్య సమ్మతమగునట్టి పారిభాషికపదముల నుపయోగించు ప్రయత్నముతో, నేనీగ్రంథమును వ్రాసినాడను. ఇట్లు కొన్ని జ్యోతిశ్శాస్త్రమును గణిత శాస్త్రమును సంబంధించిన పుస్తకములను ముందుముందు ప్రకటింపతలంపుగలదు. నాకీపుస్తకమును వ్రాయునపుడు సహాయపడిన వ్యక్తగణితగ్రంథములు :—

(1) వ్యక్తగణితము 1, 2 భాగములు (హిందీ) మ.మ.పం. బాపుదేవశాస్త్రి గారిది. దీనినుండియే సంగ్రహించి పూర్వార్థమందు చాలవిషయములను (ఆపన్నమానాదులను) వ్రాసితిని.

(2) లీలావతీ టిప్పణము (సంస్కృతము) మ.మ.పం.బాపుదేవశాస్త్రిగారు

(3) లీలావతీ టిప్పణము (సం) మ.మ.పం. సుధాకరద్వివేదిగారు

(4) లీలావతీవ్యాఖ్య (సం) పం. దుర్గాప్రసాద ద్వివేది

(5) లీలావతీ వ్యక్తవాసన (సం) పం. చంద్రశేఖరఝా

(6) లీలావతీ నవీనవాసన (సం) పం. మురలీధర ఠక్కుర

(7) లీలావతీ హిందీటీక (బొంబాయి వేంకటేశ్వరప్రెస్)

(8) లీలావతి (వావిళ్ళవారిది) తడకమళ్ల వెంకటకృష్ణరాయాంధ్రీకరణ వివరణములతోడను మహీధరాచార్య వ్యాఖ్యతోడను గూడినది (1863 సం॥ ముద్రితము) మొదలగునవి.

2, 3 పుస్తకములనుండి యుపపత్తిప్రకారములు విశేషముగ గ్రహింపబడినవి.

నాస్వల్పజ్ఞానముచేతను, వ్రాయునప్పటి భ్రాంతిచేతను, ముద్రణాసమయమునందలి ప్రమాదములచేతను ప్రమాదములుండవచ్చును. నాశక్తికొలది పరిశీలించి, నామనోదృష్టులకు గోచరించినంతవరకు తప్పొప్పులపట్టికలో చేర్చుచున్నాను. ఇందలి తప్పులను సైరించి, ఒప్పులను గ్రహింపగోరుచున్నాను.

ఈపుస్తకమును శ్రమకోర్చి తగునట్లుముద్రించిన శ్రీవిద్యాముద్రాక్షరశాల వారు ఎంతయు ప్రశంసాపాత్రులు.

ఇట్లు సద్బుధవిధేయుడు,

పిడపర్తి కృష్ణమూర్తిశాస్త్రి.

TECHNICAL WORDS.

పారిభాషికపదములు.

అధికకోణము=Obtuse angle.
అపవర్తనము=Reduction to lower terms.
అల్పకోణము=Acute angle.
అవర్గరాశి=Irrational number.
అంకపాశము=Permutation.
అంకయోగము=Sum of numbers
అంశము=Numerator, Degree.
అర్ధవృత్తము=Semi-circle.
ఆది=The first term of a series. (ముఖము, వక్త్రము)
ఆయతము=Oblong.
ఆధారము, భూమి=Base.
ఆసన్నమానము=Convergent of a continued fraction.
ఆసన్నమూలము, నికటమూలము } = Root of an irrational number.
ఆవర్తనము, పరివర్తి } = Recurring number.
ఆవర్తదశాంశము=Recurring decimal.
ఇచ్ఛాధనము=Amount required.
ఇచ్ఛాఫలము=Fourth term of a Proportion.
ఉపపత్తి=Proof.
ఋణ=Minus.
ఏకాదిచయాంకఘాతము=Factorial.
కర్ణము=Hypotenuse, diagonal.
కేంద్రము=Centre.
కోణము=Angle.
కోటి=The adjacent side.
కోజ్యా=Cosine.
కోష్ఠము=Bracket.
క్రాంతివృత్తము=Ecliptic.
ఖాతము=Pit
క్షేత్రఫలము=Area.
గచ్ఛ=Number of terms of a series.
గుణకము=Multiplier.
గుణనము=Multiplication.
గుణ్యము=Multiplicand.
గుణోత్తరశ్రేఢి=Geometric-Progression.
గోలము=Sphere.
గోలపృష్ఠము=Surface of the sphere.
ఘనము=Cube.
ఘనఫలము=Volume.
ఘనమూలము=Cube root.
ఘనవర్గము=The square of a cube.
ఘాతము=Product.
ఘాతమాపక=Index, Exponent.
ఘాతక్రియ=Involution.
చతుర్భుజ=Quadrilateral.
చయము=Common difference. (వృద్ధి) in an A. P.
చాపము=Arc. (ధనుస్సు)
చాంద్రదినములు=Lunar days.
ఛాయ=Shadow.
ఛేదము=Denominator.
జాత్యము=Right triangle.
తష్టము=Excess of a continued fraction over any one of its convergents.
త్రిఘాతము=Third power.
త్రిభుజము=Triangle.
దశాంశగణితము=Arithmetic of Decimals.
ధరాతలము=Plane surface.
ధన=Plus.
దృఢము=Fraction expressed in its lowest terms.
ద్యుగణము, అహర్గణము=Number of days.
న్యాసము=Working.
నిరగ్రమూలము=Root of a rational number.
నిష్పత్తి, అనుపాతము, సంబంధము, వారసంఖ్య } = Ratio.
పరిధి=Circumference.
పూర్ణజ్యా=Chord.
పృష్ఠఫలము=Area of the surface
ప్రక్షేపకము=Share of a partner in the capital invested.
ప్రభాగము=Fraction of a fraction.
ప్రమాణరాశి=First term of a Proportion
ప్రస్తారము=Arrangement.
బిందువు=Point.
భాగాపవాహము=Mixed fraction
భాజకము=Divisor.
భాజ్యము=Dividend.
భేదయోగము=Sum of differences
మూలము=Root.
మహత్తమాపవర్తనము=Greatest common Measure.
మిశ్రధనము=Amount.
మూలమాపకము=Fractional Index.
మూలక్రియ=Evolution.
యోగము=Sum.
ఋజువు=Verification.
రాశి=Sign of the zodiac.
లఘుతమాపవర్త్యము=Least common Multiple.
లవము=Numerator.
లంబము=Perpendicular.
వర్గకర్మ=Operation of squaring.
వర్గము=Square.
వర్గమూలము=Square root.
వర్గఘనము=Cube of a square.
వృత్తము=Circle.
వృత్తాంతర్గతచతుర్భుజము=Cyclic quadrilateral.
వ్యాసము=Diameter.
వ్యాసార్ధము, త్రిజ్య=Radius.
వ్యస్తవిధి=Inversion.
వ్యస్తత్రైరాశికము=Inverse proportion.
వర్గక్షేత్రము=Square area.
వియోజ్యము=Minuend.
వియోజకము=Subtrahend.
విషమీకరణము=Inequality.
వేధ=Height or depth.
వ్యక్తిభేదములు=Selections or combinations.
శరము, ఉత్క్రమజ్య=Versine.
శీర్షకోణము=Veritical angle.

శంకు=Gnomon.
శ్రేఢి=Series.
సమకోణము=Right angle.
సరళరేఖ=Straight line.
సమభుజచతుర్భుజము=Rhombus.
సాధరణాపవర్తనము=Common-Measure
సావనదినములు=Civil days.
సంకలిత=Added.
సంకలితైక్యము=Sum of series of-groups of natural numbers.
సంఖ్యావిభేదములు=Differrent-arrangements.
సూక్ష్మఫలము=Correct Value.
సూచీశంకు=Cone.
సూచీఖాతము=Conical pit.
సౌరదినములు=Solar days.
సూక్ష్మభిన్నము=Proper fraction
స్థూలఫలము=Approximate value
స్థూలభిన్నము=Improper fraction

శ్రీరస్తు—శ్రీరామాయనమః

లీలావతీగణితము.

ప్రీతిం భక్తజనస్య యో జనయతే విఘ్నం వినిఘ్నన్ స్మృత।
స్తం బృందారకబృందవందితపదం నత్వా మతంగాననమ్॥
పాటీం సద్గణితస్య వచ్మి చతురప్రీతిప్రదాం ప్రస్ఫుటాం।
సంక్షిప్తాక్షరకోమలామలపదై ర్లాలిత్యలీలావతీమ్॥ ౧॥

ఆంధ్రవ్యాఖ్యానము.

ధ్యాయే త దద్భుతం తేజో గజవక్త్రం చతుర్భుజం।
యస్య స్మృత్యా సిద్ధసాధ్యా వాగీశాద్యా అపి స్వయం॥ ౧॥

యత్పాదపోత మాశ్రిత్య తరం త్యపి భవార్ణవం ।
శ్రీ రామం తం భక్తసక్తం సీతయా సహితం భజే॥ ౨॥

దర్భాన్వయాబ్ధిశశినం సత్సాహిత్యామృతప్రదం।
బైరాగిశాస్త్రిణం వందే స్మద్గురుం శ్రీశుకోపమమ్॥ ౩॥

మహామహోపాధ్యాయం శ్రీరఘూపాఖ్యమురలీధరం।
తం వందే స్మద్గురుం జ్యోతిషాబ్ధిపారం గతో యతః॥ ౪॥

పూర్ణార్య మద్వితీయం శేషాచలదైవవిద్ద్వితీయసుతం।
పితరం గురుం చ వందే యే నాస్మి న్నః కృతో బోధః॥ ౫॥

పిడపర్తి శ్రీకృష్ణమూర్తి శాస్త్రీ కౌండిన్యగోత్రజః।
లీలావత్యాఖ్యగణితటీకా మాంధ్రీం కరో మ్యహం॥ ౬॥

టీ॥ యః = ఏవిఘ్నేశ్వరుడు, స్మృతః = స్మరింపబడినవాడై, విఘ్నం = విఘ్నము(ల)ను, వినిఘ్నన్ = కొట్టువాడై, భక్తజనస్య = భక్తజనమునకు,

ప్రీతిం = సంతసమును, జనయతే = కలుగజేయుచున్నాడో, తం = అట్టి, బృందారకబృందవందితపదం = దేవతలయొక్క సమూహముచే నమస్కరింపబడిన పాదములుగల, మతంగాననమ్ = గజాననుడగు విఘ్నేశ్వరుని, నత్వా = నమస్కరించి, చతురప్రీతిప్రదాం = నిపుణులకు సంతసమునిచ్చునదియు, ప్రస్ఫుటాం = స్ఫుటమైనదియు (సుబోధమైనదియని తా.) లాలిత్యలీలావతీం = సౌకుమార్యము యొక్క పరికాశము గలదియు నగు (లలితః సుందరః తస్య భావః లాలిత్యం లాలిత్యస్య లీలాః విలాసాః అస్యా స్సన్తీతి) సద్గణితస్యపాటీం = గణితము యొక్క పద్ధతిని (పాటీగణితమును) సంక్షిప్తాక్షరకోమలామలపదైః = సంక్షిప్తములగు (కుదింపబడిన) అక్షరములు గలవియును మృదులములును దోషరహితములు నగు పదములచే (తక్కువ యక్షరములుగలిగి శ్రవణమధురములై శబ్ద శాస్త్రాది శాస్త్ర విరుద్ధ దోషములు లేని పదములచే నని తా.) వచ్మి = చెప్పుచున్నాను.

'లాలిత్య లీలావతీం' లాలిత్యముతోగూడిన లీలావతిని అనియు జెప్ప వచ్చును. ఈగణితమునకు లీలావతి యని నామము. ఇందు అంకములచే గణితము చెప్పబడెను. ఈయంకగణితమును వ్యక్తగణిత మనియు పాటీగణిత మనియు ప్రాచీనులు వ్యవహరించిరి వ్యక్తము = ప్రకటితము, పాటి = పద్ధతి. ఇందు ఉదాహరణములం దచటచట లీలావతిం గూర్చి సంబోధనము గలదు. కావున 'లీలావతిని లాలనచేసి' యని చెప్పుట సమంజసముగా నుండెడిది కాని 'లాలిత్య' అను రూపము యుక్తము గాదు. మహాకవిప్రయోగ మగుట పరిగ్రాహ్యమగుచో సమంజసముగ నుండును.

వివిధమానములు.

లోకవ్యవహారముకై కల్పింపబడిన మానములు దేశకాలముల బట్టి మార్పు జెందుచున్నవి. భాస్కరాచార్యులవారు తమకాలమునందు ప్రసిద్ధములగు ధనాది మానముల బేర్కొని యున్నారు. ఉదాహరణములందును ఆమానముల ననుసరించియే గణితము చూపబడినది. అట్టి యుదాహరణములంబట్టియే ప్రకృ

తమానములందును గణితము నెరుంగవచ్చును. ఐనను బాలబోధకొరకు ప్రకృతపు మానములబట్టియు కొంచెముగ ఉదాహరణ మియ్యబడును.

ధనమానము.

వరాటకానాం దశకద్వయం యత్సా కాకిణీ తాశ్చ పణశ్చతస్రః।
తేషోడశ ద్రమ్మ ఇహావగమ్యో ద్రమ్మైస్తథా షోడశభిశ్చనిష్కః॥౨॥

తా॥ 20 గవ్వలు	1 కాకిణి	16 పణములు	1 ద్రమ్మము
4 కాకిణులు	1 పణము	16 ద్రమ్మములు	1 నిష్కము

తులా (తూనిక) మానము

సువర్ణాదుల తూనిక

తుల్యా యవాభ్యాం కథితాత్ర గుంజా వల్లస్త్రిగుంజో ధరణంచ తేష్టౌ।గద్యాణక స్తద్వయ మింద్రతుల్యై ర్వల్లై స్తథైకో ధటకః ప్రదిష్టః॥ 3॥
దశార్ధగుంజం ప్రవదన్తి మాషం మాషాహ్వయై ష్షోడశభి శ్చ కర్షం।
కర్షై శ్చతుర్భి శ్చ పలం తులాజ్ఞాః కర్షం సువర్ణస్య సువర్ణసంజ్ఞం॥౪॥

(యవ = ధాన్యవిశేషము. గుంజ = గురువిందపూస. యవ 1 టికి సామాన్యధాన్యము గింజలు 2 అగును.)

2 యవలు	1 గుంజ	5 గుంజలు	1 మాషము
3 గుంజలు	1 వల్లము	16 మాషములు	1 కర్షము
8 వల్లములు	1 ధరణము	4 కర్షములు	1 పలము
2 ధరణములు	1 గద్యాణకము	కర్షమెత్తు బంగారము సువర్ణ మనియు	
14 వల్లములు	1 ధటకము	జెప్పబడును.	

ఇందు 1 కర్షమునకు 80 గుంజలు అగుచున్నవి. ప్రస్తుతము 80 గుంజలు 1 కాసు అని వ్యవహరింపబడుచున్నది. కావున నిపుడు కాసుగా వ్యవహరింపబడునదియే పూర్వము కర్షమని వ్యవహరింపబడుచుండెడిని అని తోచుచున్నది.

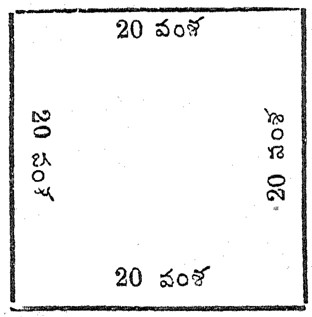
భూమిమానము.

యవోదరై రంగుళ మష్టసంఖ్యై ర్హస్తోంగులై ష్షడ్గుణితై శ్చతుర్భిః।
హస్తై శ్చతుర్భి ర్భవతీహ దండః క్రోశ స్సహస్రద్వితయేన తేషాం॥ ౫॥
స్యా ద్యోజనం క్రోశచతుష్టయేన తథా కరాణాం దశకేన వంశః।
నివర్తనం వింశతివంశసంఖ్యైః క్షేత్రం చతుర్భి శ్చ భుజై ర్నిబద్ధం॥ ౬॥

తా॥ యవధాన్యపుగింజలను ఒకదాని పొట్టకు మరియొకదాని పొట్ట తగులునట్లు (అడ్డముగా) ఎనిమిదింటి నుంచగా వాటిచే నెంతప్రదేశ మాక్రమింపబడునో ఆప్రదేశము అంగుళమగును.

8 యవోదరములు	1 అంగుళము	2000 దండములు	1 క్రోశము
24 అంగుళములు	1 హస్తము	4 క్రోశములు	1 యోజనము
4 హస్తములు	1 దండము	10 హస్తములు	1 వంశము

20 వంశములు మితిగల 4 భుజములచే నిర్మింపబడిన క్షేత్రము నివర్తనము. 20 వంశములు పొడవును అంతియ వెడలుపును గల సమచతుర (సమకర్ణ) మగు భూమికి నివర్తన మనిపేరు



ఇట్టి క్షేత్రము నివర్తనము

నివర్తన క్షేత్రమునందు పొడవు 200 హస్తములు. వెడలుపు 200 హస్తములు.

హస్తోన్మితై ర్విస్తృతి దైర్ఘ్య పిండై ర్య ద్ద్వాదశాస్రం ఘనహస్త సంజ్ఞం॥

వెడలుపు 1 హస్తము. పొడవు 1 హస్తము. పిండము (దళసరి) 1 హస్తము. గలిగి 12 అంచులు గలిగిన పదార్థము ఘనహస్త మని చెప్పబడుచున్నది. పొడవు, వెడలుపు, ఎత్తు వీటియందు అన్నిటియందును సమపరిమాణము గల వస్తువు ఘనపదార్థ మని చెప్పబడును. ఘనాంగుళము, ఘనగజము మొదలగునవి.

ధాన్యాదికే య ద్ఘనహస్తమానం శాస్త్రోదితా మాగధఖారికా సా॥ ౭॥
ద్రోణ స్తు ఖార్యాః ఖలు షోడశాంశ స్స్యా దాఢకో ద్రోణచతుర్థ భాగః। ప్రస్థ శ్చతుర్థాంశ ఇ హాఢకస్య ప్రస్థాంఘ్రి రాద్యైః కుడవః ప్రదిష్టః॥ ౮॥

తా॥ ధాన్యాదులపట్ల నెద్ది ఘనహస్తపరిమిత పరిమాణముగలదియో నది మగధదేశమునందు 'ఖారి' యని జెప్పబడును. 1 హస్తము వెడలుపు, అంతియ పొడవు, ఎత్తును గల కఱ్ఱ మొదలగువాటిచే చేయబడిన పెట్టెవంటి ఒక పదార్థమునందు పోయదగిన ధాన్యాదులను మగధదేశమానముచే 'ఖారి' యందురు.

1 'ఖారి' కి ఘనాంగుళములు $24 \times 24 \times 24 = 13824$.

1 ఖారి (ఖారిక)లో	16 వ వస్తు	1 ద్రోణము =	ఘనాంగుళములు	864
1 ద్రోణములో	4 వ వస్తు	1 ఆఢకము =	,,	216
1 ఆఢకములో	4 వ వస్తు	1 ప్రస్థము =	,,	54
1 ప్రస్థములో	4 వ వస్తు	1 కుడపము =	,,	13న్నర

4 కుడపములు	1 ప్రస్థము	4 ఆఢకములు	1 ద్రోణము
4 ప్రస్థములు	1 ఆఢకము	16 ద్రోణములు	1 ఖారిక

శేషాః కాలాదిపరిభాషా లోకతః ప్రసిద్ధా జ్ఞేయాః

ఇతి పరిభాషా

తక్కిన కాలాదిపరిభాషలు లోకప్రసిద్ధినిబట్టి తెలియదగినవి.

60 విఘటికలు	1 ఘటిక	60 సెకండులు	1 నిమిషము
60 ఘటికలు	1 దినము	60 నిమిషములు	1 గంట
30 దినములు	1 మాసము	24 గంటలు	1 దినము
12 మాసములు	1 సంవత్సరము	$2\frac{1}{2}$ ఘటికలు	1 గంట

2 మాసములు 1 ఋతువు. 3 ఋతువులు 1 అయనము. 2 అయనములు 1 సంవత్సరము. ఇది సామాన్యకాలమానము.

ప్రకృతము రాజమహేంద్రవరప్రాంతమున వ్యవహరింపబడుచున్న ధనాది మానములు.

3 పైసలు	1 కాని	16 అణాలు	1 రూపాయి
12 పైసలు	1 అణా	4 రూపాయిలు	1 వరహా
2 అణాలు	1 బేడ	ఇంచుమించుగ 1 వరహా 1 నిష్కముతో	
4 అణాలు	1 పావులా	సరిపడవచ్చును.	

ఇప్పటికిని ప్రాచీనులు కానులను సంస్కృతభాషతో పణ మని వ్యవహరించుచున్నారు.

స్వర్ణాది తులామానము.

4 ధాన్యపుగింజలు	1 గుంజ	30 చిన్నములు	1 తులము
4 గుంజలు	1 చిన్నము	20 చిన్నములు	1 కాసు (ఇంచుమించు)
2 గుంజలు	1 అడ్డిగ	1 తులమెత్తుగల వెండినాణెము	1 రూపాయి

1 ధాన్యపుగింజ వీస మని చెప్పబడును.

శాకాదిపదార్థముల తులామానము.

3 తులములు	1 ఫలము	40 తులములు	1 పౌను
8 ఫలములు	1 కచ్చాసేరు	3 పౌనులు	1 వీశె
5 కచ్చాసేరులు	1 వీశె	8 వీశెలు	1 మణుగు
80 తులములు	1 పెద్దసేరు	20 మణుగులు	1 పుట్టి

భూమి మానము.

12 అంగుళములు	1 అడుగు	10 గొలుసులు	1 ఫర్లాంగు
3 అడుగులు	1 గజము	8 ఫర్లాంగులు	1 మైలు
22 గజములు	1 గొలుసు	1 గొలుసు పొడవును అంతియ వెడల్పును	
100 లింకులు	1 గొలుసు	గల ప్రదేశము (భూమి) 1 కుంచము	

అని చెప్పబడుచున్నది.

అనగా 1000 చతురపులింకులు గల ప్రదేశము 1 సెంటు. 10 సెంట్లు 1 కుంచము. 10 కుంచములు 100 సెంట్లు లేక 1 ఎకరము.

ధాన్యమానము.

4 సేర్లు	1 కుంచము	3 పుట్లు	1 గరిశె
200 కుంచములు	1 పుట్టి	600 కుంచములు	1 గరిశె

ద్రవద్రవ్యమానము.

80 తులముల పెద్దసేరు తూనిక గల తైలాది ద్రవద్రవ్యము 1 సేరు అగును.

1 సేరునకు	2 తవ్వలు	1 అరసోలకు	2 గిద్దలు
1 తవ్వకు	2 సోలలు	1 గిద్దకు	2 అరగిద్దలు
1 సోలకు	2 అరసోలలు		

ధాన్యాదుల కొలతయందును ఈమాన ముపయోగింపబడుచున్నది. ఇట్లు ఆయా మానవిశేషములు వ్యవహారముచే తెలుసుకొనదగియున్నవి.

లీలా గల లుల ల్లోల కాల వ్యాల విలాసినే।
గణేశాయ నమో నీల కమ లామల కాంతయే॥ ౯॥

లీలా...... ...విలాసినే, లీలా = విలాసముచే, గల = కంఠమునందు లులత్ = వ్రేలుచున్నట్టియు, లోల = చలించుచున్నట్టియు, కాల = నల్లని వ్యాల = సర్పములచే, విలాసినే = క్రీడ (ఆట) గలిగిన (లేక శోభగలిగిన

ట్టియు, నీల కమలామలకాంతయే = నల్లని పద్మమువలె నిర్మలమగు కాంతిగల, గణేశాయ = గణాధిపతికొఱకు, నమః = నమస్కారము.

(నల్లనిపద్మము కవిసమయ ప్రసిద్ధము)

సంఖ్యానీకము.

ఇందు సంఖ్యోత్పత్తి, సంఖ్యాలేఖనము, సంఖ్యాపఠనము సంగ్రహముగ వివరింపబడుచున్నవి.

సంఖ్యోత్పత్తి.

1. పరిక్రమము: ఏపదార్థము తదితర పదార్థ సంబంధములేక యుపయోగింపబడుచున్నదో ఆపదార్థము 'ఒక' (ఏక) అను విశేషణమునకు తగుచున్నది. ఉదా:—ఒకమనుష్యుడు ఇత్యాది......ఆపదార్థమునందలి ఏకత్వరూపధర్మమునకును ఒక అను విశేషణముపయోగింపవచ్చును.

2. ప. ఒకటియు, వీటి సముదాయమున్ను సంఖ్య అని చెప్పబడును. ఎట్లన:—ఒకటి, ఇందు మరియు నొకటి జేర్ప రెండు. ఇందు మరియు నొకటి జేర్ప మూడు. ఇట్లు నాలుగు, ఐదు మొదలగునవి సంఖ్యలు అని చెప్పబడును.

3 ప. సంఖ్యలను లెక్కించుటకై తొలుత అన్నిసంఖ్యలకు వేర్వేరుగ సంజ్ఞలను లిపియందు వ్రాయుటకు ఆసంఖ్యలను బోధించు చిహ్న(అంక)ములను కల్పించి ఆఅంకముల ద్వారమున సంఖ్యలను బోధించుట ఆవశ్యకము. అట్టి అంకములు లేనిచో లెక్కించుటచే లోకవ్యవహారము శక్యము గాదు. కాని ప్రతిసంఖ్యకును వేర్వేరుగ సంజ్ఞలను అంకము (అంకె)లను గల్పించునో అనంత సంజ్ఞలును అనంతములగు నంకెలును అగుటచే గణితసిద్ధి అసంభవము. కావున మన ప్రాచీనులు సంఖ్యలయొక్క సంజ్ఞలను (అంకెలను)సులభపద్ధతి గా గల్పించిరి. ఎట్లనగా—ప్రథమసంఖ్య ఒకటి. ఇందు తిరుగ తిరుగ నొక్కొక్కటి జేర్చుచు రాగా నగు సంఖ్యలు క్రమముగా రెండు, మూడు, నాలుగు, ఐదు, ఆరు, ఏడు, ఎనిమిది, తొమ్మిది, పది. ఇట్లు పదివరకు వేర్వేరుగ సంజ్ఞల నిడిరి. (సంస్కృ

తములో ఏక, ద్వి, త్రి, చతుర్, పంచ, షట్, సప్తన్, అష్టన్, నవన్, దశన్) ఈ సంజ్ఞలచేతనే సర్వసంఖ్యలకును సంజ్ఞలు సిద్ధించుచున్నవి.

ఎట్లనగా—పదియందు నొకటిని చేర్ప పదియునొకటి = పదునొకండు.
రెండును చేర్ప పదియురెండు = పండ్రెండు... ... ...

ఇట్లు పదియందు పదిని జేర్ప ఇరువది = ఇరుపదులు = రెండుపదులు.

అటనుండి ఇరువదియొకటి, ఇరువదిరెండు ... ముప్పది = మూడుపదులు,

ముప్పదియొకటి, ముప్పదిరెండు ... ... నలువది.

ఇట్లు ఏబది, అరువది, డెబ్బది, ఎనుబది, తొంబది, నూరు.

ఇట్లు పదియందు తొమ్మిది పర్యాయములు పదిని జేర్ప నగు సంఖ్యకు 'నూరు' అని సంజ్ఞ. అనగా పదిసంఖ్యగల వస్తుసమూహముల పదింటి నొకచో జేర్చుటయే పదియందు తొమ్మిది పర్యాయములు పదిని జేర్చుట యగును. కావున పదిసార్లు ఆవృత్తి చేయబడిన పది (ఆవృత్తి=గుణనము) పదిచే గుణింపబడిన పది 'నూరు' (శతము) అని చెప్పబడును. ఇట్లు నూటియందు తొమ్మిదిసార్లు నూటిని జేర్పనగుసంఖ్య పదిచే గుణింపబడిన నూరు (దశగుణితశతము) వేయి (సహస్రము) అగును. ఇట్లు కొంతవరకును క్రమముగ దశగుణితసంఖ్యలకు సంజ్ఞలు చేయబడినవి. మధ్యమధ్యయందలి సంఖ్యలు ఆసంఖ్యలయందు ఏయేసంజ్ఞగల సంఖ్యాఖండములు గలవో వాటిచే నుచ్చరింపబడుచున్నవి. నూటికిని వేయికిని మధ్యయందు గల సంఖ్యలు. నూటిలో పదిని జేర్ప నూటపది. ఇరువదిని జేర్ప నూటయిరువది. ఇట్లు వ్యవహరింపబడుచున్నవి. ఇట్లు సర్వసంఖ్యావ్యవహారమున్ను సుగమమగు నొకమార్గముచే చేయబడెను.

ఇట్లు అంకములచే సంఖ్యాబోధయగుటకై తొమ్మిదియంకెలు కల్పింపబడినవి. సంఖ్యలయొక్క అభావము (లేకపోవుట)ను సూచించుటకుశూన్యము (సున్న) కల్పింపబడెను. వీటిచే సర్వసంఖ్యా వ్యవహారమున్ను సిద్ధించుచున్నది.

ఒక అడ్డముగానైన పంక్తియందు అంకములను లిఖింప ఆపంక్తియందు కుడివైపున నున్న తుదయంకె మొదలు ఎడమవైపునకు గల యంకెలు క్రమముగ

స్థానభేదములను బోధించునవిగను, ఒకటవ సంఖ్య ఏకస్థానమును రెండవసంఖ్య దశస్థానమును మూడవసంఖ్య శతస్థానమును ఇట్లు వామక్రమముగ నుత్తరోత్తర దశగుణ సంఖ్యా స్థానములను బోధించునవిగను సంకేతింపబడెను. ఇట్టి యనాది సంకేతముచే పదియంకెలచేతనే (సున్నతో నంకెలు పదియగును) స్థానాంకములకు గల పరస్పరసంబంధమునుబట్టి సర్వసంఖ్యలును అతిలాఘవముగ బోధింపబడుచుండెను.

సంఖ్యాలేఖనము — సంఖ్యాపఠనము.

4 ప్ర. అట్లు కల్పింపబడిన పదియంకెలచే సర్వసంఖ్యా వ్యవహారము చూపింపబడుచున్నది.

ఒకటి, రెండు, మూడు, నాలుగు, ఐదు, ఆరు, ఏడు, ఎనిమిది, తొమ్మిది.

అంకెలు	౧	౨	౩	౪	౫	౬	౭	౮	౯
అంకెలు	1	2	3	4	5	6	7	8	9

౦ ఇది శూన్యము (సున్న) ఇది అభావము (లేకపోవుట)ను సూచించును. పై పంక్తియందు తెలుగంకెలును క్రిందిపంక్తియందు ఆంగ్లాంకములును చూపబడినవి. ప్రస్తుతము మనదేశమునందు తెలుగంకెల నెరింగినవారరుదు అగుటచే నిందు ఆంగ్లాంకములచేతనే గణితోదాహరణము చూపబడినది. కావున రెండువిధములగు నంకెలును ఇయ్యబడినవి.

ఈ అంకములు మాత్రమే వ్రాయబడుచో నాయాసంఖ్యలనే బోధించును గాని ఏయంకమునకైనను కుడివైపున నంకములు గలిగినచో ననగా తాను ఇతరాంకములయొక్క ఎడమవైపున నున్నచో పూర్వ (3) ప్రకరణానుసారముగా నే స్థానమున నున్నదో ఆస్థానముచే బోధింపబడు సంఖ్యల నన్నిటిని బోధించును.

‘6’ ఇది ఆరుసంఖ్యనే బోధించును 64 ఇచట ‘4’ ఈయంకె నాలుగును బోధించును గాని ‘6’ ఈఅంకము మాత్రము రెండవ స్థానమున అనగా పదిస్థానమున గలదు గాన ఆరుపదులను (అరువదిని) బోధించును. కావున మొత్తముసంఖ్య అరువదినాలుగు అని తెలియదగియున్నది. ఇట్లు ఎన్నిస్థానములున్నను స్థానభేదముల నెరింగినచో నాసంఖ్య సుగమముగ తెలియబడును. దీనింబట్టియే ఏస్థానమున శూన్యము గలదో ఆస్థానముచే బోధింపబడు సంఖ్య శూన్యమని తెలియవలయును

‘10’ ఇచట ఏకస్థానమున శూన్యము దశస్థానమున ఒకటియు గలదు గావున ఒకపదిమాత్రమే దీనిచే బోధింపబడుచున్నది. ఇట్లు పది, నూరు, మొదలగు దశగుణోత్తరసంఖ్యలను లిఖించునపుడు ఆయాస్థానములందు మాత్రము సంఖ్యనువ్రాసి అంతకు తక్కువస్థానములందు (కుడివైపున) సంఖ్యలు లేకపోవుటచే శూన్యములే వ్రాయబడుచున్నవి. కావున నిట్లెంతసంఖ్యను వ్రాయవలసినను చెప్పవలసినను స్థానములకు సంజ్ఞలు ఆవశ్యకములు కావున శ్రీభాస్కరాచార్యులు స్థానసంజ్ఞలను చెప్పుచున్నారు.

ఏక దశ శత సహస్రాయుత లక్ష ప్రయుత కోటయః క్రమశః।
అర్బుద మబ్జం ఖర్వ నిఖర్వ మహాపద్మ శంకవ స్తస్మాత్॥ ౧౦॥
జలధి శ్చాంత్యం మధ్యం పరార్ధ మితి దశగుణోత్తరా స్సంజ్ఞాః।
సంఖ్యాయాః స్థానానాం వ్యవహారార్థం కృతాః పూర్వైః॥ ౧౧॥

ప్రాచీనులచే సంఖ్యాలేఖనము సంఖ్యాపఠనము మొదలగు వ్యవహారము కొరకు ఏక, దశ, శత, సహస్ర, అయుత, లక్ష, ప్రయుత, కోటి, అర్బుద, అబ్జ, ఖర్వ, నిఖర్వ, మహాపద్మ, శంకు, జలధి, అన్త్య, మధ్య, పరార్ధ, అని సంఖ్యానీకముయొక్క ఏకాదిస్థానములకు దశగుణోత్తరము (ఒకదానికంటె మరియొకసంఖ్య పదిచే గుణింపబడినది) అగు సంజ్ఞలు చేయబడినవి.

5 ప్ర. 1 = ఏక = ఒకటి = తదితర పదార్థసంబంధములేనిది

10 = దశ = పది = పదిచే గుణింపబడిన యొకటి

100 = శత = నూరు (లేకవంద) = పదిచే గుణింపబడిన పది

1000 = సహస్ర = వేయి = పదిచే గుణింపబడిన శతము

10000 = అయుత = పదివేలు = దశగుణిత సహస్రము

100000 = లక్ష = దశగుణితమగు అయుతము. ఇట్లు

ప్రయుత = దశగుణితమగులక్ష = పదిలక్షలు

కోటి = దశగుణిత ప్రయుతము

అర్బుదము = దశగుణిత కోటి

అబ్జము = దశగుణితార్బుదము

ఇట్లు క్రమముగ దశగుణోత్తరములగు సంఖ్యలకు ఖర్వ, నిఖర్వ, మహాపద్మ, శంఖ, జలధి, అంత్య, మధ్య, పరార్ధ అను పదునేనిమిది స్థానసంకేతములు చేయబడినవి. ఇవి ఒకపంక్తియందు కుడివైపునుండి ఎడమవైపునకు ఒకటి మొదలు పదునేనిమిదివరకు వ్రాయబడిన యంకెలయొక్క స్థానములకు సంజ్ఞలగుచున్నవి. వీటివలన నెంతసంఖ్యలనైనను సుగమముగ వ్రాయుటయు (సంఖ్యాలేఖనము) చదువుటయు (సంఖ్యాపఠనము)ను చేయవచ్చును. ఎట్లనగా 3497 ఇచట కుడివైపునుండి క్రమముగా ఒకటవసంఖ్య ఏకస్థానమును, రెండవసంఖ్య దశస్థానమును, మూడవసంఖ్య శతస్థానమును నాలవసంఖ్య సహస్రస్థానమును తెలియజేయుచున్నవి. కావున పైస్థానకబోధక సంజ్ఞలను కంఠస్థము జేయవలయును. ఏస్థానము ఎన్నవది యైనదియు గుర్తుగ నుంచవలయును. దీనిని జదువునపుడు 3 సహస్రములు, 4 నూర్లు, 9 పదుల ఏడు = మూడువేల నాలుగు వందల తొంబది యేడు అనియు జదువవచ్చును.

ఇట్లు సంఖ్యానీకమును జదువుట స్థానసంజ్ఞలను కంఠస్థము చేయుటచే సుగమమగుచున్నది.

ఉదా:—6054302 ఈ సంఖ్యను జదువవలయును.

ఏకస్థానమునుండి ఎడమవైపున నేస్థానమున నేయంకె గలదో గుర్తింపవలయును. ఆ ప్రకారము జదువవలయును.

ఇచట ఏక	స్థానమున	రెండుగలదు.
,, దశ	,,	శూన్యము
,, శత	,,	మూడు
,, సహస్ర	,,	నాలుగు
ఇచట అయుత	స్థానమున	ఐదు
,, లక్ష	,,	శూన్యము
,, ప్రయుత	,,	ఆరు

కావున 6054302 ఈసంఖ్యను ఆరుప్రయుతముల ఐదుఅయుతముల నాలుగు సహస్రముల మూడుశతముల రెండు.

ఇట్లును జదువవచ్చును. అరువదిలక్షల యేబదినాలుగువేల మూడువందల రెండు.

ఇట్లు సంఖ్యానీకమును వ్రాయునపుడు ఏయేస్థానములందు ఏయేఅంకములు గలవో ఆయాస్థానములందు ఆయాఅంకములను అంకములులేని స్థానములందు శూన్యములను వ్రాయవలయును.

ఉదా:—ఎనిమిదిలక్షల మూడువందల ఆరు దీనిని వ్రాయుము.

లక్ష ఆరవస్థానమందలిది గాన ఈసంఖ్యానీకమునందు ఆరంకము లుండవలయునని తొలుత గుర్తించుకొనవలయును. ఆ స్థానమున 8 అంకెగలదు. అయుత సహస్ర స్థానములందు అంకములు చెప్పబడలేదు. శతస్థానమున 3 అంకెగలదు. దశస్థానమున అంకె జెప్పబడలేదు. ఏకస్థానమున 6 అంకె జెప్పబడెను. కావున ఎడమవైపునుండి అంకెలుగలస్థానములలో అంకెలను అంకెలు లేని స్థానములలో శూన్యములను నింపుము. ఇట్లు జేయగా 800306 ఇట్లు వ్రాయబడును.

ఇట్లు శీఘ్రముగ జదువుటయు వ్రాయుటయు "ఏక దశ శత..." ఇత్యాది శ్లోకద్వయము కంఠస్థమగుచో ఏస్థానమున నేయంకె గలదో బుద్ధికి స్ఫురించుటచే అభీష్టప్రకారము సుగమముగ జేయవచ్చును.

సంకేతములు.

6. ప్ర. సమస్తగణితమునకును సంకలనము, వ్యవకలనము, గుణనము, భాగహారము, వర్గక్రియ, వర్గమూలక్రియ, ఘనక్రియ, ఘనమూలక్రియ. అను నీపరికర్మాష్టకము ఆవశ్యకము. అందును సంకలనాది చతుష్టయము ముఖ్యావశ్యకము. వర్గ, వర్గమూల, ఘన, ఘనమూలములు గుణనభాగహారములకు రూపాంతరములు. గుణనభాగహారములు సంకలన వ్యవకలనముల రూపాంతరములు. చతుర్ఘాత పంచఘాతాదులును గలుగును గాని సామాన్యముగ వ్యక్తగణిత వ్యవహారములందు వాటికి విశేషోపయోగములేదు. కావున పరికర్మలు 8 అనియే జెప్పబడెను. ఆయా ప్రకరణములందాయా పరికర్మలు వివరింపబడును. ఆపరికర్మాష్టకములు క్రమముగ జెప్ప

బడును. తొలుత సంకలనాది పరికర్మభేద బోధకములై వ్రాయుటయందును, చదువుటయందును సౌకర్యమును గలుగజేయు సంకేతములు ప్రాచీన, నవీనపద్ధతుల ననుసరించి చూపబడుచున్నవి.

(1) + ఈసంకేతము లేక చిహ్నము (గుర్తు) సంకలనమును సూచించును. దీనికి ధనచిహ్నము అని పేరు. ఉదా:— $8 + 4$ ఇచట 8 దీనికిని 4 దీనికిని సంకలనము = యోగము = కలుపుట చేయవలయునని + ఈచిహ్నము బోధించుచున్నది. దీనిని చదువుటలో 8, ధన 4 అని చదువవలయును. దీని పరిమాణము 12 అగును.

(2) = ఈచిహ్నము దీనికి నిరువైపులనుండు రెండుపక్షములు సమములు అని బోధించును. అనేకపక్షములకు పరస్పరసామ్యమును చూపవలసినపుడు రెండు రెండు పక్షముల మధ్య నిది వ్రాయబడుచున్నది. దీనికి సమచిహ్నమని పేరు.

ఉదా :— $8 + 4 = 12$ దీనికి సమీకరణ మని పేరు 8 ని, 4 ను కలసినచో 12 అగును అని తెలియుచున్నది. 8, ధనము 4, సమము 12 అని జదువవలయును.

ఇట్లు $6 + 2 + 4 = 8 + 4 = 12$ ఇత్యాదికము తెలియదగినది.

(3) — ఈచిహ్నము వ్యవకలనమును సూచించును. దీనికి ఋణచిహ్న మని పేరు.

ఉదా:- $9 - 4$ ఇచట 9 లో 4 ను వ్యవకలింప (తీసివేయ) వలయునని సూచించుచున్నది. 9, ఋణ 4 అని జదువవలయును. దీనిపరిమాణము $9-4=5$ అగును.

(4) × ఇది గుణనమును సూచించును. దీనికి గుణచిహ్నము అని పేరు. ఉదా:— 2×3 ఇచట 2 ను 3 చే గుణింపవలయునని తెలియుచున్నది. ఇచట 2, గుణ 3 అని జదువవలయును. దీనియొక్క పరిమాణము $2 \times 3=6$ అగును.

(5) ÷ ఇది భాగహారమును సూచించును. భాగచిహ్నమని పేరు.

ఉదా:— $8 \div 4$ ఇది 8 ని 4 చే భాగింపవలయునని సూచించుచున్నది. 8, భాగ 4 అని జదువవలయును. ఇటఫలము 2 అగుచున్నది. అనగా $8 \div 4=2$ ఇచట $8 \div 4$ దీనినే $\frac{8}{4}$ ఇట్లును వ్రాయవచ్చును. 8 క్రింద 4 అనియు జదువవచ్చును. కావున $8 \div 4 = \frac{8}{4} = 2$ అగును.

(6) ఏసంఖ్యయొక్క శిరోభాగమున కుడివైపున 2 ఈయంకము వ్రాయబడునో ఆసంఖ్యను వర్గింపవలయునని తెలియవలయును. అనగా ఆసంఖ్యచే 1 టిని రెండుసార్లు గుణింపవలయును అని తెలియవలయును.

ఉదా:— 4^2 ఇచట 4 నకు వర్గము చేయవలయును. అనగా $1 \times 4 \times 4$ అని యర్థము. కావున ఈవర్గము ద్విఘాతమనియు జెప్పబడును. దీనిని 4వర్గము. అని జదువవలయును. ఇచట 2 దీనికి ఘాతమాపక మని పేరు. ఇట్లు శిరోభాగమున కుడివైపున వ్రాయబడిన సంఖ్యలకు ఘాతమాపకము లనిపేరు.

(7) $\sqrt{\ }$ ఇది వర్గమూలక్రియను సూచించును. వర్గమూలచిహ్నమని పేరు.

ఉదా:— $\sqrt{16}$ ఇది 16 నకు వర్గమూలము చేయవలయునని సూచించును. 16 వర్గమూలము అని జదువవలయును.

(8) ఘాతమాపకసంఖ్య 3 అయినచో 'ఘనము' అని చెప్పబడును. అనగా ఏసంఖ్యకు ఘాతమాపకాంకము 3 వ్రాయబడెనో ఆసంఖ్యకు ఘనము చేయవలయునని తెలియవలయును. అనగా 1 టిని ఆసంఖ్యచే మూడుసార్లుగుణింపవలయును. ఇట్లు ఘాతమాపకసంఖ్యనుబట్టి ఘాతపర్యాయములను గమనింపవలయును. ఘనము అనగా త్రిఘాతము. కావున $4^3 = 1 \times 4 \times 4 \times 4$ అగును. దీనిని ఇట్లును వ్రాయవచ్చును. $4^3 = 4 \times 4 \times 4$ ఇట్లు $4^4 = 4 \times 4 \times 4 \times 4$ అగును ఇట్లు ముందును గమనింపవలయును.

(9) $\sqrt[3]{\ }$ ఈ చిహ్నము ఘనమూలమును సూచించును.

$\sqrt[3]{27}$ ఇచట 27 నకు ఘనమూలము చేయవలయునని గ్రహింపవలయును. ఇట్లు వర్గమూలచిహ్నముయొక్క ఎడమునైపున చిహ్నగ్రోపరిభాగమున వ్రాయబడిన సంఖ్యనుబట్టి ఆయాఘాతమూలము జేయవలయునని గ్రహింపవలయును. $\sqrt[4]{16}$ ఇది చతుర్ఘాతమూలమును సూచించును.

(10) — ( ) { } [ ] ఈనాలుగుచిహ్నములును ప్రత్యేకతను సూచించును. అనగా చిహ్నాంతర్గతములగు ఒకటిగాని అనేకములుగాని అయిన సంఖ్యలను ఒకసంఖ్యగా భావింపవలయును. ఇందు మొదటిచిహ్నము — దీనికి శృంఖల మని పేరు. రెండవది ( ) ఇది కుండలకోష్ఠము. 3 వది { } ధనుఃకోష్ఠము. నాలవది [ ] మహాకోష్ఠము సామాన్యముగ నాలుగును కోష్ఠమనియు జెప్పబడును.

ఉదా: $\overline{3+4}-\overline{2+3}$ లేక $(3+4)-(2+3)$ లేక $\{3+4\}-\{2+3\}$ లేక $[3+4]-[2+3]$ ఈనాలుగుకోష్ఠములందును 3యొక్కయు 4యొక్కయు యోగమువలన 2యొక్కయు 3యొక్కయు యోగమును వ్యవకలింపవలయునని తెలియుచున్నది. అనగా $3+4=7$ $2+3=5$ కావున $(3+4)-(2+3)=7-5=2$. ఇట్లు కోష్ఠమధ్యగతసంఖ్యలకు చిహ్నలను బట్టి సంకలనాదికమును చేసి పిమ్మట కోష్ఠమునకు వెలుపటనున్న చిహ్నములబట్టి గణితము చేయవలయును.

$$3\times\left[\left\{\overline{5+4}\times\overline{3+2}\right\}\div\left\{\left(\overline{3+1}-\overline{3-1}\right)+3\right\}\right]+2$$

ఇచట తొలుత సర్వాంతర్గతమగు శృంఖలాకోష్ఠసంఖ్యల గణితము చేసి పిమ్మట దానికి వెలుపలనున్న కుండలకోష్ఠగణితమును పిమ్మట ధనుఃకోష్ఠాంతర్గతగణితములను వేరగచేసి వాటిమధ్యనుగల చిహ్ననుబట్టియు గణితమును జేసి ఆఫలమును 3 చే గుణించి అందు 2 ను గలుపవలయును. అని తెలియుదగియున్నది.

కావున $3\times\left[\left\{\overline{5+4}\times\overline{3+2}\right\}\div\left(\overline{3+1}-\overline{3-1}\right)+3\right\}\Big]+2$

$$=3\times\left[\{9\times5\}\div\{(4-2)+3\}\right]+2$$

$$=3\times\left[45\div\{2+3\}\right]+2=3\times[45\div5]+2=3\times9+2=29$$

(11) $\because$ ఈచిహ్నము ఏకారణముచేత ? అనునర్థమును సూచించును

(12) $\therefore$ ఈచిహ్నము ఆకారణముచే అనునర్థమును సూచించును

(13) ఇత్యాది, లేక ...... ఈచిహ్నము ఇది మొదలగునవి అనునర్థమును సూచించును

(14) $>$ ఈగురుతు దీనికి కుడినైపుననున్న సంఖ్య ఎడమవైపుననున్నసంఖ్యకంటె చిన్నదియని బోధించును ఉదా:— $4>3$ దీనికి విషమీకరణమనిపేరు ఇచట 4 కంటె 3 చిన్నదియని తెలియుచున్నది. ఈచిహ్నమునకు విషమచిహ్నమనిపేరు

ఇది (1) సంజ్ఞాప్రకరణము

(2) ప్రకరణము అభిన్నపరికర్మాష్టకము.

ప్రసిద్ధార్థములు

7 ప్ర. గణితశాస్త్రమునందుపపత్తియొక్క యావశ్యకత లేకనే సర్వసామాన్యముగ తెలియు విషయములు ప్రసిద్ధార్థము లనబడును. అందు కొన్నిముందు గణితమున నుపయోగించునవి యిచట వ్రాయబడుచున్నవి.

(1) ఎన్నిపరిమాణములు ప్రత్యేకముగ ఇతరపరిమాణముతో సమములుగనున్నవో ఆపరిమాణము లన్నియు పరస్పరము సమములగును.

(2) సమములగు రెండుపరిమాణములందును సమానమగు అంకెను కలపినను తీసివేసినను లేక సమానమగు నంకెచేగుణించినను లేక భాగించినను సమముగ వర్గ

వర్గమూలాదికమును చేసినను ఆపరిమాణములు రెండును సమములుగనే యుండును. అనగా అట్లు సంకలనాదికము చేయగా నగు ఫలము పరస్పరము సమానము అగుచున్నది.

(3) విషమములగు రెండుపరిమాణములందు సమాంకమును కలపినను తీసివేసినను ఆవిషమాంకముల యాంతరము ఒకే విధముగ నుండును. $4 > 3 = (4+2) > (3+2)$

(4) రెండుపరిమాణములలో నొకదానియందు అభీష్టసంఖ్య కలుపబడెను. మరియొకదానియందు ఆఅభీష్టసంఖ్య తీసివేయబడెను. అట్టి సంకలిత వ్యవకలితరాసుల యోగము మొదటి రెండు పరిమాణములయొక్కయు యోగముతో సమముగానే యుండును. ఉదా:—$4+3 = (4+2)+(3-2) = 7$

(6) అధికము అల్పము నగు రెండు పరిమాణములను ఒకానొకసంఖ్యచే గుణించినను భాగించినను ఆఫలము క్రమముగ అధికము అల్పము అగుచున్నది.

(6) ఎన్నిపరిమాణములు ఒకానొక ఇతరపరిమాణముకంటె ద్విగుణములు లేక అధిక గుణములుగాని ఐనవో లేక ఒకానొకఇతరపరిమాణముయొక్క ఒకానొక అంశముగాని అగుచున్నవో ఆపరిమాణములన్నియు పరస్పరముసమములగుచున్నవి.

(7) ఒక పరిమాణమునందు మరియొకపరిమాణమును కలపి తీసివేసినను ఒకానొక సంఖ్యచే గుణించి భాగించినను ఆపరిమాణము మార్పు జెందదు. $4 = 4+2-2 = 4 \times 2 \div 2.$

(8) ఏపరిమాణమైనను తనలోని భాగముకంటె పెద్దదియగును. తనలోని అన్నిభాగములయొక్క యోగ మతనతో సమానమున్ను అగును.

సంకలన వ్యవకలనములు.

8 ప్ర. రెండుగాని అనేకములుగాని యైన సంఖ్యలను కలుపుటచేనైన ఒకసంఖ్య (మొత్తము లేకఫలము) ఆసంఖ్యలయొక్క యోగము అని జెప్పబడును. అట్టి

యోగము నెఱుంగుటకు చేయు క్రియ, సంకలనము (కలుపుట) అనిజెప్పబడును. మొత్తము చేయబడు సంఖ్యలు రెండు అగుచో ఏసంఖ్యయందు మరియొకసంఖ్య కూర్పదగియున్నదో ఆమొదటిసంఖ్య యోజ్య మనియు రెండవసంఖ్య యోజక మనియు జెప్పబడును.

9. ప్ర. రెండుసంఖ్యలలో పెద్దసంఖ్య చిన్నసంఖ్యకంటె నెంతయధికమై యున్నదో ఆఅధికమగు పెద్దసంఖ్యయొక్క ఖండము ఆరెండిటియొక్కయు అంతరమనియు శేషమనియు జెప్పబడును. అనగా పెద్దసంఖ్యనుండి చిన్నసంఖ్యతో సమానమగు ఖండమును విడదీయగా మిగిలినసంఖ్య శేషము లేక అంతరము అని చెప్పబడును. ఈఅంతరము నెఱుంగుటకు చేయు క్రియ వ్యవకలనము (తీసివేత) అని చెప్పబడును. ఈవ్యవకలనమునందు పెద్దసంఖ్య వియోజ్యమనియు, చిన్నసంఖ్య వియోజకమనియు చెప్పబడును. వియోజ్యమునుండి వియోజకతుల్యమగు ఖండమునువిడదీయగా మిగిలినదియే శేషము గాన వియోజ్యము వియోజకశేషముల యోగముతోడ సమానము. అని గ్రహింపవలెను.

సంకలిత వ్యవకలితయోః కరణసూత్రం వృత్తార్థమ్.

కార్యః క్రమా దుత్క్రమతోఽథ వాంక యోగో యథాస్థానక
మంతరం వా.

టీ॥ క్రమాత్ = ఏకాదిస్థానక్రమముగనైనను, అథవా = లేక, ఉత్క్రమతః = అందులకు వ్యత్యయముగనైనను (యోజ్య యోజకములయొక్కయు వియోజ్య వియోజకములయొక్కయు ఎడమవైపున తుదను గల స్థానమునుండి యైనను) యోగః = సంకలనము, అంతరం వా = వ్యవకలనమున్ను, యథాస్థానకం = స్థానముల నతిక్రమింపక, కార్యః = చేయదగినది

'క్రమాత్' 'ఉత్క్రమతః' ఈపదములచే నీసూత్రము ఒకటికంటె నెక్కువస్థానములందంకములుగల సంఖ్యలకే యోగవియోగముల విధించుచున్నది.

10. ప్ర. సంకలనపద్ధతి:—యోజ్య యోజకములు 10 కంటె తక్కువయగునపుడు అగుయోగములను కంఠస్థముగ జేయవలయును.

పదికంటె తక్కువయగు సంఖ్యలయొక్క యోగములను కంఠస్థముగ చేయుటచే యోజ్యయోజకములలో నొకసంఖ్య పదికంటె చిన్నది, మరియొకటి పదికంటె పెద్దది, యగునపుడును ఆసంఖ్యలయొక్క యోగము గూడ శీఘ్రముగ స్ఫురించునట్లు అభ్యాసము చేయవలయును. కాని యోజ్య యోజకములలో నొకసంఖ్య పదికంటె పెద్దదైనను స్థానవివేకముచే సంకలనము ఆవశ్యకము.

(1) ఏసంఖ్యలకు యోగము చేయవలయునో ఆసంఖ్యలను ఒకసంఖ్యక్రింద మరియొకసంఖ్య ఉండునట్లు వ్రాయుము. అన్ని సంఖ్యలయొక్కయు ఏకాదిస్థానములు ఒకదానిక్రింద నొకటియుండవలయును. పైసంఖ్యయొక్క ఏకస్థానాంకమునకు దిగువ, క్రిందసంఖ్యయొక్క ఏకస్థానాంకము ఉండవలయును. పైసంఖ్యయొక్క దశస్థానాంకము క్రింద క్రిందిసంఖ్యయొక్క దశస్థానాంకముండవలయును. ఇట్లు కలుపదగిన అన్నిసంఖ్యలయొక్కయు సజాతీయస్థానములు ఊర్ధ్వాధరపంక్తిగ నుండవలయును. సంఖ్యలయొక్కక్రింద నడ్డముగ నొకరేఖను గీయుము. తొలుత పైసంఖ్యలయొక్క ఏకస్థానాంకముల నన్నిటిని గలిపి ఆసంఖ్యయొక్క ఏకస్థానాంకమును రేఖ(గీటు)క్రింద పైసంఖ్యలయొక్క ఏకస్థానాంకములకు క్రిందుగ నుండునట్లు వ్రాయుము.

మిగిలినసంఖ్యనున్ను పైసంఖ్యల దశస్థానమునందలి యంకములనున్ను గలిపి ఆ కలుపగా నగు సంఖ్యయొక్క ఏకస్థానాంకమును పైసంఖ్యల దశస్థానాంకములకు క్రిందుగ నుండునట్లు రేఖ (గీటు)కు క్రింద వెనుక వ్రాయబడిన యంకెకు ఎడమవైపున ఒకపంక్తి యందుండునట్లు వ్రాయుము. ఇట్లు సంఖ్యలయందలి అన్నిస్థానములయందలి అంకెలును పూర్తి యగువరకు చేయుము. స్థానములుపూర్తి యగునపుడు పైసంఖ్యలయందలి తుదిస్థానమునందలి యంకెలను కలుపగానగు సంఖ్యను పూర్తిగ గీటుక్రింద వ్రాయుము.

ఇట్లు చేయగానైన రేఖక్రిందసంఖ్య ఆపైసంఖ్యలయొక్క యోగమగును.

ఇట్లు ఏకాదిస్థానక్రమముచే చేయబడిన సంకలనము క్రమసంకలనము.

(2) కలుపదగిన సంఖ్యల నన్నిటిని పైక్రమముగ వ్రాసి క్రింద రేఖను చేయుము. పైసంఖ్యలలో ప్రతిసంఖ్యయందును ఎన్నిస్థానములున్నదియు ఏయే

సంఖ్యలయందు అధికస్థానములు గలిగినదియు గుర్తింపుము. తొలుత పైపద్ధతిగ పైసంఖ్యలయొక్క ఎడమవైపున తుదనుగల సజాతీయ (ఒకజాతిగల) స్థానాంకములకు యోగమును చేయుము. యోగముయొక్క ఏకస్థానాంకము పైసంఖ్యలయొక్క కలుపబడిన స్థానాంకములకు క్రిందుగనుండునట్లు ఆయోగసంఖ్యను వ్రాయుము. తిరుగ పైసంఖ్యలలో ఉపాంతిమస్థానమందలి (తుదియంకెకు కుడివైపున ముందుగల) అంకములను గలిపి ఆయోగముయొక్క ఏకస్థానాంకమును రెండవసారి కలుపబడిన స్థానాంకములకు క్రిందుగ నుండునట్లు రేఖాధఃప్రదేశమున వ్రాసి మిగిలినసంఖ్యను దీని (రెండవయోగము)యొక్క ఏకస్థానాంకమునకు నెడమవైపున నుండునట్లు తొలుత వ్రాయబడిన సంఖ్యతో కలిపి ఆయోగమును తుదనైనస్థానాంకముల యోగముగా భావింపుము. ఇట్లు ఏకస్థానమువరకును జేయగా తుదకు సిద్ధించినసంఖ్య యోగమగును. ఇట్లు చేయుట ఉత్క్రమ సంకలనము.

ఉపపత్తి:—సంఖ్యలు ఒకట్లయొక్క సమూహములు (2 ప్రి) కావున $4+5$ అనగా నాలుగుఒకట్లను ఐదుఒకట్లను కలుపవలయునని తాత్పర్యము.

$$\because\ 4=1+1+1+1 \text{ ఇట్లు } 5=1+1+1+1+1$$

$$\therefore\ 4+5=(1+1+1+1)+(1+1+1+1+1)$$
$$=1+1+1+1+1+1+1+1+1=9\ \therefore 4+5=9$$

ఈవిషయమును బాలురకు చింతగింజలు మొదలగువాటిచే బోధించుటగలదు.

ఇట్లు లెక్కపెట్టుకుని సంకలనము చేయుట ప్రయాసము గాన, సామాన్యముగ సంఖ్యల వినునప్పటికే ఆసంఖ్యల యోగము స్ఫూర్తికి వచ్చునట్లు కంఠస్థము చేయవలయును.

అనేకాంకములుగల సంఖ్యల సంకలనమునుగూర్చి—

కలుపుటగాని, తీసివేయుటగాని సజాతీయములకే జేయవలయును. విజాతీయములకు జేయగూడదు. రెండును మూడును కలిపినచో రెండుఅనగా రెండు ఒకట్లు. మూడుఅనగా మూడుఒకట్లుగాన ఐదుఒకట్లు అనగా ఐదు యోగమగుచున్నది. కాని దశస్థానమందలి రెండునకును ఏకస్థానమందలి మూడునకును

యోగము ఐదు కానేరదు. దశస్థానమందలిసంఖ్య అన్నిదశకముల బోధించును. కావున నిచట దశస్థానమందున్న రెండు ఇరువదిని బోధించును. కావున ఇరువదిని మూడును గలిపినచో ఇరువదిమూడు అగును. కావున సంకలనము చేయవలసినపుడు ఇరువది (20)ని వ్రాసి ఇందు ఏకస్థానాంకమగు శూన్యముక్రింద 3 ను వ్రాయవలయును. అప్పుడు 3 ను శూన్యమును గలుపవలయును. ఇందులకై సంఖ్యలను స్థానవ్యత్యయము లేనట్లు వ్రాయవలయునని జెప్పబడెను. భాస్కరాచార్యులును "యథాస్థానకం" అని చెప్పిరి. సజాతీయస్థానాంకములకే ప్రత్యేకము యోగము జేయవలయును కావున ప్రత్యేకసజాతీయస్థానాంకములకే యోగమును జెప్పుటయు యుక్తియుక్తము. ఇదియే క్రమసంకలనమునకును ఉత్క్రమసంకలనమునకును ఉపపత్తి యగుచున్నది.

11. ప్ర. వ్యవకలనపద్ధతి:—10 కి తక్కువగు యోజ్యయోజకముల యోగములను కంఠస్థము చేయునట్లు వియోజ్యము, వియోజకముయొక్కయు అంతరముయొక్కయు యోగము గాన ఆయోగములనుండి యోజ్యములను తీసివేయనగు యోజకాంకములను కూడ కంఠస్థము జేయుము.

సంకలనమునందలి యోగము, వ్యవకలనమునం దొకటి వియోజకముఅగుచో మరియొకటి అంతరము అగును అని గ్రహింపవలయును.

పూర్వము సంకలనమునందువలె 20 కంటె తక్కువయగు వియోజ్యముల వలన 10 కంటె తక్కువయగు వియోజకముల తీసివేయుటచే నగు అంతరములు వియోజ్య వియోజకముల వినుటతోడనే స్ఫూర్తికి వచ్చునట్లు అభ్యాసము చేయుము.

అంతరము చేయదగిన రెండుసంఖ్యలలో పెద్దసంఖ్య వియోజ్యముగను చిన్నసంఖ్య వియోజకముగను భావింపుము. వియోజ్యమును ముందు వ్రాసి దానిక్రింద వియోజకమును వియోజ్యసంఖ్యయొక్క ఏకాదిస్థానాంకములక్రిందుగ వియోజకసంఖ్యయొక్క ఏకాదిస్థానాంకము లుండునట్లు వ్రాయుము. క్రింద నొకరేఖను చేయుము. వియోజ్యముయొక్క ఏకాదిస్థానమందలి యంకెలనుండి

క్రమముగా వియోజకముయొక్క ఏకాదిస్థానములందలి యంకెలను తీసివేసి ఆఅంతరములను క్రమముగ నాయాఏకాదిస్థానాంకములక్రిందుగ రేఖక్రింద వ్రాయుము. ఇట్లు చేయుటలో నెక్కడ వియోజకముయొక్క ఒకానొక యంకముకంటె దానిపైనున్న వియోజ్యముయొక్క అంకె చిన్నదిగానున్నదియో, వచట ఆవియోజ్యాంకమునందు పదినిగలిపినట్లుగ భావించి (అనగా ఆ అంకెకు ఎడమవైపున దగ్గరగానున్న యంకమునుండి 1 టిని బదులుపుచ్చుకొనినట్లు భావించి) అంతరమును గనుగొనుము. పిమ్మట ఏఅంకముల కిట్లు చేసితిమో ఆఅంకములకు నెడమవైపున దగ్గరగనున్న వియోజ్య వియోజకాంకముల యంతరము గనుగొనునపుడు వియోజ్యాంకమున నొకటి తగ్గించి గాని వియోజకాంకమునం దొకటి గలిపి గాని యంతరము గనుగొనుము. ఇట్లు చేయగా రేఖకు క్రిందనున్న సంఖ్య యంతరమగును.

వియోజ్యసంఖ్యయందు గల స్థానములకంటె వియోజకసంఖ్యయందలి స్థానములు తక్కువ యగుచో ననగా వియోజ్యసంఖ్యలో నెడమవైపున కొన్ని యంకములక్రింద వియోజకసంఖ్యయం దంకములు లేనిచో వియోజకముయొక్క నెడమవైపున శూన్యము లున్నట్లు భావించి అంతరమును జేయుము.

ఇట్లు ఏకాదిస్థానక్రమముగ జేయుచో క్రమవ్యవకలనమనియు ఎడమవైపు నుండిచేయుచో నుత్క్రమవ్యవకలనమనియు చెప్పబడును.

ఉపపత్తి:—

యోగరూపమగు వియోజ్యమునుండి యోజ్యముగాని, యోజకముగాని యగు వియోజకమును తీసివేయగా యోజకముగాని యోజ్యముగాని యగు అంతరము శేషించుచున్నది,

యోజ్య యోజకాంకములు ఒకేస్థానము గలిగియున్నను కొన్నిటికి యోగఫలము రెండుస్థానములుగలది యగుచున్నది. అట్టి యోగఫలముయొక్క ఏకస్థానాంకము వియోజకాంకముకంటె చిన్నదియే యగును. అపుడు యోగఫలముయొక్క ఏకస్థానాంకమునందు పదిని గలిపి వియోజకాంకమును తీసివేయవలయును. ఒకటిని అప్పుపుచ్చుకొనుట యనగా వియోజ్యాంకముయొక్క ఎడమ

నైపు స్థానాంకమునుండి ఒకటిని గ్రహించుటయే. (ప్రతిస్థానమునకును దానికి ఎడమవైపుననున్న స్థానము దశగుణితస్థానమనుట జ్ఞప్తికి తెచ్చుకొనవలయును.) అట్లు ఒకటిని గ్రహించితిమిగావున నే అందు అనగా ఎడమవైపుననున్న వియోజ్యాంకములో నొకటి తగ్గించిగాని దానిక్రిందనున్న వియోజకాంకమునం దొకటి గలిపిగాని పూర్వమునలె క్రియను జేయవలయును. ఇట్లు వ్యవకలనపద్ధతి ఉపపన్నము.

అత్రోద్దేశకః.

అయే బాలే లీలావతి మతిమతి బ్రూహిసహితా
న్ద్విప పంచ ద్వాత్రింశ త్త్రినవతిశ తాష్టాదశ దశ।
శతోపేతా నేతా నయుతవియుతాం శ్చాపి వద మే
యది వ్యక్తే యుక్తివ్యవకలనమార్గేసి కుశలా॥ ౧॥

న్యాసః ౨, ౫, ౩౨, ౧౯౩, ౧౮, ౧౦, ౧౦౦ సంయోజనాజ్జాతం. ౩౬౦ అయుతాచ్చోధితే జాతం ౯౬౪౦.

ఇతి సంకలిత వ్యవకలితే.

తా॥ ఓబాలా! మతిమంతురాలా! లీలావతీ! వ్యక్తమగు సంకలన వ్యవకలనముల మార్గమునందు నేర్పుగలదాన వగుచో 2, 5, 32, 193, 18, 10, 100 ఈసంఖ్యలను గలిపి జెప్పుము. వీటిని అయుతము 10000 వలన వ్యవకలించి చెప్పుము.

సంకలనోదాహరణము.

	193
	100
	32
	18
	10
	5
	2
యోగము	360

ఇచట మొదట నేకస్థానమందున్న 2, 5, 0, 8, 2, 0, 3 వీటియోగము '20' ఇందు ఏకస్థానమందలి శూన్యము '0' ను క్రిందవ్రాసి దశస్థానమందు మిగిలిన 2 న్ను సంఖ్యలలో దశస్థానమందలి 1, 1, 3, 9, 0 అంకెలను గలుప '16' ఇందు ఏకస్థానాంకము 6 ను దశస్థానాంకములక్రిందుగ వ్రాసి ఇందలి దశస్థానాంకము 1 టిని మిగిలిన శతస్థానమునందలి 1, 1 అంకెలతో గలుప 3 అయ్యెను. ఇది ఇదివరలో వ్రాయబడిన యంకములకు నెడమవైపున వ్రాయబడెను. అట్లు వ్రాయగా యోగము 360 అగుచున్నది.

సంకలనముజేయుసమయమున నిట్లు జెప్పెదరు.

ఐదును రెండును ఏడు (శూన్యములు వదలివేయబడును) ఏడును ఎనిమిదిన్ని పదునేను. పదునేనును రెండును పదునేడు. పదునేడును మూడును ఇరువది. ఇరువదికి సున్న (అని సున్నను ఏకస్థానమునందువ్రాసి తిరుగజెప్పుదురు) స్థానమందురెండు. రెండును ఒకటిన్ని మూడు. మూడును ఒకటిన్ని నాలుగు. నాలుగును మూడును ఏడు. ఏడును తొమ్మిదియు పదునారు పదునారింటికి ఆరు. (అని ఆరును దశస్థానమున వ్రాసి తిరుగా) స్థానమునందు ఒకటి. ఒకటిన్ని ఒకటిన్నీ రెండు. రెండును ఒకటిన్ని మూడు. అని మూడు శతస్థానమున వ్రాయగా 360 యోగము అగుచున్నది.

వ్యవకలనోదాహరణము.

వియోజ్య	10000
వియోజక	360
అంతరము	9640

మొదట ఏకస్థానమునందు వియోజ్య వియోజకములు రెండిటియందును శూన్యముగాన అంతరము శూన్యము. దశస్థానమున ఆరుకంటె శూన్యము చిన్నదిగావున 10 లో ఆరును తీసివేయగా నంతరము 4 శతస్థానములో వియోజకాంకము 3 లో 1టిని గలుపగా నగు 4 కంటె శూన్యము తక్కువది గాన 10 లో తీసివేయ నంతరము 6. సహస్రస్థానమున వియోజకమునందంకెలు లేవు. గాన నచట శూన్య మున్నట్లు భావింపబడెను. ఇదివరలో శూన్యమునుండి నాలుగు తీసివేయబడదు గాన పదిలో తీసివేసితిమి. ఆకారణముచే వెనుక 3 ను 4 గు గా భావించి నట్లు శూన్యమును 1 టిగా భావింపవలయును. 10 లో 1 టిని త్రోయగా 9 అంతరము. దశసహస్రస్థానమున కనుబడుచున్న వియోజ్యాంకము 1 టిలో భావింపబడిన వియోజకాంకము 1 టిని తీసివేయ శేషము శూన్యమే నిలచును. ఈసంకలనాదులందు శూన్యమునకు నెడమవైపున అంకెలు లేనిచో నాశూన్యమువలన ప్రయోజనములేదు గావున వ్రాయబడదు. ఇట్లు చేయ 9640 అంతర మయ్యెను.

వ్యవకలన సమయమున నిట్లు చెప్పుదురు.

సున్నలో సున్నపోతే సున్న. సున్నలో ఆరుపోదుగాన శతస్థానమునుండి యొకటి బదులుపుచ్చుకొంటిమి. పదిలో ఆరుపోతే నాలుగు. స్థాన

మందున ఒకటి (తిరుగ వెనుకటివలెనే) పదిలో నాలుగుపోతే ఆరు. స్థానమందు ఒకటి. పదిలో ఒకటిపోతే తొమ్మిది. అంతరం 9640 అయ్యెను.

సంకలనోదాహరణములు.

(1)	(2)	(3)	(4)
758	179	82591	7092
75	225	9175	43
687	345	94505	8001
89	151	4008	3579
1609	900	57290	5432
		247569	24147

సంకలన ప్రశ్నములు.

(1) ఒకబాలునకు వానితండ్రి 3 రూపాయిల నిచ్చెను. వానితల్లి 5 రూపాయిల నిచ్చెను. వానిఅన్న 2 రూపాయిల నిచ్చెను. వానిమేనమామ 8 రూపాయిల నిచ్చెను. వానివద్ద ఎన్ని రూపాయిలుండును ?

(2) నాటకములువేయు సంఘమువారికి 4 గ్రామములలో నాటకములు వేయగా ఒకగ్రామమున 250 రూపాయిలును, 2 వ గ్రామమున 105 రూపాయిలును, 3 వ గ్రామమున 95 రూపాయిలును, 4 వ గ్రామమున 475 రూపాయిలును మిగిలెను. వారికి మొత్తము మిగిలిన ధనమెంత ?

(3) నావద్ద నొకపుస్తకము గలదు. అందు 5 ప్రకరణము లుండెను. మొదటిప్రకరణమున 150 పద్యములు, 2 వ ప్రకరణమున 90 పద్యములు, 3 వ ప్రకరణమున 75 పద్యములు 4 వ ప్రకరణమున 105 పద్యములు, 5 వ ప్రకరణమున 139 పద్యములును గలవు. ఆపుస్తకమున మొత్తము ఎన్నిపద్యములు గలవు?

(4) ఒకవర్తకునకు ఒకసంవత్సరమున పశువుల వ్యాపారమువలన 2309 రూపాయిలు ఆదాయమువచ్చెను. భూములవలన 3905 రూపాయిలు ఆదాయము వచ్చెను. వడ్డీవ్యాపారమువలన 1875 రూపాయిలు వచ్చెను. ధాన్య

మును కొని యమ్ముటలో 593 రూపాయిలు లాభము వచ్చెను. వాని ఆదాయము మొత్త మెంత ?

వ్యవకలనోదాహరణములు.

(1)	(2)	(3)	(4)
5003	3987	5116	90000
435	2899	4998	8976
4564	1088	118	81024

వ్యవకలన ప్రశ్నములు.

(1) ఒకయాత్రికుడు యాత్రకై రూ 3895 లను తీసుకు వెళ్ళి అందు రూ 2970 లను ఖర్చు చేసెను. వానివద్ద నిల్వ యెంత ?

(2) ఆర్యభట్టు శకము 398 లో జన్మించెను. భాస్కరుడు శకము 1036 లో జన్మించెను. ఆర్యభట్టునకు ఎన్నివత్సరముల పిమ్మట భాస్కరుడు జన్మించెను ?

(3) ఒక ధనవంతునకు వార్షికాదాయము 8394 రూప్యములు. వానికి వార్షికవ్యయము 7895 అగుచుండెను. వానికి నిలవయగు ద్రవ్యమెంత ?

(4) ఒకయాత్రికుడు కాశికి బోవుచు 4984 రూపాయిలను తీసుకువెళ్లెను. వెళ్ళునపుడు మార్గమందు 593 రూపాయిలను ఖర్చుపెట్టెను. కాశియందు దానధర్మములకై 875 రూపాయిలను ఖర్చుపెట్టెను. ప్రయాగయందు రూ 783 లు వ్యయపరచెను. గయయందు రూ 675 లు వ్యయము చేసెను. కొన్నివస్తువులను కొనుటకు రూ 377 లు ఖర్చుచేసెను. రాకకై 593 రూపాయిలు వ్యయము చేసెను. భోజనాదిసౌకర్యములకై మిగిలిన ధనము వ్యయము అయ్యెను. వానికి భోజనాది సౌకర్యమునకయిన ధనవ్యయ మెంత ?

గుణనము.

12. ప్ర. రెండు సంఖ్యలలో మొదటిసంఖ్య యెంతయుండునో అన్ని పదార్థములను రెండవసంఖ్య యెంతయో అన్నిపర్యాయములు గ్రహించుటచే నగు

మొత్తము గుణనఫలమని జెప్పబడును. ఇందు మొదటి సంఖ్య గుణ్యమనియు రెండవది గుణకమనియు జెప్పబడును. (గుణ్యము = గుణింపదగినది. గుణకము = గుణించునది. గుణనము = గుణించుట = ఆవృత్తివేయుట) ఈగుణనఫలమును తెలియుటకు జేయు క్రియ గుణనము (గుణకారము) అని చెప్పబడును. ఈకారణముచే అనగా రెండవసంఖ్య ఎంతయో అన్నిపర్యాయములు మొదటి సంఖ్యను గ్రహించుట అనగా కలుపుటయే గుణనము గాన, గుణనము సంకలనభేదము ఆగుచున్నది. కేవలసంకలనమందు అనేక విజాతీయ సంఖ్యలను కూడుటయు గలుగును. గుణనమందు ఏకరూప (సమాన) సంఖ్యల ననేకపర్యాయములు కలుపుటయే యగు నని గ్రహించునది. కావున దీనింబట్టి 20 కంటె లోపుగ గుణ్యగుణకము లున్నపుడు గుణనఫలముల సిద్ధముచేసి కంఠస్థముగ జేయవలయును. వాటికి ఎక్కములని పేరు. ఆఎక్కములను 20 కి లోపుగ గుణ్యగుణకములు వినపడగనే గుణనఫలము స్ఫురించునట్లు కంఠస్థముచేయవలయును.

13 ప్ర. గుణనమును సంబంధించిన కొన్ని సిద్ధాంతములు.

(1) రెండుసంఖ్యలలో నెద్దానినైనను నొకసంఖ్యను గుణ్యముగను రెండవసంఖ్యను గుణకముగను కల్పించినను గుణనఫలము సమముగనే యుండును.

దీనికియుక్తి:— 4, 5 ఈరెండుసంఖ్యలలో 4 సంఖ్యగల పదార్థములను 5 పర్యాయములు గ్రహించినను, 5 సంఖ్యగల పదార్థములను 4 పర్యాయములు గ్రహించినను ఫలము సమముగ 20 యే యగును. ఎట్లనగా:— 4 అనగా నాలుగు ఒకట్లు. (2 ప్ర.) గదా! 5 అనగా ఐదు ఒకట్లు గదా! కావున నీచక్రమునందు చూడుము. నిడుపుగనున్న ప్రతి పంక్తియందును 4 ఒకట్లు గలవు ఇట్టిపంక్తులను ఐదింటిని గలుప 20 ఒకట్లు ఆయినవి కావున గుణనఫలము 20 అయ్యెను. లేక అడ్డపంక్తులలో ప్రతి పంక్తియందును ఐదు ఒకట్లు గలవు. అట్టిపంక్తులను నాలుగిటిని కలిపినను 20 యే అయ్యెను.

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

ఈసిద్ధాంతమును "గుణ్యగుణకయో ర్నామభేద ఏవ న తు రూపభేదః" అని మనప్రాచీనులు వాడియున్నారు.

(2) గుణ్యగుణకములలో నెద్దియైనను శూన్యమగుచో గుణనఫలము శూన్యమగును. గుణ్యగుణకములలో నెద్దియు శూన్యముగానపుడు ఒకసంఖ్య ఒకటియగుచో గుణనఫలము రెండవసంఖ్యతో సమమగును

దీనికియుక్తి:— గుణ్యము శూన్యమగుచో గుణకము ఎంత సంఖ్యయో అన్నిసార్లు శూన్యమును గ్రహించినను మొత్తము శూన్యమే అగును. (12 ప్ర. చూ.) గుణకము శూన్య మగుచో గుణ్యసంఖ్యను శూన్యపర్యాయములు గ్రహించినచో అనగా గ్రహింపనిచో నైనను గుణనఫలము శూన్యమే యగును.

ఇట్లనే గుణ్యము 1 యైనచో గుణక మెంతయో అన్నిసార్లు ఒకటిని గ్రహించినచో గుణకసంఖ్యయే గుణనఫలము. గుణక మొకటియగుచో నొకమారు గుణ్యసంఖ్యను గ్రహించుటచే గుణ్యసంఖ్యయే గుణనఫలము.

(3) గుణ్యగుణకములలో నొకసంఖ్య పదియగుచో రెండవసంఖ్యయొక్క కుడివైపున సున్న వ్రాసినచో గుణనఫలమగును.

ఉదా:— $8 \times 10 = 80$.

10 గుణ్యమగుచో 10 ని 8 పర్యాయములు గ్రహించుట అనగా 10 ని 8 స్థలములం దుంచి కూడుట గావున నట్లు నిలువుగ వ్రాసి కూడుచో నన్నిటి యొక్కయు ఏకస్థానములందు శూన్యములే గలవు గాన శూన్యముల మొత్తము శూన్యమే గుణనఫలమున నేకస్థానమున నుండగలదు. దశస్థానమందలి ఒకట్లను నెనిమిటిని గలుపగా దశస్థానమున 8 యగుచున్నది. కావున 8 కి కుడివైపున సున్న వ్రాయుట అయ్యెను. (13 ప్ర 1సి) ప్రకారము గుణ్యమెద్దియైనను భేదములేదు.

దీనిచే 100, 1000 మొదలగు సంఖ్యలచే గుణింపవలసినచో రెండు మూడు మొదలగు శూన్యములను వ్రాయ గుణనఫల మగునని తెలియదగియున్నది.

గుణనే కరణసూత్రం సార్ధవృత్తద్వయం

గుణ్యాన్త్య మంకం గుణకేన హన్యా దుత్సారితే నైవ

ముపాంతిమాదీన్॥ ౧౨॥

టీ॥ గుణకేన = గుణకముచే, గుణ్యాన్త్యం = గుణ్యముయొక్క తుద నున్నదియగు. అంకం = అంకెను, హన్యాత్ = గుణింపవలెను, ఏవం = ఈప్రకారము, ఉత్సారితేన = జరుపబడిన గుణకముచే, ఉపాంతిమాదీన్ = ఉపాంతిమము (తుదియంకెకు సమీపముననున్న యంకె) మొదలగు నంకములను (గుణింపవలెను).

14. ప్రి. గుణనపద్ధతి :—

సంకలన వ్యవకలనములవలె గుణనమున్ను క్రమగుణనమనియు ఉత్క్రమగుణనమనియు రెండువిధములు. తొలుత అంత్యాంకమును గుణింపవలయు నని చెప్పుటచే నిది ఉత్క్రమగుణనప్రకారమని తెలియుచున్నది. కాని ఎడమవైపునుండి చూచినచో ఏకస్థానము అంత్యాంకమని చెప్పవచ్చును. దానిచే క్రమగుణనమునకును ఈసూత్ర ముపయోగించును క్రమగుణనమందు ఈవిధానము గుణకము కంఠస్థములగు ఎక్కములలో చేరినచో బాగుగ నుపయోగించును. ఉత్క్రమగుణనమందు పెద్దసంఖ్య గుణకమైనను, ఈవిధి నుపయోగించు వాడుక గలదు. అది యంతయు క్రమముగ చూపబడును.

(1) క్రమగుణనపద్ధతి:—

తొలుత గుణ్యమును లిఖించి, గుణ్యముయొక్క ఏకాదిస్థానములక్రిందుగ గుణకముయొక్క ఏకాదిస్థానాంకము లుండునట్లు, గుణకమునున్ను లిఖించి క్రింద గీటును గీయుము. గుణకము కంఠస్థములగు నెక్కములలో చేరినసంఖ్యయగుచో ఆగుణకముచే గుణ్యముయొక్క ఏకస్థానాంకమును గుణించి, ఆగుణనఫలముయొక్క ఏకస్థానాంకమును గీటుక్రింద గుణ్యగుణకముల ఏకస్థానాంకముల క్రిందుగనుండునట్లు వ్రాయుము. మిగిలినసంఖ్యను వేరుగ నుంచుకొనుము. తిరుగ దశస్థానాంకమును గుణించి ఆగుణనఫలములో వేరుగనుంచినసంఖ్యను గలిపి ఈసంఖ్యయొక్క ఏకస్థానాంకమును ఇదివరలో గీటుక్రింద వ్రాయబడిన యంకెకు ఎడమవైపున (గుణ్యగుణకముల దశస్థానాంకములక్రిందుగ) వ్రాయుము. మిగిలినసంఖ్యను వేరుగనుంచికొనుము. తిరుగ శతస్థానాంకమును గుణించి అందు వేరుగనుంచిన సంఖ్యను గలిపి ఆసంఖ్యయొక్క ఏకస్థానాంకమును శతస్థానాంకములకు క్రిందుగ వ్రాయుము. ఇట్లు తుదివరకును చేయుచు తుదను కలుపగా వచ్చిన సంఖ్య నంతను వ్రాయుము. ఇట్లు చేయగా రేఖకు క్రిందనున్న సంఖ్య గుణనఫలమగును.

గుణకమున ననేకసంఖ్యలు గలిగినచో:—

ముందు చెప్పబోవు స్థానవిభాగగుణనము చేయుట యుక్తము.

లేక:— గుణకమును గుణ్యముగ భావించి, గుణ్యముయొక్క ఏకస్థానాంకమును గుణకముగ భావించి, గుణనఫలమును గనుగొనుము. ఈగుణనఫలముయొక్క ఏకస్థానాంకమును గుణ్యగుణకముల ఏకస్థానాంకములకు క్రిందుగనుండునట్లు వ్రాసి మిగిలినసంఖ్యను వేరుగనుంపుము. తిరుగ గుణ్యదశస్థానాంకమును గుణకముగ భావించి, గుణనఫలము నెరింగి, అందు వేరుగనుంచిన సంఖ్యనుగలిపి, ఆసంఖ్యయొక్క ఏకస్థానాంకము గుణ్యగుణకముల దశస్థానాంకము క్రిందుగ నుండునట్లు వ్రాయుము. ఇట్లు పూర్వప్రకారము జేయు గుణనఫలము సిద్ధించును. (ఇది ప్రయాసకరము).

ఉదా:—గుణ్యము 135 గుణకము 12 గుణనఫల మెంత ?

గుణ్యము	135
గుణకము	12
గుణనఫలము	1620

గుణ్యముయొక్క ఏకస్థానాంకమగు 5 ను గుణకము 12చే గుణింపగా నైన 60 లో '0' ను క్రింద వ్రాసి దశస్థానాంకమగు 3 ను 12 చే గుణింపనగు 36 లో 6 ను గలుపగానగు 42 లో 2 ను దశస్థానమందు వ్రాసి తిరుగ శతస్థానమందలి 1 టిని 12 చే గుణింపనగు 12 లో 4 ను గలిపి 16 ను గుణ్యములో స్థానమునకు ఎడమవైపున నంకెలులేవుగాన అంతను వ్రాయగా 1620 గుణనఫలమయ్యెను.

(2) ఉత్క్రమగుణనపద్ధతి.

గుణ్యగుణకముల వ్రాసి క్రింద గీటును గీయుము. తొలుత గుణకముచే గుణ్యముయొక్క యెడమవైపుననున్న తుదయంకెనుగుణించి ఆగుణనఫలముయొక్క యేకస్థానాంకము గుణ్యముయొక్క తుదయంకెకు క్రిందుగనుండునట్లుగ వ్రాయుము. తిరుగా గుణ్యమునందు ఆతుదియంకెకు కుడివైపుననున్న యంకెను గుణించి ఆగుణనఫలమును దాని యేకస్థానాంకము గుణ్యమునందలి గుణింపబడినయంకెకు క్రిందనుండునట్లు వ్రాయుము. తిరుగా గుణింపబడినయంకెకు కుడివైపుననున్న యంకెను గుణించుచు గుణనఫలమును అందలి యేకస్థానాంకము గుణింపబడిన యంకెకు క్రిందుగనుండునట్లు వ్రాయుచు ఇట్లు ఈక్రియను ఏకస్థానాంకము వరకును చేసి, కూడినచో యోగము గుణనఫలము అగును ఎట్లనగా :—

గుణ్య	135
గుణక	12
	12
	36
	60
గుణనఫలము	1620

ఇచట గుణ్యమునందు శతస్థానమువరకు నంకములు గలవు. తుదనుండు 1 టిని 12 చే గుణింప 12 తిరుగ 3 ను గుణింప 36 అట్లు 5 ను గుణింప 60 ఈగుణనఫలములయొక్క యేకస్థానాంకములు గుణ్యమునందలి గుణింపబడిన ఆయాఅంకములకు క్రిందుగనుండునట్లు వ్రాసి, గలుపగా 1620 గుణనఫలమయ్యెను.

ప్రాచీనులు గుణనమునందీపద్ధతినే యవలంబించుచుండిరి. పలక మొదలగు అంకెలు తుడిచి అంకెలు వేయుతగిన సాధనములందు గణితమును చేయునపుడు ఈమార్గము బహుసుకరముగా నుండును. శీఘ్రముగ గణితముసాగుటకై ఇప్పటికిని ఈమార్గము అవలంబింపబడుచున్నది. ఆపద్ధతి చూపబడుచున్నది.

తొలుత గుణ్యముయొక్క యెడమవైపున తుదనున్న యంకెకు క్రిందుగ గుణకముయొక్క యేకస్థానాంకముండునట్లు వ్రాయుము. గుణకముచే గుణ్యాన్త్యాంకమును గుణింపనగు ఫలము గుణ్యాన్త్యాంకమును చెరిపి ఆస్థానమున వ్రాయుము. పిమ్మట గుణకమును ముందు స్థానమునకు జరుపుము. అనగా గుణకముయొక్క యేకస్థానాంకము గుణ్యమునందు గుణింపబడిన యంకెయొక్క కుడివైపున నున్నయంకెకు క్రిందుగ నుండునట్లు గుణకమును వ్రాయుము.

ఆయంకెను గుణించి ఆయంకెను తుడిచి దానిస్థానమున ఆగుణనఫలముయొక్క యేకస్థానాంకమును వ్రాయుము. మిగిలిన అంకెలను ఎడమవైపుననున్న యంకెలలో క్రమముగా స్థానములననుసరించి గలుపుము. ఇట్లు ఏకస్థానాంకమువరకు చేయ గుణనఫలము నిలుచును.

ఉదా:—రూపాంతరము లన్నియు చూపబడుచున్నవి.

గుణ్య 135 } తొలుత 1 టిని 12 చే గుణింపగా 1235 }
గుణక 12 } గుణకమును జరుపగా 12 }

ఇపుడు గుణకముచే 3 ను గుణింపగా 36 లో 6 ను 3 యొక్క స్థానమందువ్రాసి 3 ను వెనుకనున్న 2 లో గలుపగా 1565 }
తిరుగ గుణకమును జరుపగా 12 }

ఇపుడు గుణకముచే 5 ను గుణించి 60 లో '0' ను 5 స్థానమున వ్రాసి 6 ను ఇదివరలోనున్న 6 లో గలుపవలయును అట్లుచేయ 1620 అగును. ఇది గుణనఫలము. ఈపద్ధతి గుణకమునందనేకాంకములున్నను ఇట్లే యగుచున్నది. కాని కొంచెము విశేషము గమనింపవలసియున్నది. గుణ్యమునందలి యంకెచే గుణకమునందలి యొక్కొక్కయంకెను (గుణకమును గుణ్యమునుగాను, గుణ్యమందలి యంకమును గుణకమునుగాను భావించి) గుణించుచు వ్రాయుచు, ఈక్రియను చేయవలయును. ఈఉదాహరణమువలననే ఆవిషయమున్ను స్పష్టముగాగలదు.

ఈగణితమును చేయునపు డిట్లుచెప్పుదురు.

ఒకపండ్రెండు పండ్రెండు (అని ఒకటినితుడిచి అచట 12 ను వ్రాయుదురు) గుణకమును జరుపుచు (ఉత్సార్య = జరిపి అందురు) మూడు పండ్రెండ్లు ముప్పదియారు (అని 6 ను గుణ్యములో 3 ను తుడిచి అచటవ్రాసి 36 లో 3 ను గానివెనుక ఎడమవైపుననున్న యంకెకు దిగువను వ్రాసి అందు గలుపుదురు) తిరుగాజరిపి ఐదు పండ్రెండ్లు అరువది (తిరుగా ఐదునుతుడిచి 60 లో '0' సున్నను వ్రాసి 6 ను దానివెనుకనున్న 6 క్రిందవ్రాసి అందుగలుపుదురు.) ఆరును ఆరును పండ్రెండిటికి రెండు. ఐదును ఒకటియు ఆరు. ఇట్లుచేయ 1620 గుణనఫలము అయ్యెను.

ఉపపత్తి:— 135 ను 12 చే గుణింపవలయును.

ప్రతిసంఖ్యయందును అంకములు ఏయేస్థానమున గలవో ఆయాస్థానములచే బోధింపబడుసంఖ్యలనే బోధించును. (4 ప్ర. చూ) 12 చే ఏకస్థానమందలి 5 ను గుణింపగా నగు గుణనఫలము 60 ఒకట్లను బోధించును. కాని 60 లో '0' ఏకస్థానమందలిది గాన ఏకస్థానముశూన్యము. 6 దశమస్థానమందలిదిగాన 6 దశకములను బోధించును. గుణ్యమునందలి 3 దశస్థానమందలిది. దానిని గుణింప 36. ఈసంఖ్య 36 దశకమును బోధించును. కావున 36 ను, 6 ను సజాతీయము లగుటచే, గలుప 42 దశకము లయ్యెను. అనగా 10 చే గుణింపబడిన 42 = 420 అనగా 4 శతకములు 2 దశకములు కావున దశస్థానమున 2 ను వ్రాసితిమి. గుణ్య శతస్థానమందలి 1 టిని గుణింప 12 శతములను బోధించును. ఇదివరలో 4, శతస్థానములోనిది గావున గలుపగా $12 + 4 = 16$ శతములయ్యెను. గుణ్యములో సహస్రస్థానమున నంకములు లేకపోవుటచే 16 సంఖ్య పూర్తిగ వ్రాయబడెను.

ఇందు గమనింపవలసిన విషయములు:—

(1) గుణ్యము ఏజాతిగలదియో గుణనఫలమా జాతిది యగును.

(2) యోగవియోగములు సజాతీయములకే జేయవలయును.

గుణ్యస్త్వధోధో గుణఖండతుల్యస్తైః ఖండకైః
స్సంగుణితో యుతో వా।

టీ. గుణఖండతుల్యాః = గుణకముయొక్క ఖండములతో సమమగునదియై అధోధః = క్రింద క్రింద వ్రాయబడిన, గుణ్యః = గుణ్యము, తైః ఖండకైః = ఆగుణకఖండములచే, సంగుణితః = గుణింపబడినదియై, యుతో వా = కలుపబడినదైనను గుణనఫలమగును.

15. ప్ర. ఏసంఖ్యలయోగము గుణకము అగునో అట్టిసంఖ్యలు గలుగునట్లు గుణకమునను ఇష్టములగు ఖండముల జేయుము. ఎన్నిఖండములుగలవో అన్ని

చోట్ల గుణ్యమునువ్రాసి ఆఖండములచే గుణ్యమును వేర్వేర గుణించి కలిపినను గుణనఫలమగును.

గుణకము $12 = 8 + 4$ కావున ఖండములు 8, 4.

$$(135 \times 8) + (135 \times 4) = 1080 + 540 = 1620 = 135 \times 12$$

లేక $135 = 100 + 30 + 5$ కావున ఈఖండములచే 12 ను వేరు వేరుగ గుణించి కలిపినను గుణనఫలమగును. (13 ప్ర. 1 సి. చూ).

కావున $100 \times 12 = 1200$, $30 \times 12 = 360$, $5 \times 12 = 60$ } వీటియోగము 1620 గుణనఫలము. ఈపద్ధతికి యోజ్యయోజక రూపవిభాగ గుణన మని పేరు.

ఉపపత్తి:—5 ను 4 చే గుణింపవలె ననుకొనుము.

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

5 అనగా ఐదుఒకట్లు 4 అనగా నాలుగు ఒకట్లు ఈచక్రమునందు చూపబడినవి. అడ్డముగా గల ఐదుఒకట్లలో 3, 2 ఒకట్లు గలుగునట్లు విభాగము చేయబడెను. ప్రథమ విభాగమునందు 3 చే నాలుగుయొక్క గుణనఫలము 12 ఒకట్లు. రెండవ విభాగమునందు 2 చే 4 యొక్క గుణనఫలము 8 ఒకట్లు వీటియోగము మొత్తము చక్రమునందు 20 ఒకట్లు గుణనఫలము అగుపడుచున్నది.

అనుమానము—దీనిచే ఈవిషయమున్ను సిద్ధించుచున్నది.

ఏరెండురాసులయొక్క అంతరము ఇష్టసంఖ్య అగునో అట్టి రెండురాసులను కల్పింపుము. ఆరెండురాసులచేతను ప్రత్యేకము గుణ్యమును గుణింపుము. ఆగుణనఫలముల యంతరము ఇష్టసంఖ్యచే గుణ్యమును గుణింపనగు గుణనఫలముతో సమము అగుచున్నది

ఉదా:—3 చే 4 ను గుణింపవలయును.

5 యొక్కయు 2 యొక్కయు అంతరము 3 కావున

$(5 \times 4) - (2 \times 4) = 3 \times 4 = 20 - 8 = 12$ అగుచున్నది.

భక్తో గుణ శ్శుధ్యతి యేన తేన లబ్ధ్యా చ గుణ్యో గుణితః ఫలంవా॥ ౧౩॥

టీ. గుణః = గుణకము, యేన = ఏసంఖ్యచే, భక్తః = భాగింపబడినదై, శుధ్యతి = నిశ్శేషమగునో, తేన = ఆసంఖ్యచేతను, లబ్ధ్యాచ = భాగింపగా వచ్చు (లబ్ధ) సంఖ్యచేతను, గుణ్యః = గుణ్యము, గుణితః = గుణింపబడినదై, వా = ప్రకారాంతరముచే, ఫలం = ఫలమగును.

16 ప్ర. గుణ్యగుణకములలో నొకదానిని (గుణకము ననుకొందము) ఏరెండురాసుల గుణనఫలము ఆఒకసంఖ్య అగునో అట్టిరెండురాసులుగ (గుణ్యగుణక ఖండములుగ) విభజింపుము. ఈ ఖండములలో నొకదానిచే ఆమరియొకరాసిని (గుణ్యమును) గుణింపుము. పిమ్మట ఆగుణనఫలమును రెండవఖండముచే గుణింపుము. అట్లును గుణనఫలము సిద్ధించును. ఇది గుణ్యగుణక రూపవిభాగ గుణనము.

ఉదా :—135 × 12.

∵ 4 × 3 = 12 ∴ 4, 3 ఖండములు కల్పింపబడెను.

సూత్రముచే 135 × 4 × 3 = 540 × 3 = 1620.

లేక ∵ 6 × 2 = 12 ∴ 135 × 6 × 2 = 1620.

ఉపపత్తి:— గుణ్యము 5 గుణకము 6 అనుకొందము.

2 × 3 = 6 కావున గుణకమునందు 2. 3 అను ఖండములు చేయబడెను.

1 చక్రము

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

2 చక్రము

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

ఈపైరెండుచక్రములందును ప్రత్యేకము 5 యొక్కయు 6 యొక్క గుణనఫలమగుఒకట్లు చూపబడినవి. ఒకటవచక్రమునందు మధ్యయందు ఒకఅడ్డగీటును గీయుటచేనైన రెండువిభాగములందును ప్రత్యేకము 15 ఒకట్లు గలవు. ఇది 5 యొక్కయు 3 యొక్కయు గుణనఫలముతో సమమగుచున్నవి. రెండవచక్రమునందు అడ్డముగా రెండుగీటులు గీయుటచే 3 సమానభాగము లైనవి. ప్రతి విభాగమునందును 5 యొక్కయు, 2 యొక్కయు గుణనఫలముతోడ సమములగు 10 ఒకట్లు గలవు. కావున నీరెండుచక్రములను విమర్శముగ చూచిన "5 ను మొదట 3 చే గుణించి పిమ్మట 2 చే గుణించినను (1 చక్రము చూ) మొదట 2 చే గుణించి పిమ్మట 3 చే గుణించినను (2 చక్రము చూ) 5 యొక్కయు, 6 యొక్కయు గుణనఫలముతో సమముగ గుణనఫలమగును" అను విషయము స్పష్టమగుచున్నది.

దీనివలన నీవిషయములును స్పష్టములగుచున్నవి.

(1) అను గుణకమును అన్ని ఖండములయొక్కయు గుణనఫలము గుణకమగునట్లు రెండిటికంటె నధికములగు ఖండములజేసి అన్నిఖండములచేతను గుణ్యమును గుణించుచు రాగా తుదనైన గుణనఫలము ఆగుణ్యగుణకముల గుణనఫలమగును.

(2) అను రెండిటికంటె నధికములగు సంఖ్యలకు గుణనఫలము వలసినచో నాసంఖ్యలను ఏక్రమముగా పరస్పరము గుణించినను గుణనఫల మొక్కటియే యగును.

ఉదా:—$5 \times 4 \times 3 \times 2 = 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 5 \times 3 \times 4 \times 2$
$= 5 \times 2 \times 4 \times 3 = 120$

సూ॥ ద్విధా భవే ద్రూపవిభాగ ఏవం—

టీ॥ ఏవం = ఈప్రకారముగా, రూపవిభాగః ద్విధా భవేత్ = యోజ్యయోజకరూపవిభాగమనియు గుణ్యగుణక రూపవిభాగమనియు రూపవిభాగము

రెండువిధములుగ నగుచున్నది పై ఉపపత్తి ప్రకారమునుబట్టియే భాజ్యభాజక కల్పనమున్ను సిద్ధించుచున్నది.

(3) అను గుణకము లబ్ధిగా వచ్చునట్లు భాజ్యభాజకములను కల్పింపుము. అట్టి భాజ్యముచే గుణ్యమును తొలుతగుణించి ఆగుణనఫలమును భాజకముచే భాగింపుము. ఆలబ్ధము గుణ్యగుణకముల గుణనఫలము అగుచున్నది.

ఉదా:— గుణ్యము 6 గుణకము 5 $\therefore 5 = 10 \div 2$.

$\therefore (6 \times 10) \div 2 = 6 \times 5 = 30$ అగుచున్నది.

సూ॥ స్థానైఃపృథగ్వాగుణితస్సమేతః॥

టీ॥ స్థానైః = ఏకాదిస్థానాంకములచే, పృథక్ = వేరుగ, గుణితః = గుణింపబడినదై, సమేతోవా = కలుపబడినదైనను గుణనఫలమగును.

17. ప్ర. గుణకమున ననేకాంకములు గలిగినయెడల గుణించుపద్ధతి.

గుణ్యముక్రింద గుణకమును గుణ్యముయొక్క ఏకాదిస్థానాంకముల క్రిందుగ గుణకముయొక్క ఏకాదిస్థానాంకము లుండునట్లు వ్రాసి, గీటును గీయుము. తొలుత గుణకముయొక్క ఏకస్థానాంకముచే (14 ప్ర 1 ప)గుణ్యమును గుణించి వ్రాయుము. తిరుగ గుణకదశస్థానాంకముచే గుణ్యమును గుణించి ఈగుణన ఫలమును దీని ఏకాది స్థానాంకములు మొదట గుణనఫలముయొక్క దశాదిస్థానాంకముల క్రిందుగ నుండునట్లు వ్రాయుము. ఇట్లు గుణకముయొక్క ప్రతియంకము చేతను గుణ్యమును లిఖింపుచు తిరుగతిరుగ పూర్వపూర్వ గుణనఫలములయొక్క దశాదిస్థానాంకముల క్రిందుగ నుత్తరోత్తర గుణనఫలముల ఏకాదిస్థానాంకము లుండునట్లు లిఖింపుము. తుదను అన్ని గుణనఫలములయొక్కయు యోగము గుణ్యగుణకముల సంపూర్ణ గుణనఫలమగును.

అందు ఈవిశేషమును గమనింపవలయును.

గుణకసంఖ్యయొక్క మధ్యను శూన్యము గలిగినచో అశూన్యముచే గుణింపనగు గుణనఫలము శూన్యమే యగును. (13 ప్ర 2 సి. చూ) కాని పూర్వ

గుణనఫలదశస్థానాంకము క్రింద శూన్యమును వ్రాసి గలిపినను విశేషములేదు. ఐనను శూన్యముయొక్క ఎడమవైపునగల యంకెచే గుణింపనగు గుణనఫలమును మాత్రము. పూర్వయుక్తిచే శూన్యముయొక్క దశస్థానమునుండి అనగా ఎడమ వైపునుండి వ్రాయవలయును కావున శూన్యముయొక్క కుడివైపున అంకెచే గుణింపనగు గుణనఫలముయొక్క దశస్థానమునుండి ఎన్నిశూన్యములుగలవో అన్ని స్థానములఁ విడచి శూన్యముల కెడమవైపుననున్న యంకెచే గుణింపనగు గుణనఫలమును వ్రాయవలయును.

అనగా గణకమునందలి ఏయంకెచే గుణ్యమును గుణించితిమో ఆగుణకాంకమునకు తిన్నగా క్రిందుగ ఆగుణనఫలముయొక్క ఏకస్థానాంకము ఉండవలెను. ఇది స్థానవిభాగగుణనము—

ఉదా:— గుణ్యము 135 గుణకము 12

135
12
———
270 గుణకముయొక్క ఏకస్థానాంకగుణనఫలము.
135 దశస్థానాంక గుణనఫలము.
———
1620 పైగుణనఫలముల యోగము. గుణనఫలము.

(2) ఉదా:—గుణ్య 4358. గుణక 2304.

4358
2304
———
17432 ఏకస్థానాంక 4 గుణనఫలము.
13074 . ఒకశూన్యము గాన ఒకస్థానమువిడచి లిఖించిన శతస్థానాంక 3 గుణన ఫలము.
9016 సహస్రస్థానాంక 2 గుణనఫలము.
———
10340832 యోగము గుణనఫలము

దీనికియుక్తి:—గుణ్యము 5368. గుణక 346.

(4 ప్ర) చే 346 = 300 + 40 + 6 కావున (15 ప్ర) చే 346 యొక్క విభాగములైన 300, 40 6 వీటిచే ప్రత్యేకము గుణ్యమును గుణించి యోగము చేసినను గుణనఫలము గావలయును.

కావున (1) $5368 \times 6 = 32208$

(2) 5368 × 40 ఇచట గుణ్యమును 4 చే గుణించి శూన్యమును వ్రాసినఁగను సంఖ్య గుణనఫలమగును. 40 = 4 × 10 కావున

5368 × 10 = 5368 × 4 × 10 = 21472 × 10 (13 ప్ర 3 సి. చూ)

= 214720 అగుచున్నది

ఇట్లు 5368 × 300 = 1610400

ఈగుణనఫలములన్నిటియొక్కయు యోగము పూర్ణగుణనఫల మగుచున్నది. కాని ఈగుణఫలముల నన్నిటిని లిఖించి కలిపినను, రెండవది మొదలగు గుణనఫలములందలి ఒకటి మొదలగు శూన్యములను తుడిచి ఆగుణనఫలములను క్రమముగ క్రిందక్రిందుగ తమతమదశస్థానములక్రిందుగ అనంతరములగు గుణనఫలముల ఏకస్థానములుండునట్లు లిఖించి కలిపినను యోగము సమముగనే అగుచున్నది.

రెండును ఇచట చూపబడుచున్నవి.

శూన్యసహిత గుణనఫలములు	శూన్యరహిత గుణనఫలములు.
32208	32208
214720	21472
1610400	16104
1857328 యోగము.	1857328 యోగము.

ఈరెండుయోగములు సమములే యగుచున్నవిగావున రెండవయోగమున్ను పూర్ణగుణనఫలము అగును. ఇట్లు (17 ప్ర) పద్ధతియొక్క ఉపపత్తి స్పష్టమగుచున్నది.

అనుమానము:—పై ఉపపత్తియందు చూపబడిన 40, 300 ఈసంఖ్యల గుణనపద్ధతిచే నీవిషయము సిద్ధించుచున్నది.

గుణ్యగుణకములలో రెండిటియందుగాని ఏదోఒకదానియందుగాని ఏకస్థానమునుండి ఎన్నిశూన్యములుగలవో అన్నిటిని విడిగానుంచి శూన్యరహితములగు గుణ్యగుణకములకు గుణనఫలమును జేసి ఆగుణనఫలమునకుముందు అన్నిశూన్యములను లిఖింప పూర్ణగుణనఫలమగును.

ఉదా:—6700 × 810.

6700 ఇందు రెండు శూన్యములుగలవు. 810 ఇందు ఒకశూన్యముగలదు. ఈమూడు శూన్యములను విడిచి శూన్యరహితములగు గుణ్యగుణకముల గుణింప గుణనఫలము 67 × 81 = 5427 అగుచున్నది దీనికి ముందు మూడుశూన్యములను జేర్పగా గుణనఫలము 5427000 అగుచున్నది.

దీనికి ఉపపత్తి:—6700 = 67 × 100 ఇట్లు 810 = 81 × 10 (16 ప్ర చూ)

∴ 6700 × 810 = (68 × 100) × (71 × 10)

= 67 × 100 × 81 × 10 = 67 × 81 × 100 × 10

= 67 × 81 × 1000 = 5427 × 1000 (13 ప్ర 31 సి చూ.)

దీనింబట్టి అనుమానోపపత్తి స్పష్టము గాగలదు.

ఇష్టోనయుక్తేన గుణేన నిఘ్నోఽభీష్టఘ్నగుణ్యాన్వితవర్జితో వా ॥౧౮॥

టీ॥ ఇష్టోనయుక్తేన = ఇష్టాంకముచే తీసివేయబడినదిగాని కలుపబడినదిగాని యగు, గుణేన = గుణకముచే, నిఘ్నః = గుణింపబడిన (గుణ్యః = గుణ్యము) అభీష్టఘ్నగుణ్యాన్వితవర్జితో వా = ఆ ఇష్టాంకముచే గుణింపబడిన గుణ్యముచే కలుపబడిన దైనను తీసివేయబడిన దైనను గుణనఫలమగును.

18. ప్ర. గుణకమునందు ఏదేని ఒకసంఖ్యను కలుపుము, లేక గుణకమువలన నేదేని ఒకసంఖ్యను వ్యవకలింపుము గుణ్యమును ఆయోగముచేగాని అంతరముచేగాని గుణింపుము. ఆయోగముచే గుణించినచో ఆఇష్టసంఖ్యచే గుణ్యమును వేరుగ గుణించి ఈగుణనఫలమును వ్యవకలింపుము అంతరముచే గుణించినచో నాయిష్టసంఖ్యచే గుణ్యమును గుణించనగు గుణనఫలమును కలుపుము.

ఉదా:- 135 × 12

ఇచట 2 ఇష్టసంఖ్య కల్పించుదము.

$$12 - 2 = 10 \therefore 135 \times 12 = (135 \times 10) + (135 \times 2) = 1620$$

లేక 8 ఇష్టసంఖ్య యనుచో

$$12 + 8 = 20 \therefore 135 \times 12 = (135 \times 20) - (135 \times 8) = 1620$$

"గుణ్యస్త్వధోధో" అనుసూత్ర (15 ప్ర) పద్ధతికిని ఈపద్ధతికిని భేదములేదు. కాని భాస్కరాచార్యులు ఈసూత్రమును వేరుగ చెప్పుటకు కారణము గమనింప వలసియున్నది. అందు (15 ప్ర) యోజ్యయోజక రూపవిభాగగుణనమే చెప్పబడి నది. వియోజ్య వియోజక విభాగగుణనము తాత్పర్యముచే సిద్ధించుచున్నది. వాస్తవముచే నీరెండుపద్ధతులకును విశేష తారతమ్యములేదు.

ఈసూత్రమునందు ఆరెండుపద్ధతులను స్పష్టముగ జెప్పినట్లు కనుపించు చున్నది. కాని ఉదాహరణమునందు "గుణ్యస్త్వధోధో......" సూత్రమునకు లక్ష్యముగ "గుణరూపవిభాగే కృతే ఖండే ౪,౮" ఇట్లు 12 ను విభజించిచూపిరి.

ఈసూత్రమునకు లక్ష్యముగ "ద్వ్యూనేన గుణకేన ౧౦ ద్వాభ్యాం ౨ చపృథగ్గుణ్యే గుణితే" అనియు "అష్టయుతేన గుణకేన ౨౦ గుణ్యే గుణితే అష్ట గుణిత గుణ్యహీనేచ" అనియు ఉదాహరణము చూపిరి, దీనింబట్టి యథేచ్ఛ ముగ యోజ్యయోజక కల్పనము వియోజ్యవియోజక కల్పనము "గుణ్యస్త్వ ధోధో" ఇత్యాది సూత్రవిషయములనియు. అట్లుగాక 432 చే గుణింపవలయునను చోట (4, 5 ప్ర) స్థానానుగుణముగ 400, 30, 2 అనునట్లును లేక 500, 60 అను నట్లును విభజించి గుణించుట ఈసూత్రమందలి ఖండగుణనమునకు విషయములనియు గ్రహింపవలసియున్నది.

ఇందులకుపపత్తి (15 ప్ర) ఇదివరలో సూచింపబడియుండెను.

అత్రోద్దేశకః

బాలే బాలకురంగలోలనయనే లీలావతి ప్రోచ్యతాం
పంచత్ర్యేకమితా దివాకరగుణా అంకాః కతి స్యుర్యది।
రూపస్థానవిభాగఖండగుణనే కల్యాసి కల్యాణిని
(ఛిన్నాస్తేన గుణేన తే చ గుణితా జాతాః కతి స్యుర్వద)॥ ౨॥

న్యాసః ౧౩౫ గుణ్యః ౧౨ గుణకః

గుణ్యాన్త్యమంకం గుణకేనహన్యా దితి కృతే జాతం ౧౬౨౦

అథవా గుణరూపవిభాగే కృతే ఖండే ౪-౮ ఆభ్యాం పృథగ్గుణ్యే గుణితే యుతే చజాతం తదేవ ౧౬౨౦

అథవా స్థానవిభాగే కృతే ఖండే ౧-౨ ఆభ్యాం పృథగ్గుణ్యే గుణితే యథాస్థానయుతేచ జాతం తదేవ ౧౬౨౦

అథవాష్ట యుతేన గుణకేన ౨౦ గుణితే అష్టగుణిత గుణ్య హీనేచ జాతం తదేవ ౧౬౨౦,

తా. పిల్లలేడిపిల్ల చలించు కనులవంటి కనులుగలిగిన బాలికా! లీలా వతీ! కల్యాణివి! నీవు రూపవిభాగగుణనములందును స్థానవిభాగగుణనమునందును ఖండగుణనమునందును సమర్థురాలవగుచో 135 ఈఅంకములు 12చే గుణింపబడిన వగుచో ఎంత యగును? చెప్పుము.

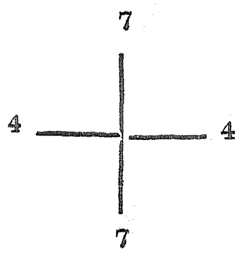
సామాన్యగుణనము యోజ్యయోజకరూపవిభాగగుణనము, వియోజ్యవియో జకకల్పనాగుణనము. స్థానవిభాగగుణనము. ఖండగుణనము. ఈపద్ధతులును ఉదాహరణములును సూత్రవివరణమునందు చూపబడినవి.

గుణనఫల పరీక్ష.

అడ్డముగా ఒకగీటుగీసి దానిమీంద మధ్యను ఛేదించునట్లు మరియొక రేఖను చేయుము (ధనచిహ్నమువలె). గుణ్యమునందలి అంకములన్నిటిని ఒకే

అంకె అగువరకును కలిపి ఒకవైపునను అట్లు గుణకమునందలి యంకములన్నిటిని కలిపి మరియొకవైపునను వ్రాయుము. గుణనఫలాంకములయోగమును నిడుపుగీటునకు క్రిందుగ వ్రాయుము. అడ్డగీటునకు రెండువైపులనున్న అంకెలగుణనఫలమునందలి అంకములయోగమును నిడుపుగీటునకు పైన వ్రాయుము. నిడుపుగీటునకు ఊర్ధ్వాధరప్రదేశములందు వ్రాయబడిన అంకెలు సమానములగుచో నాగుణనఫలము సరియైనదియని గ్రహింపవలెను.

ఉదా:—గుణ్యము 5368 గుణక 346 గుణనఫలము 1857328.



గుణ్యాంకయోగము 5 + 3 + 6 + 8 = 22 కావున 2 + 2 = 4. గుణకాంకయోగము 3 + 4 + 6 = 13 కావున 1 + 3 = 4. గుణనఫలాంకయోగము 1 + 8 + 5 + 7 + 3 + 2 + 8 = 34 కావున 3 + 4 = 7. ఇరువైపులనున్న యంకెల గుణనము 4 × 4 = 16 దీనియోగము 1 + 6 = 7

ఊర్ధ్వాధరాంకములు సరిపడుచున్న విధాపున గుణనఫలము సరిపోయినది.

గుణనోదాహరణములు.

(1)	(2)	(3)
7854219	852147	7354000
317	3825	29300
2489787423	3259462275	215472200000

గుణనమును సంబంధించిన ప్రశ్నములు.

(1) 1 అణాకు 9 మామిడిపండ్లు బజారుధర అగుచున్నది. అణాలు 5 కు ఎన్నిమామిడిపండ్లు వచ్చును.

(2) ఒకవ్యవసాయదారుడు 32 పురుషులను, 27 స్త్రీలను కూలికిపిలచి పనిని చేయించెను. ఒక్కొకమగవానికి అణాలు 3 కూలి. ఆడవాండ్లకు ఒక్కొక్కతెకు అణాలు 2 కూలి ఇవచ్చో మొత్తము వారలకైన కూలియెంత ?

(3) ఒకతోటయందు 20 మామిడిచెట్లు గలవు. ఒక్కొకచెట్టునకును 437 కాయలుగలవు. మొత్తముగల కాయలెన్ని ?

(4) ఒకఉద్యోగి నెల 1 కి 37 రూపాయిలు వేతనమునకు ఒప్పుకొని 19 మాసములు పనిచేసెను. వానికిమొత్తము వచ్చు వేతనమెంత ?

భాగహారము.

19. ప్ర. రెండుసంఖ్యలలో ఒకసంఖ్య యెంతయో అన్నివస్తువులను రెండవసంఖ్యయెంతయో అన్నిసమానభాగములుగ విభజింపగా నగు ప్రత్యేకభాగసంబంధమైన సంఖ్య లబ్ధము లేక భజనఫలము అని చెప్పబడును. ఆలబ్ధమునెరుంగుటకు చేయుక్రియ భాగహారము (భజనము భాగించుట) ఆరెండుసంఖ్యలలో మొదటిసంఖ్య అనగా విభజింపబడునది భాజ్యము రెండవది అనగా విభజించు సంఖ్య భాజకము.

ఉదా:—24 ఫలములను 4 గురు పంచుకొనవలయును అనగా నాలుగు సమభాగములు చేయవలయును. అట్లుచేయగా ప్రత్యేకవిభాగసంఖ్య 6. ఇట్లు విభజించుట భాగహారము. 24 భాజ్యము. 4 భాజకము. 6 లబ్ధము.

ఈలబ్ధలక్షణమును బట్టి అనగా ఒకసంఖ్యకైన అభీష్టములగు సమానభాగములలో ప్రత్యేకభాగసంఖ్య లబ్ధముగాన ఆప్రత్యేకభాగసంఖ్యలను అభీష్టసంఖ్యయెంతయో అన్నిస్థానములందుంచి కలుపగా అనగా (12 ప్ర.)చే అభీష్టసంఖ్యచే గుణింపగా మొదటిసంఖ్య యగునని స్పష్టమగుచున్నది కావున లబ్ధముచే భాజకమును గుణింపనగు ఫలము భాజ్యము. (13 ప్ర 1 సి) చే భాజకముచే లబ్ధమును గుణించినను గుణనఫలము భాజ్యతుల్యమే యగుచున్నది.

భాజకలబ్ధములలో నొకటిగుణ్యము. రెండవది గుణకము కావున గుణనఫలమగుభాజ్యము. (12 ప్ర) గుణనసంఖ్యయెంతయో అన్నిపర్యాయములు గుణ్యమునునిచి కలుపగానైన మొత్తమే యగుటచే దీనికి తలక్రిందుగా భాజ్యమునుండి భాజకమును తీయగా తీయగా వ్యవకలింపుచుండగా నెన్నిపర్యాయములకు నిశ్శేషమగునో ఆపర్యాయసంఖ్యయే లబ్ధమగుచున్నది.

ఉదా:—24 ను 4 చే భాగింపవలయును.

$$\begin{array}{r} 24 \\ 4 \\ \hline 20 \\ 4 \\ \hline 16 \\ 4 \\ \hline 12 \\ 4 \\ \hline 8 \\ 4 \\ \hline 4 \\ 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

మొదట 24 లో 4 ను తీసివేయ 20. ఇందులో 4 ను తీసివేయ 16. ఇందులో 4 ను తీసివేయ 12. ఈప్రకారము తుదివరకును 4ను తీసివేయుచుండగా 8, 4 కావున ఇచట 6 పర్యాయములు 4 తీసి వేయబడెను. కావున 6 లబ్ధమయ్యెను.

ఈకారణముచే భాగహారము వ్యవకలనముయొక్క రూపాంతరమని చెప్పబడెను.

మరియు భాజకముయొక్కయు లబ్ధముయొక్కయు గుణనఫలమే భాజ్యముకాబట్టి భాజకముచే భాజ్యమును భాగించుట అనగా భాజకమును ఏసంఖ్యచే గుణింపగా భాజ్యతుల్యగుణనఫలమగునో అట్టిసంఖ్యను గనుంగొనుట కావున భాగహారము గుణనముయొక్క విపరీతవిధి యని తెలియుచున్నది.

20\. ప్ర. భాగహారము గుణనముయొక్క విపరీతవిధిగావున దానింబట్టి కొన్ని సిద్ధాంతములు తెలుపబడుచున్నవి.

(1) ఏసంఖ్యలయొక్క యోగము భాజ్యమగునో అట్టిసంఖ్యలుగలుగునట్లు భాజ్యమునకు ఇష్టములగు ఖండములను చేయుము. ప్రతిఖండమును భాజకముచే భాగించి ఆలబ్ధములను కలుపగా లబ్ధములయోగము భాజ్యభాజకముల లబ్ధమగును.

ఉదా:— భాజ్య 24 భాజక 4.

భాజ్యము 24 నకు 8, 16 అను ఖండములు చేయబడినవి భాజకము 4 చే 8 ని భాగింప లబ్ధము 2 అగుచున్నది. 16 ను భాగింప 4 లబ్ధము. లబ్ధముల యోగము $4 + 2 = 6$ పూర్ణలబ్ధము. దీనిఉపపత్తి (15 ప్ర.) గుణనవిధియొక్క వైపరీత్యముచే స్పష్టమగుచున్నది.

అనుమానము:—

పైసిద్ధాంతమునుబట్టి ఈవిషయము సిద్ధించుచున్నది. ఏరాసులయొక్క అంతరము భాజ్యమగుచున్నదో అట్టి రెండురాసులను భాజకముచేవేర్వేరభాగించి

ఆలబ్ధములయంతరము చేసిన నదియు లబ్ధమగును. దీనిఉపపత్తి (15 ప్ర) అనుమానవైపరీత్యముచే స్పష్టమగుచున్నది.

(2) ఏరెండురాసుల గుణనఫలము భాజకమగునో అట్టిరాసులుగ భాజకమును విభజించి తొలుత నొకరాశిచే భాజ్యమును భాగింపుము. ఆలబ్ధమును తిరుగ రెండవరాశిచే భాగింపుము. రెండవలబ్ధము భాజ్యభాజకముల లబ్ధమగును.

ఉదా:— 24 ను 6 చే భాగింపవలయును.

$6 = 2 \times 3$ కావున $24 \div 3 = 8$ దీనిని 2 చే భాగింప $8 \div 2 = 4$ ఈరెండవలబ్ధము 24 ను 6 చే భాగింపనగు లబ్ధమగుచున్నది. దీనియుపపత్తి (16 ప్ర) గుణనవిధివైపరీత్యముచే స్పష్టము.

అనుమానము:—(16 ప్ర 1.2 అను) వైపరీత్యముచే

ఏసంఖ్యలయొక్క గుణనఫలము భాజకమగునో అట్టిసంఖ్యలు గలుగునట్లు భాజకమునందు రెంటికంటె నధికములగు ఖండములనుజేసి ప్రత్యేకఖండములచే నేక్రమముగా భాజ్యమును భాగింపుచువచ్చినను తుదిలబ్ధము పూర్ణలబ్ధమగును.

(3) భాజ్యభాజకములలో భాజ్యము శూన్యమగుచో లబ్ధమున్నశూన్యమే యగును.

యుక్తి:— భాజ్యము భాజకముయొక్కయు లబ్ధముయొక్కయు గుణనఫలముతో సమానమే యగునుగదా ! కాబట్టి భాజకముచే శూన్యమును గుణించిన యెడల గుణనఫలము శూన్యమే యగుచున్నది. గావున భాజ్యముశూన్యమగునపుడు లబ్ధము శూన్యమే గావలయును.

(4) భాజ్యభాజకములలో భాజకము 1 టి యగుచో లబ్ధముభాజ్యముతో సమమగుచున్నది.

యుక్తి:—భాజకమును లబ్ధముచే గుణించినచో గుణనఫలము భాజ్యసమమే యగుచున్నది.

(5) భాజ్యభాజకములలో భాజకము 10, 100, 1000 ఇత్యాదిసంఖ్యగా నున్నది. భాజ్యమునందును తుదను (కుడివైపున) క్రమముగా ఒకటి, రెండు, మూడు మొదలగు సున్నలు గలవు. అపుడు భాజకమునందు ఒకటికి (ఏకసంఖ్యకు) పైన ఎన్నిసున్నలు గలవో అన్నిటిని భాజ్యమునందలి శూన్యములను తీసివేసి మిగిలినసంఖ్యను లబ్ధముగా నెరుంగవలయును

ఉదా:—భాజకము 100 భాజ్యము 83200 కావున లబ్ధము 832 దీని యుపపత్తి (13 ప్ర 3 సి) చే స్పష్టము గాగలదు.

(6) భాజ్యమునున్ను భాజకమునున్ను రెండిటిని అభీష్టమగు నొకానొక సంఖ్యచే గుణింపుము. లేక భాగింపుము. అపుడు క్రొత్తవియగు భాజ్యభాజకములకును మొదట యేలబ్ధము వచ్చునో ఆలబ్ధమే వచ్చును.

దీనికియుక్తి:—మొదట భాజకమును ఇష్టాంకముచే గుణించి తిరుగ ఆఫలమును లబ్ధముచే గుణింపుము. అపు డాగుణనఫలము భాజ్యమును ఇష్టాంకముచే గుణించిన నగు గుణనఫలముతో సమాన మగుచున్నది.

భాజకమును లబ్ధముచే గుణింప భాజ్యతుల్యము అగుచున్నది. కావున ఇష్టాంకముచే భాజ్యమును గుణింప భాజక లబ్ధ ఇష్టాంకముల గుణనఫలముతో సమానమగుచున్నది. కాబట్టి దానిని భాజకఇష్టాంకముల గుణనఫలముచే భాగింప లబ్ధమే మిగులుచున్నది. (16 ప్ర 1 అను) చూ.

ఉదా:—$8 \times 9 = 72$ కావున $72 \div 9 = 8$ లబ్ధం భాజకము 9 ను లబ్ధము 8 చే గుణింప 72 ఇష్టాంకము 4 చే గుణింప $8 \times 9 \times 4 = 288$ భాజ్యమును గుణింప $72 \times 4 = 288$

$$\therefore (72 \times 4) \div (9 \times 4) = (9 \times 8 \times 4) \div (9 \times 4) = 8$$

దీనికితలక్రిందుగ ఇష్టాంకముచే భాగించుటయందును యుక్తిని గ్రహించునది.

21. ప్ర. ఇదివరలో (19 ప్ర) చూపబడిన పద్ధతిచే ఆఉదాహరణమునందు 24 నుండి 4 ను తీసివేయుచు రాగా తుదను భాజ్యము నిశ్శేషమగుచున్నది.

కాని 27 భాజ్యమగుచో దానినుండి 4 ను తీసివేయుచురాగా తుదను 3 మిగులుచున్నది. ఈ 3 నందు 4 తీసివేయబడదు. ఇప్రుడు సరియగు లబ్ధమెద్ది? అను విషయమునుగూర్చి చెప్పబడుచున్నది.

ఇచట భాజ్యమునందు రెండుఖండములను కల్పింపుము. మొదటిది భాజకముచే నిశ్శేషముగ భాగింపబడుసంఖ్య. రెండవది శేషతుల్యమగు సంఖ్య. ఇట్టి ఖండములను గల్పింపుము.

ఉదా:—27 నందు 4 చే భాగింప నిశ్శేషమగుసంఖ్య 24, శేషతుల్యమగుసంఖ్య 3. ఇపుడు 24 ను 4 చే భాగింపవచ్చులబ్ధము 6 సరియగు లబ్ధమగుచున్నది. రెండవఖండము 3 ను 4 చే భాగింప, 1 టి కంటె తక్కువ లబ్ధము వచ్చును. పూర్ణసంఖ్య ఎద్దియు లబ్ధముగాదు. భిన్నసంఖ్య యగును. కావున నిట్లు భిన్నసంఖ్యారూపముగ వ్రాయుదురు. ఎట్లనగా:—శేషసంఖ్యకు క్రిందుగనొక అడ్డరేఖను గీచి దానిక్రింద భాజకసంఖ్యను వ్రాయుదురు. $\frac{3}{4}$ అనగా 27ను 4 చే భాగించుటకై 27 నందు 24, 3 అను రెండుఖండములుచేసి వేరుగ భాగింపగా 6 ను $\frac{3}{4}$ న్ను లబ్ధములు వచ్చినవి. ఈరెండులబ్ధములయొక్కయు యోగము $6 + \frac{3}{4}$ (20 ప్ర 1 సి) చే 27 ను 4 చే భాగింపనగు పూర్ణలబ్ధ మగుచున్నది. ఇట్లుగ దీనిని వ్రాయుదురు $6\frac{3}{4}$ ఇచట 6 పూర్ణాంకము $\frac{3}{4}$ భిన్నాంకము (దీనినిగూర్చి భిన్నప్రకరణమున బాగుగ వ్రాయబడును.)

దీనిపరిమాణము నెరుంగవలసినచో

27 ను 4 చే భాగించుట యనగా రూ 27 లను 4 గురు పంచుకొనుట యనుకొందము. నలుగురిలో ఒక్కొక్కనికి రూ 6 లు వచ్చినవి. ఇట్లు పంచుకొనగా రూ 3 లు మిగిలినవి. మనుష్యులు 4 గురు, రూపాయిలు 3 మాత్రమే. కావున చిల్లరిగ మార్చి విభజింప వలయును. రూ 1 టికి తక్కువగానే లబ్ధము కావలసియున్నది. ఇపుడు రూ 3 లను అణాలుగ మార్చవలయును. రూ 1 టికి అణాలు 16 కావున $3 \times 16 = 48$ అణాలు అగుచున్నవి. దీని 48 ని 4 చే భాగింప 12 అణాలు లబ్ధమువచ్చెను. కావున ఒక్కొక్కనికి రూ 6 లు 12 అణాలు భాగము వచ్చెనని తెలియదగియున్నది.

ఇట్లు ఇతరపరిమాణముల విభజించునప్పుడును ఇతరభాగహారములందును తెలియదగినది.

అను:—భాజకముచే భాజ్యమును భాగింపగా శేషము మిగిలినచో నపుడు భాజకముచే లబ్ధమును గుణించి అందు శేషమును గలుప భాజ్యముతో సమమగును మరియును శేషమును భాజ్యమునుండి తీసివేయగా నైన యంతరమును భాజకముచే భాగించినచో నిశ్శేషమగును.

భాగహారే కరణసూత్రం వృత్తమ్

భాజ్యా ద్ధర శ్శుధ్యతి యద్గుణ స్స్యా
దంత్యా త్ఫలం తత్ఖలు భాగహారే॥

టీ॥ యద్గుణః = దేనిచే గుణింపబడిన, హరః = భాజకము, భాజ్యాత్ = భాజ్యమువలన, అంత్యాత్ = అంత్యాంకము మొదలుకొని, శుధ్యతి = నిశ్శేషముగతీసివేయబడుచున్నదో, తత్ = ఆఅంకె, భాగహారే = భాగహారమునందు, ఫలంఖలు = లబ్ధముగదా!

లబ్ధభాజకముల గుణనము భాజ్యముతోడ సమమగును కావున నేసంఖ్యచే గుణింపబడినభాజకము భాజ్యమునుండి నిశ్శేషముగ తీసివేయబడునో ఆసంఖ్య లబ్ధము. కాని భాగహారము అంత్యాంకమునుండి (భాజ్యమునందు ఎడమవైపునున్న తుదయంకెనుండి) చేయవలయును. లబ్ధమున్ను తుదఅంకె నుండియే యగుచున్నది. అనిసూత్ర తాత్పర్యము.

22. ప్ర. వివరణము:—ఇదివరలో భాగహారము గుణనమునకు విపరీతమని చెప్పబడెను. (19. ప్ర.) దానిననుసరించి భాగహారపద్ధతి చూపబడుచున్నది.

గుణ్యము	5378
గుణకము	4592
	10756
	48402
	26890
	21512
గుణనఫలము.	24695776

గుణకమునందలి ప్రతిస్థానాంకముచేతను గుణ్యమునుగుణించి స్థానభేదముచే గలిపి గుణనఫలము చూపబడినది. ఈగుణనఫలమును భాజ్యముగా కల్పించి గుణ్యమును భాజకముగా కల్పించి భాగించినయెడల భాగహారము గుణనముయొక్క విపరీత విధియే గాన గుణకమే లబ్ధముగా రావలయును.

(కేవలము భాజ్యమున్ను భాజకమున్ను తెలిసినపుడు లబ్ధము నొక్కమారు తెలియుట శ్రమసాధ్యము. కావున లబ్ధమునందలి యొక్కొక యంకెను తుదనుండి క్రమముగ నెరుంగవచ్చును) పైగుణకారమునందు గుణ్యమును (భాజకమును) గుణకము (లబ్ధము) నందలి ప్రతిస్థానాంకముచేతను గుణించిన గుణనఫలములు క్రమముగా చూపబడినవి. వాటియోగమే భాజ్యము. కావున తుదనుండి భాజ్యమునందు క్రమముగా గుణకముయొక్క (లబ్ధముయొక్క) అంత్యాంకము మొదలగు నంకెలచే గుణ్యమును (భాజకమును) గుణింపగానగు గుణనఫలములను తీసివేయుచురాగా తుదకు నిశ్శేషమగుననియు స్పష్టముగ పైగుణనమువలన తెలియుచున్నది. ఈరీతిగనే భాజ్యమునున్ను భాజకమునున్ను మాత్రమే తెలిసి లబ్ధమునుగూడ గనుంగొనవచ్చును.

భాజ్యసంఖ్యలో నెడమవైపుతుదనుండి భాజకముతోడ నించుమించుగ సమమైన పెద్దదియగు సంఖ్యాసమూహమును ముందు వియోజ్యముగ గల్పించి దానివలన భాజకముకంటె నెక్కువశేషము మిగులకుండులాగున ఏసంఖ్యచే భాజకమును గుణించినచో ఇంచుమించుగ కల్పితవియోజ్యముతో సమమగుచున్నదో ఆసంఖ్యచే గుణించి తీసివేయవలయును. ఇచట భాజకము 5378. దీనితో నించుమించుగ సమమై భాజ్యమందలిదియగు పెద్దసంఖ్య 24695 దీనివలన 5378 ని 4 చే గుణింపనగు 21512 ఇంచుమించుగ సమమై తీసివేయబడుచున్నది. ఇట్లు తీసివేయగా శేషము. 3183 ఇందు కుడిప్రక్క మిగిలిన భాజ్యమందలి యంకెలను జేర్పగా మిగిలినభాజ్యము 3183776 ఈరీతిగనే క్రమముగా భాజకమును గుణింపుచు తీసివేయుచురాగా నైన గుణకములు క్రమముగా 4, 5, 9, 2, అగుచున్నవి. కాన 4592 లబ్ధమగుచున్నది.

ఈప్రకారము అంతటను తీసివేయుటచే లబ్ధముల నెఱుంగవచ్చును. ఇట్లు గుణనవైపరీత్యముచే ముందు చెప్పబడు భాగహారపద్ధతియును ఉపపన్నమగుచున్నది.

23. ప్రి. పైపద్ధతి ననుసరించి భాగహారముయొక్క సామాన్యపద్ధతి.

(1) మొదట భాజ్యసంఖ్యను వ్రాసి దానియొక్క నెడమవైపున) ఇట్లు ఒక వక్రరేఖను వ్రాసి దానియొక్క నెడమవైపున భాజకమును వ్రాయుము. భాజ్యముయొక్క కుడివైపున తిరుగ (నీచిహ్నమును వ్రాసి దానియొక్క కుడి వైపున లబ్ధాంకములను క్రమముగ వ్రాయుచుండవలయును.

(2) భాజ్యమునం దెడమవైపున తుదనుండి ఎంతసంఖ్య భాజకముకంటె చిన్నదిగాక ఇంచుమించుగగాని సమానముగగాని యుంటున్నదో ఆసంఖ్యను అంత్యభాజ్యముగ గల్పింపుము.

(3) ఒకటిమొదలు 10 వరకుగాని, 10 కి పైనగాని ఏసంఖ్యవరకు నెక్కములు కంఠస్థములుగ నున్నవో ఆసంఖ్యకు లోబడునట్లు భాజకముయొక్క నెడమవైపున 1, 2 అంకెలుగల సంఖ్యను అంత్యభాజకముగ భావించి అంత్యభాజకముయొక్క కుడివైపున ఎన్నిఅంకెలుగలవో యన్నియంకెలను అంత్యభాజ్యమునందు కుడివైపునవిడచి వీనికి ఎడమవైపునగలసంఖ్యను అంత్యభాజ్యముయొక్క అంత్యఖండమని గుర్తింపుము.

(4) అంత్యభాజకసంఖ్యయొక్క ఎక్కమునుబట్టి అంత్యభాజకమును ఏఅంకెచే గుణించినచో గుణనఫలము అంత్యభాజ్యముయొక్క అంత్యఖండముతోడ సమానముగాని కొంచెము తక్కువగాని యగుచున్నదో ఆఅంకెను లబ్ధముయొక్క అంత్యాంకముగ భావించి భాజ్యముయొక్క కుడివైపునలబ్ధస్థానమున వ్రాయుము.

(5) ఆఅంకెచే భాజకమునంతను గుణించి గుణనఫలమును అంత్యభాజ్యమునుండి తీసివేయుము. ఒకానొకపుడు ఆగుణనఫలము అంత్యభాజ్యముకంటె నధికమగుచో పూర్వము కల్పింపబడిన లబ్ధాంకములో 1 గాని, 2 గాని తగునట్లు తీసివేసి ఆఅంకెచే భాజకమునుగుణించి గుణనఫలమును తీసివేయుము శేషము

ఎప్పుడైనను భాజకముతోడ సమముగాని, పెద్దదిగాని కాకుండవలయును. అపుడు ఆఅంకెను లబ్ధముయొక్క మొదటియంకెగా తెలియుము.

(6) శేషముయొక్క కుడివైపున అంత్యభాజ్యముయొక్క కుడివైపునందలి యంకెను లిఖించి ఆఅంకెచే పెద్దదగు శేషమును క్రొత్తగ అంత్యభాజ్యమునుగా గల్పింపుము. అంత్యభాజకముమాత్రము మొదట కల్పింపబడినదియే యెప్పుడును అగుచున్నది. పిమ్మట వెనుకవలెనే అంత్యభాజ్యాంత్యఖండ అంత్యభాజకముల ద్వారా లబ్ధమును గుర్తించి దానిచే భాజకమును గుణించి గుణనఫలమును తీసివేసి తీసివేయబడనిచో 1 గాని, 2 గాని లబ్ధాంకములో తీసివేసి దానిచే భాజకమును గుణించి తీసివేయుము. ఆలబ్ధాంకమును వెనుకటిలబ్ధాంకమునకు కుడివైపున వ్రాయుము. ఇది లబ్ధముయొక్క రెండవఅంకె యగుచున్నది.

(7) ఇట్లు క్రమముగా శేషముయొక్క కుడిప్రక్కను భాజ్యమునందలి అంకెలను లిఖించుచు పూర్వమునందువలె క్రియను చేయుచురాగా ఎపుడు భాజ్యమునందలి అంకెలన్నియు పూర్తియగునో అంతవరకు నీక్రియను చేయుము.

(8) ఇట్లుచేయునపుడు శేషముయొక్క కుడిప్రక్కను భాజ్యమందలి అంకెను వ్రాయగానైన అంత్యభాజ్యము ఎపుడైన నొకానొకపుడు భాజకముకంటె చిన్నదియగుచో నపుడు లబ్ధస్థానములో సున్నను వ్రాసి భాజ్యమునందలి మరియొకయంకెను అంత్యభాజ్యమునకు కుడివైపున వ్రాసి దానిని అంత్యభాజ్యముగా చేసి వెనుకటివలెనే క్రియను చేయుము.

(9) ఈప్రకారము భాజకముచే భాజ్యమును భాగింపగా తుదను శేషము లేనిచో వచ్చిన లబ్ధము పూర్ణలబ్ధమగును. శేషము మిగిలినచో (21 ప్రి) అనుసరించి లబ్ధమునకు కుడివైపున — ఇట్లు ఒకఅడ్డగీటునుగీచి పైనశేషమును క్రింద భాజకమునున్న వ్రాయుము. లేక భిన్నపరిమాణమును తెలియుము.

(1) ఉదాహరణము

భాజక భాజ్య లబ్ధ

```
436 ) 2563244 ( 5879
      2180
      ----
       3832
       3488
       ----
        3444
        3052
        ----
         3924
         3924
         ----
         ....
```

(2) ఉదాహరణము

భాజక భాజ్య లబ్ధ

```
421 ) 6734 ( 15
      421
      ----
      2524
      2105
      ----
       419 శేషము.
```

కావున $15\frac{419}{421}$ లబ్ధము.

సమేన కేనాప్యపవర్త్య హారభాజ్యౌ
భజేద్వా సతి సంభవే తు॥ ౧౫॥

టీ॥ సంభవే సతి తు కేనాపి సమేనాంకేన హారభాజ్యౌ అపవర్త్య వా భజేత్ = సంభవము గలిగినచో మాత్రము ఏదైన నొకయంకెచే భాజకభాజ్యములను అపవర్తించి (తగ్గించి = కుదించి = భాగించుటచే చిన్నరాసులుగమార్చి) భాగింపవలెను. (20 ప్ర 6 సి. చూ

24. ప్రి. భాజ్యభాజకములను రెంటిని ఒకేయంకముచే నిశ్శేషముగ భాగించి లబ్ధములను గ్రహించుట అపవర్తనమని చెప్పబడును. అట్లు నిశ్శేషముగ భజించు నపవర్తనాంకముల గనుంగొనుటకు కొన్ని సులభోపాయము లిచట చూపబడుచున్నవి.

(1) సరియంకెలు 2 చే నిశ్శేషముగ భాగింపబడును.

(2) ఏసంఖ్యయొక్క ఏకదశస్థానములందలి యంకెలు 4 చే భాగింపబడునో ఆసంఖ్య అంతయును 4 చే భాగింపబడును. ఏసంఖ్యయొక్క ఏకాదిస్థానత్రయమందున్న సంఖ్య 8 చే భాగింపబడునో ఆసంఖ్యఅంతయును 8 చే భాగింపబడును. ఇట్లు తక్కినస్థానములందును గ్రహించునది.

(3) ఏసంఖ్యయొక్క ఏకస్థానమున ‘0’ గాని 5 గాని యుండునో ఆసంఖ్య 5 చే భాగింపబడును.

(4) ఏసంఖ్యయొక్క ఏకస్థానమున ఒకశూన్యముగలదో ఆసంఖ్య 10 చేతను భాగింపబడును ఇట్లు రెండుశూన్యములున్న 100 చేతను మూడుశూన్యములున్న 1000 చేతను భాగింపబడును ఇట్లు ముందును గ్రహింపవలయును.

(5) ఏసంఖ్యయొక్క అంకెలను కూడగానైన యోగము 3 చే గాని, 9 చే గాని భాగింపబడునో ఆసంఖ్య అంతయు 3 చే గాని, 9 చే గాని భాగింపబడును.

(6) ఏసంఖ్య సరి (సమసంఖ్య)యైనదో ఆసంఖ్యయందలి అంకెలకూడిక 3 చే గాని 9 చే గాని భాగింపబడునో ఆసంఖ్య అంతయు 6 చే గాని, 18 చే గాని భాగింపబడును.

ఉదాహరణము.

భిన్నాస్తేన గుణేన తే చ గుణితా జాతాః కతి స్యుర్వద॥ ౨॥

అత్ర పూర్వోదాహరణే గుణితాంకానాం స్వగుణచ్ఛేదానాం భాగహారార్థం న్యాసః. భాజ్యః ౧౬౨౦ భాజకః ౧౨ భజనాల్లబ్ధో గుణ్యః ౧౩౫

అథవా భాజ్యహారౌ త్రిభిరపవర్తితౌ ౫౪౦/౪ చతుర్భిర్వా ౪౦౫/౩ స్వస్వహారేణహృతే ఫలం తదేవ ౧౩౫.

తా॥ గుణనోదాహరణశ్లోకము నందలి నాలవచరణము.

ఆగుణింపగా వచ్చిన యంకములను ఆగుణకముచే భాగింపగా నెంతవచ్చును చెప్పుము. పూర్వోదాహరణమున గుణింపగా వచ్చిన గుణనఫలము 1620 భాజ్యము గుణకము 12 భాజకము

```
12 ) 1620 ( 135
     12
     ──
      42
      36
      ──
       60
       60
       ──
```

ఇచట 1620 భాజ్యము 12 భాజకము. పూర్వోక్తప్రకారము భాగింపగా 135 లబ్ధము వచ్చినది.

లేక భాజ్యభాజకములను రెండిటిని 3 చే భాగింప లబ్ధము 540 భాజ్యము 4 భాజకము లేక 4 చే భాగింప 405 భాజ్యము 3 భాజకము ఈఅపవర్తిత భాజ్య భాజకములవలనను ఆలబ్ధియే రాగలదు.

అదియును ఈదిగువ చూపబడుచున్నది.

```
4 ) 540 ( 135          3 ) 405 ( 135
    4                      3
    ──                     ──
    14                     10
    12                      9
    ──                     ──
     20                     15
     20                     15
     ──                     ──
     ..                     ..
```

మరియొక ఉదాహరణము

394793 దీనిని 9 చే భాగింపుము.


```
9 ) 394793 ( 43865
    36
    ──
     34
     27
     ──
      77
      72
      ──
       59
       54
       ──
        53
        45
        ──
శేషము 8
```

ఇట్లు భాగించుట దీర్ఘ భాగహారమని చెప్పబడును. ఇట్లు భాజకము చిన్న సంఖ్యాయైనచో కంఠస్థములైన ఎక్కములకు లోబడినచో ఈదీర్ఘ భాగహార మక్కరలేకుండ సులభముగ భాగింప వచ్చును.

25. ప్ర. సులభ భాగహారపద్ధతి:—

(1) భాజ్యభాజకములను పూర్వప్రకారములిఖించి క్రిందుగ నొకగీటును గీయుము. భాజకసంబంధమైన ఎక్కముయొక్క సహాయముచే గుణనఫలమును అంతరమును బుద్ధియందు స్థిరముచేసికొని లబ్ధమును గీటుక్రింద అంత్యభాజ్యము యొక్క ఏకస్థానాంకముక్రింద ప్రథమలబ్ధముండునట్లు క్రమముగ లబ్ధములనన్నిటిని వ్రాయుము. ఇది సులభభాగహార మని చెప్పబడును.

ఎట్లనగా:— 9) 394793

43865 శేషము 8 కావున $43865\frac{8}{9}$

(2) ఎక్కములకు మించిన సంఖ్య భాజకసంఖ్యయగుచో (20ప్రశ్న)చే భాజకము గుణనఫలమగు గుణ్యగుణకములచే భాగింపుము.

ఉదా:— 43972 దీనిని 28చే భాగింపుము.

భాజకము28 ఇది 7యొక్కయు 4యొక్కయు గుణనఫలము. కావున

```
7 ) 43972
    ─────
4 ) 62817 ఇచట 2 శేషము.
    ─────
    15704 ఇచట 1 శేషము.
```

ఇచట 15704 లబ్ధము సరియైనది గాని శేషమునుగూర్చి యోచింపవలయును.

మొదట భాజ్యమును 7 చే భాగింపనగు లబ్ధమే రెండవభాజ్యము. కావున రెండవ భాజ్యముకంటె ప్రథమభాజ్యము 7 రెట్లు అధికమైయున్నది. కావున రెండవభాజ్యమును సంబంధించిన శేషమును 7 చే గుణించినచో ప్రథమభాజ్య సజాతీయమగుచున్నది. ప్రథమశేషము ప్రథమభాజ్యసజాతీయమే కావున వీటియోగము సరియగు శేషమగుచున్నది ద్వితీయశేషము 1 దీనిని ప్రథమ భాజకము 7 చే గుణింప 7 ఇందు ప్రథమశేషము 2 ను గలుప $7+2=9$ సరియగు శేషము. దీర్ఘభాగహారముచే భాగించినను ఇదియే రాగలదు.

కాబట్టి వాస్తవశేషము తెలియుటకు ఈపద్ధతి గమనింపవలెను.

పద్ధతి:—ఎప్పుడు భాజకమునందు గుణ్యగుణకరూపఖండముల విభజించి ఆఖండములచే భాజ్యము భాగింపబడెనో అప్పుడు ప్రథమభాజకముచే ద్వితీయ శేషమును గుణింపనగు గుణనఫలమును ప్రథమశేషమునందు కలిపినచో వాస్తవ శేషమగును.

పూర్వోదాహరణమునందే మొదట 4 చేతను రెండవసారి 7 చేతను భాగించినచో

```
4 ) 439721
7 ) 109930  శేషము 1
     15704  శేషము 2
```

ఇచట ద్వితీయశేషము 2 ను ప్రథమభాజకము 4 చే గుణించగానగు 8 యందు ప్రథమశేషము 1 టిని గలుప 9 వాస్తవశేషము.

(3) మరియొక ఉదాహరణము:—

```
43200 ) 98576423 ( 2281 37223
        86400           -----
        ------          43200
        121764
         86400
        ------
        353642
        345600
        ------
          80423
          43200
          -----
శేషము    37223
```

ఇచట భాజకమునందు ఏకదశస్థానములందు రెండు సున్నలు గలవు. కావున వాటినిన్ని భాజ్యమునందును ఏకదశస్థానములందలి రెండంకెలు 23 నున్ను విడిచి 432 న్ను 985764 న్ను అనే నూతన భాజ్యభాజకముల వలన నున్న భాగించుటవలన ఈలబ్ధమే రాగలదు.


```
432 ) 985764 ( 2281
      864
      ----
      1217
       864
      ----
       3536
       3456
       ----
         804
         432
         ---
శేషము.   372
```

ఇట్లు భాగించుటచే లబ్ధము సరిగ నదియేవచ్చుచున్నది. గాని శేషమునందు భాజ్యమునుండి విడదీయబడిన 23 అనే రెండంకెలను కుడిప్రక్కను చేర్చుటచే వాస్తవశేషము అగు పూర్వశేషము సిద్ధించుచున్నది. దీనింబట్టి ఈపద్ధతి గ్రహింపవలసియున్నది.

పద్ధతి:— భాజకమునందు కుడివైపున ఎన్నిసున్నలుగలవో అన్నిసున్నలనున్న భాజ్యమునందు కుడివైపున 'అన్నియే స్థానములందున్న యంకెలను విడచి నూతనభాజకముచే నూతనభాజ్యమును భాగించినను లబ్ధము సరిగవచ్చును. శేషమునందు కుడివైపున భాజ్యమునుండి విడదీయబడిన యంకెలను చేర్చినచో నది వాస్తవశేషము గాగలదు.

26. ప్ర. విశేషము:—

ఇట్లుభాగించుటచే గణితము విశేషస్థలము నాక్రమించుచున్నది.

కాబట్టి ప్రాచీనులు మరియొకపద్ధతిగా (ఉత్క్రమగుణమునందువలె) భాగించుచుండిరి. అదియు నీక్రింద వ్రాయబడుచున్నది. (22 ప్ర) భాగహార సామాన్యపద్ధతిని బాగుగ స్మరింపుము.

(1) భాజకమును అంత్యభాజ్యముయొక్క క్రిందుగ వ్రాయుము. భాజకముయొక్క ఏకాదిస్థానాంకములు క్రమముగ అంత్యభాజ్యముయొక్క ఏకాది స్థానాంకములక్రిందుగ నుండవలయును.

(2) లబ్ధముయొక్క మొదటియంకెను గుర్తించి (23 ప్ర. చూ) దానిచే భాజకమును గుణించి ఆగుణనఫలమును అంత్యభాజ్యముయొక్క పైభాగమున లిఖించి అంత్యభాజ్యమునుండి తీసివేయుము.

(3) అట్లు తీసివేయగానగు శేషమును అంత్యభాజ్యమునకు ముందుగల యంకెతో గూర్చి యాసంఖ్యను అంత్యభాజ్యముగా దలచి భాజకముయొక్క ఏకాదిస్థానాంకములు ప్రస్తుతపు అంత్యభాజ్యముయొక్క ఏకాదిస్థానాంకములకు దిగువనుండునట్లు భాజకమును జరిపి పూర్వమువలె లబ్ధమునందు రెండవయంకెను గనుంగొని దానిచే భాజకమును గుణించి వ్యవకలింపుము.

(4) ఇట్లు శేషమునకు ముందుగల యంకెను శేషముకడ్డ కూర్చుచు అంత్యభాజ్యముగా భావించుచు భాజకమును జరుపుచు గుణనఫలమునుతీసివేయుచు భాజ్యమునందలి యంకములన్నియు పూర్తియగువరకు నీక్రియను చేయుము.

(5) పూర్వపద్ధతియందువలె భాజకమును గుణించుచు గుణకములనన్నిటిని క్రమముగ నొకచో లిఖింపుచు మొత్తపుసంఖ్యను లబ్ధముగానున్న భాజ్యమునందలి యంకెలన్నియు పూర్తియైనపిమ్మట మిగిలినసంఖ్య శేషముగానున్న తెలియుము.

అభ్యాసముచే నీపద్ధతి అతిసులభముగా నుండును.

ఉదా:—భాజ్యము 985764 భాజకము 432

అన్ని స్వరూపములును తుదివరకును చూపబడినవి. లబ్ధము 2281

(1)
864
భాజ్య 985764
భాజక 432

(2)
864
భాజ్య 121764
భాజక 432

(3)
3456
భాజ్య 35364
భాజక 432

(4)
432
భాజ్య 804
భాజక 432

(5) శేషము 372 కావున లబ్ధము $2281\frac{372}{432}$

వివరము:—(1) రూపమునందు 2 చే భాజకమును గుణించి భాజ్యమునకు పైభాగమునవ్రాసి భాజ్యమువలన తీసివేయబడినది. (2) వ రూపమునందు

తీసివేయగా మిగిలిన శేషమును అంత్యభాజ్యమునకు కుడివైపునగలయంకెలను చేర్చి భాజ్యముగా చూపబడినది. అందు తిరుగా 2చే గుణింపబడినభాజ్యము తీసివేయబడినది.

ఇట్లు భాజ్యమునందలి యంకములన్నియు పూర్తియగువరకును ఆయా లబ్ధాంకములచే గుణించి భాజకమును పైభాగమున వ్రాయుచు తీసివేయుచు మిగిలినస్వరూపము భాజ్యముగ భావించుచు భాజకమును ఒక్కొకస్థానము ముందునకు జరుపుచు భాగహారగణితము చేయునపుడు గలుగుస్వరూపములన్నియు చూపబడెను. అంకెలు తుడిచి అంకెలువేయదగిన పలక మొదలగు సాధనములందు ఎప్పటికపుడు అంత్యభాజ్యమువలన లబ్ధాంకగణితభాజకమును తీసివేయునపుడు వియోజ్యవియోజకములను తుడిచివేయుచు శేషమునే వ్రాయుచుండినయెడల విశేషస్థలము నాక్రమింపక భాగహారము సులభముగా నగును. ఈపద్ధతి అట్టిఉపకరణములందు బాగుగ నుపయోగించును.

భాగహారప్రశ్నలు.

(1) 9877 ÷ 81
(2) 5935 ÷ 803
(3) 595904 ÷ 903
(4) 30004 ÷ 299
(5) 999999 ÷ 1005
(6) 8090709 ÷ 2030

భాగహారమును సంబంధించిన ప్రశ్నలు.

(1) ఒక కానికి 8 అరటిపండ్లు. 112 పండ్లకు ఎన్నికానులగును ?

(2) ఒకగంటకు 5 మైళ్ళునడచు బండి 34 మైళ్ళు ఎన్నిగంటలకు నడచును ?

(3) ఒకరూపాయికి 7 కుంచములు ధాన్యము. 1 గరిశెకు ఎన్నిరూపాయిలగును ?

(4) ఒకపొలమునందు 50 మనుష్యులు పనిజేసిరి. వారికి మొత్తము రూ 14 అ 1 పై 0 ఇయ్యబడెను. ఒక్కొకనికి ఎంతవచ్చును ?

(5) నూరుపుస్తకములకు రు 6 అ 4 పై 0 అగుచో ఒక్కదానికి వెల యెంత ?

ఘాత, మూలములు — వర్గము.

27. ప్ర. (1) ఏదేని ఒకానొకసంఖ్యచే ఒకటిని కొన్నిపర్యాయములు గుణించుట ఘాతక్రియ యని చెప్పబడును. ఆఒకానొకసంఖ్య మూలమనియు, ఆపర్యాయసంఖ్య ఘాతమాపకమనియు, గుణింపగాఁగు తుదిఫలము ఆమూలసంఖ్య యొక్క సంబంధమగు (ఘాతమాపక సంఖ్యా వాచకశబ్దపూర్వక) ఘాతమనియు చెప్పబడును. అనగా ఒకటిని ఒకానొకసంఖ్యచే ఒకపర్యాయమే గుణించినచో నాగుణనఫలము ఏకఘాతము. రెండుపర్యాయములు గుణించిన ద్విఘాతము లేక వర్గము. మూడుపర్యాయములు గుణించినచో త్రిఘాతము లేకఘనము. ఇట్లుచతుర్ఘాతము పంచఘాతము షడ్ఘాతము మొదలగునవి యగుచున్నవి.

$1 \times 4 = 4$ ఇది 4 యొక్క ఏకఘాతము ఇం[illegible]హపకము 1 టి

$1 \times 4 \times 4 = 4 = 16$ ఇది 4 యొక్క ద్విఘాతము లేక వర్గము ఇందు 2 ఘాతమాపకము.

$1 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$ ఇది 4 యొక్క త్రిఘాతము లేక ఘనము ఇందు 3 ఘాతమాపకము

ఇట్లు $1 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4$ ఇది 4 యొక్క చతుర్ఘాతము లేక వర్గవర్గము.

షడ్ఘాతమునకు ఘనవర్గమనియు (ఘనవర్గ)మనియు పేరు

(2) అట్టిఘాతములందు ఘాతములవలన మూలసంఖ్యను గనుగొనుట మూలక్రియ. అందామూలసంఖ్య ఆయాఘాతశబ్దము పూర్వమందుగల మూలశబ్దముచే వాడబడుచున్నది. ద్విఘాతముయొక్క మూలసంఖ్య ద్విఘాతమూలము లేక వర్గమూలము. త్రిఘాతముయొక్క మూలసంఖ్య త్రిఘాతమూలము లేక

ఘనమూలము. ఇట్లు చతుర్ఘాతమూల పంచఘాత మూలాదికము గ్రహింపదగినది. ఎట్లనగా:—4 యొక్క వర్గము 16 కావున 16 యొక్క వర్గమూలము 4

4 యొక్క ఘనము 64 కావున 64 యొక్క ఘనమూలము 4

4 యొక్క చతుర్ఘాతము 256 కావున 256 నకు 4 చతుర్ఘాతమూలము, ఇట్లు ముందును తెలియదగినది.

ఘాతక్రియయందు ద్విఘాత, త్రిఘాత, చతుర్ఘాతాదులందు 2, 3, 4 మొదలగునవి ఘాతమాపకములని చెప్పబడినట్లు వర్గమూల, ఘనమూల, చతుర్ఘాతమూలాదులందు 2, 3, 4 మొదలగునవి మూలమాపకములని చెప్పబడును. మరియు సామాన్యముగ వర్గమూలము కేవల మూలమనియు వ్యవహరింపబడుచున్నది.

(3) ఇదియును గమనింపదగిన విషయము.

1, 4, 9, 16 మొదలగుసంఖ్యలకు క్రమముగ 1, 2, 3, 4 మొదలగు సంఖ్యలు మూలాంకము లగుచున్నవి. అట్లు 2, 3, 5, 6 మొదలగు సంఖ్యలకు మూలాంకములు లభింపవు. (దీనినిగూర్చి ముందువ్రాయబడును.) ఏసంఖ్యలకు సరియగు వర్గమూలము లభించునో ఆసంఖ్యలు వర్గరాసులనియు వేటికి సరియగు అంకాత్మక వర్గమూలము లభింపదో ఆసంఖ్యలు అవర్గరాసులనియు చెప్పబడును. అవర్గరాశికంటె చిన్నదియై దానికి చేరువదియగు వర్గరాశియొక్క మూలము ఆఅవర్గరాశికి నిరగ్రమూలమని చెప్పబడును. ఎట్లనగా 11 అవర్గరాశి. దీనికి చేరువదియై చిన్నదియగు వర్గరాశి 9 దీనిమూలము 3 ఇది 11 నకు నిరగ్రమూలము అగుచున్నది.

28. ప్ర. ఇపుడు ఘాతకమును సంబంధించిన కొన్నిసిద్ధాంతములు వ్రాయబడుచున్నవి.

(1) ఒకానొకసంఖ్యకు ఏఘాతము చేయవలయునో అన్నిస్థలములందు ఆఒకానొకసంఖ్య నునిచి గుణించిన యెడ ఆఅభీష్టఘాతమగును.

ఉదా:— 2^4 రెండునకు చతుర్ఘాతము సేయవలయును.

కావున ఘాతమాపకము 4 అగుచున్నది.

కనుక $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ రెండుయొక్క చతుర్ఘాతము.

దీనికియుక్తి:—(27 ప్ర) ఘాతలక్షణమునుబట్టి 1 టిని 2 చే 4 సార్లు గుణించుటయే 2 నకు చతుర్ఘాతమును చేయుటగాన 1 టి గుణ్యమైనను గుణకమైనను గుణనఫలమందు వైలక్షణ్యము లేక రెండవసంఖ్యయే గుణనఫలమగును. కావునను ఘాతసంఖ్యామితస్థానములందు అభీష్టసంఖ్యనుంచి పరస్పరము గుణించుటయే ఘాతఫలమగుచున్నది.

(2) ఒకానొకసంఖ్యయొక్క అనేకఘాతఫలముల గుణనఫలము ఆఒకానొకసంఖ్యయొక్క ఘాతమాపకాంకముల యోగము ఎంతసంఖ్యయగునో అంత ఘాతముతోడ సమానమగుచున్నది

ఉదా:—$2^3 \times 2^4 \times 2^2 = 2^9$

ఇచట రెండుయొక్క త్రిఘాత, చతుర్ఘాత ద్విఘాతముల గుణనము రెండుయొక్క నవఘాతముతో సమమగుచున్నది.

ఉపపత్తి:—$2^3 = 2 \times 2 \times 2$ మరియు $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$

ఇట్లు $2^2 = 2 \times 2$ కావున $2^3 \times 2 \times 2 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^9$

అనగా 2^{3+4+2}

దీనివలన నీక్రిందివిషయము సిద్ధించుచున్నది.

అను:—ఒకానొకసంఖ్యయొక్క రెండుఘాతములలో పెద్దఘాతమును చిన్నఘాతముచే భాగింపవలసినపుడు పెద్దఘాతమాపకాంకములో చిన్నఘాతమాపకాంకము తీసివేసి ఆఅంతరమును ఆఇష్టసంఖ్యకు ఘాతమాపకాంకముగాచేసి ఆఘాతఫలము గనుగొనుము.

ఉదా: $2^5 \div 2^3 = 2^{5-3} = 2^2 = 2 \times 2 = 4$

రెండుయొక్క పంచఘాతమును త్రిఘాతముచే భాగింపవలసినపుడు ఘాతమాపకాంకముల $5 - 3$ అంతరము 2 ఘాతమాపకముగ చేసి ఘాతము చేయబడెను. దీనియుపపత్తి పైసిద్ధాంతోపపత్తియొక్క వైపరీత్యముచే స్పష్టము.

(3) ఒకానొకసంఖ్యకు ఒకఘాతమునుచేసి ఆఘాతఫలమునకు తిరుగ ఘాతము చేయవలసినయెడల ఆఘాతమాపకముల గుణనఫలమును ఘాతమాపకముగచేసి అట్టిఘాతమును చేయుము.

ఉదా:—$(2^3)^4 = 2^{3 \times 4} = 2^{12} = 4096$

దీనియొక్క ఉపపత్తి:—2 యొక్క ఘనముయొక్క చతుర్ఘాతము చేయవలయును. $2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3 =$ రెండుయొక్క ఘనముయొక్క చతుర్ఘాతము

పై రెండవసిద్ధాంతముచే

$$2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3 = 2^{3+3+3+3} = 2^{3 \times 4} = 2^{12}$$

ఇట్లీసిద్ధాంత ముపపన్నమగుచున్నది.

(4) రెండుసంఖ్యలలో మొదటిసంఖ్యకు ఒకఘాతమును చేయుము. రెండవసంఖ్యకును మొదటిసంఖ్యకు చేసినఘాతమునే చేయుము. ఆరెండుఘాతములను గుణింపుము. ఆగుణనఫలము ఆరెండుమూలసంఖ్యలయొక్కయు గుణనఫలమునకైన అఘాతముతోడ సమమగుచున్నది.

ఎట్లనగా:—$3^3 \times 4^3 = (3 \times 4)^3 = 1728$

ఉపపత్తి:—$3^3 = 3 \times 3 \times 3$ ఇట్లు $4^3 = 4 \times 4 \times 4$

$\therefore 3^3 \times 4^3 = 3 \times 3 \times 3 \times 4 \times 4 \times 4 = 3 \times 4 \times 3 \times 4 \times 3 \times 4$ (16 ప్ర 2 అను చూ) $= (3 \times 4)(3 \times 4)(3 \times 4) = (3 \times 4)^3$

అను:—ఘాతముచేయవలసినసంఖ్యకు కుడిపైపున సున్నలున్నచో ఆసంఖ్యయందలి సున్నలనువిడచి మిగిలినసంఖ్యకు ఆఘాతమునుచేసి సున్నలెన్నియో

ఆసంఖ్యను ఘాతమాపకాంకముచే గుణించి అన్ని సున్నలను ఆఘాతముయొక్క కుడివైపున వ్రాయుము. అది అభీష్టఘాతమగును.

ఉదా:—400 దీనికి త్రిఘాతము చేయవలయును.

ఇందు రెండుసున్నలుగలవు వాటిని విడువగానగు సంఖ్య 4.

కావున $4^3 = 64$ సున్నలు రెండుకావున $2 \times 3 = 6$ సున్నలను వ్రాయవలయును.

కావున $400^3 = 64000000$ అగుచున్నది

ఉపపత్తి:—$400^3 = (4 \times 100)^3 = 4^3 \times 100^3$

$= 4^3 \times (10^2)^3 = 4^3 \times 10^{2 \times 3}$

$= 4^3 \times 10^6 = 64 \times 1000000 = 64000000$ ఇది అభీష్టఘాతము.

(5) ఏసంఖ్యకైనను ఏకఘాతము ఆసంఖ్యయే యగును,

శూన్యఘాతము 1 టియే యగును.

ఉపపత్తి:—ఏసంఖ్యచేనైనను 1 టిని ఒకపర్యాయమే గుణించినచో గుణనఫలము ఆసంఖ్యతో సమయే యగును. (27 ప్ర. చూ)

ఆప్రకారము 1టిని సున్న పర్యాయములు గుణించినచో అనగా గుణింపనిచో ఫలము 1టియే కాగలదు. కాబట్టి ఏసంఖ్యకైనను శూన్యఘాతము 1టియే కాగలదు.

(6) ఒకటికి ఏఘాతమైనను ఒకటియే యగును.

ఒకటిని ఒకటిచే నెన్ని పర్యాయములు గుణించినను ఒకటియే యగును.

29. ప్ర. వర్గమునుచేయుపద్ధతి.

అథవర్గే కరణసూత్రం వృత్తద్వయం

సమద్విఘాతః కృతిరుచ్యతేథ స్థాప్యోంత్యవర్గో ద్విగుణాంత్యనిఘ్నాః।
స్వస్వోపరిష్టాచ్చ తథాపరేంకా స్త్యక్త్వాంత్యముత్సార్య పునశ్చరాశిమ్॥

టీ॥ సమద్విఘాతః = సమమైన రెండంకెలయొక్క గుణనము, కృతిః = వర్గమని, ఉచ్యతే = చెప్పబడుచున్నది. (28 ప్ర 1 సి చూ) అథ = పిమ్మట (పద్ధతి చెప్పబడుచున్నదియనుట అధ్యాహార్యము).

(1) అంత్యవర్గః = అంత్యాంకముయొక్కవర్గము, స్థాప్యః = వ్రాయదగినది.

(2) ద్విగుణాంత్యనిఘ్నాః = రెండుచే గుణింపబడిన అంత్యాంకముచే గుణింపబడినవియగు, అపరే = ఇతరములగు, అంకాశ్చ = అంకెలున్ను. స్వస్వోపరిష్టాత్ = తమతమయొక్కముందు, తథా = అట్లు(వ్రాయదగినది)

(3) అంత్యం = తుదియంకెను, త్యక్త్వా = విడచి, రాశిం = రాశిని, ఉత్సార్య = జరిపి, పునశ్చ = తిరుగానున్ను చేయదగినది.

(వర్గ గుణనఫలముల నన్నిటిని క్రమముగ స్థానభేదము గలుగునట్లులిఖించి కలిపినచో నాయోగము ఇష్టసంఖ్యయొక్క వర్గమగును అనునది గ్రహింపదగియున్నది)

వివరము:—వర్గింపదగినసంఖ్యయొక్క ఏకస్థానాంకము ఆద్యాంకమనియు సంఖ్యయొక్క ఎడమవైపునుండి మొదటియంకె అంత్యాంకమనియు భాస్కరాచార్యులువారు సంజ్ఞచేసి సూత్రమును చెప్పిరి. కాని ఘనసూత్రమునందు "ఏవం ముహుః ర్వర్గఘనప్రసిద్ధా వాద్యాంకతోవా విధిరేష కార్యః" అని వర్గఘనములు సిద్ధించుటకై ఆద్యాంకమునుండియైనను ఈపద్ధతి చేయదగినది అని చెప్పుటచే సూత్రమునందు 'అంత్య' 'ఆది' పదములచే పద్ధతి చెప్పబడుటచే ఏకస్థానము అంత్యాంకమని కల్పించియు సూత్రప్రకారము చేయవగినదియనిస్పష్టమగుచున్నది. ఆభేదము తెలియుటకై టీకయందు 'ఎడమవైపునుండి మొదటియంకె', 'కుడివైపునుండి మొదటియంకె' అని వ్రాయబడుచున్నది. ఈవిషయమును పాఠకులు బాగుగ గమనింపవలయును.

ఉదా:—234 కు వర్గమునుచేయుము.

ఏకస్థానము అంత్యస్థానముగా భావించి చేయుపద్ధతి.

234
———
16
184
9
12
4
———
54756
———

వర్గింపవలెనగిన సంఖ్య 234 వ్రాసి గీటు గీయబడెను. తరువాత మొదటిపంక్తియందు ఏకస్థానాంకమగు 4 యొక్క వర్గము 16 వ్రాయబడెను. రెండవపంక్తియందు ఏకస్థానాంకము 4ను రెట్టించి దాని 8 చే దశాదిస్థానములందున్న ఇతరములగు నంకెలను 23 ను గుణించి వ్రాయబడెను. పిమ్మట ఏకస్థానాంకము 4 ను విడచి మిగిలిన 23 ను రాశిగ భావించి అందలి అంత్యాంకము 3 యొక్క వర్గము 9 మూడవపంక్తిగా వ్రాయబడెను. ఇందలి అంత్యాంకము 3 ను రెట్టించి ఆసంఖ్య 6 చే దాని దశస్థానమందు మాత్రమే యంకెగలదు గాన దాని 2 నే గుణించి నాలవపంక్తిగ వ్రాయబడెను పిమ్మట ఆ 3 ను విడిచి మిగిలిన 2 యొక్క వర్గము 4 గు 5 వ పంక్తిగ వ్రాయబడెను. అన్నియు ఒక్కొకస్థానము వెనుకకు క్రమముగ వ్రాయబడినవి. అన్నిటియొక్కయు యోగము 54756 వర్గము.

30. ప్ర. ఇచట ఏకస్థానాంకము అంత్యాంకముగ భావించి ఉదాహరణము చూపబడెను. లేక ఎడమవైపున తుదియంకము అంత్యాంకముగ గ్రహించి వర్గమును గనుగొనుపద్ధతి ఈదిగువ వ్రాయబడుచున్నది.

పైపద్ధతియందుగల వర్గగుణనఫలములు ఈదిగువపద్ధతియందు తలక్రిందుగ నుండును. అనగా అందలికిందిపంక్తి ఇందు మొదటిపంక్తి అందలి కిందినుండి రెండవపంక్తి ఇందు పైనుండి రెండవపంక్తి ఇట్లువ్యత్యయముగ నుండుటయే భేదము. కావున ఈవిషయము స్పష్టమగుటకై వ్రాయబడుచున్నది.

మొదట అంత్యాంకము (ఎడమవైపునందలి మొదటియంకె) యొక్క వర్గమును వ్రాయుము. పిమ్మట అంత్యాంకమును రెట్టించి దానిచే అంత్యాంకమునకు కుడివైపుననున్న యంకెను గుణించి దీనిని రెండవపంక్తిగ వ్రాయుము. మొదటి పంక్తియొక్క ఏకస్థానాంకము క్రిందుగ రెండవపంక్తియొక్క దశస్థానాంకముండునట్లు వ్రాయవలయును. ఇట్లు ప్రతిపంక్తియు పైపంక్తియొక్క ఏకస్థానాంకము క్రిందుగ క్రిందిపంక్తియొక్క దశస్థానాంకముండునట్లు వ్రాయవలయును.

పిమ్మట అంత్యాంకమునకు కుడివైపుననున్న అంకె యొక్క వర్గమును 3వ పంక్తిగ వ్రాయుము.

ఇపుడు ఆరెండంకెలునుగల సంఖ్యను అంత్యఖండముగ భావించి రెట్టించి దానిచే దానిముందుగల సంఖ్యను గుణించి 4 వ పంక్తిగ వ్రాయుము.

ఆఅంత్యఖండమునకు ముందున్న యంకెయొక్క వర్గమును 5 వ పంక్తిగ వ్రాయుము. ఇట్లు ప్రతియంకెకును తొలుత వర్గమును చేయుట పిమ్మట దానిని దానికివెనుక (ఎడమవైపున)గల సంఖ్యతోజేర్చి అంత్యఖండముగ భావించి దానిని రెట్టించి దానిచే దానిముందు (కుడివైపున) గల యంకెను గుణించుట అంకెలన్నియు పూర్తియగువరకును చేయుచు పైనచెప్పినట్లు స్థానవ్యత్యాసముగ పంక్తులను వ్రాసి కూడినచో ఆపంక్తులయోగము ఇష్టసంఖ్యకు వర్గమగును.

234
———
4
12
9
184
16
———
54756
———

పైయుదాహరణమే చూపబడెను. అందలిపంక్తులే తలక్రిందుగ చూపబడినవి. అన్నిటియొక్కయు యోగము పూర్వమునందువలెనే వర్గసంఖ్య ఆయెను *

---

* భాస్కరాచార్యులు ఆద్యాంకమునుండియు అంత్యాంకమునుండియు చేయవలయునని ఒకేపద్ధతిని చెప్పిరిగాని అందలిభేదమును వివరింపకపోవుటచే భేదమును గమనించుట శ్రమకరమగుచున్నది. సులభముగా భేదమునెరుంగుటకై నాచేచేయబడిన శ్లోకములు.

సమద్విఘాతః కృతి రుచ్యతే థ స్థాప్యోంత్యవర్గో ద్విగుణాంత్యనిఘ్నాః।
స్వస్వోపరిష్టాచ్చ తథాపరోంకః ప్రకల్ప్య తత్ఖండయుగం తతోన్త్యం॥
తథాసకృత్త్యాగ్య మసౌ కృతి ర్యుతి స్థానాంతరత్వేన పురస్స్థితానాం।
ఆద్యాంకతో వా విధిశేష కింతు స్వస్వేతరాంకా ద్విగుణాంత్య నిఘ్నాః॥
కృత్వా విలిఖ్య ప్రవిహాయ చాద్యం ప్రకల్ప్య రాశిం పునరేవమత్ర।
స్వవామకోష్ఠే వినివేశితానాం స్థానాంతరత్వేన యుతిః కృతి స్స్యాత్॥

31. ప్ర. వర్గసామాన్యపద్ధతి:—

(1) ఏసంఖ్యకు వర్గము చేయవలయునో ఆసంఖ్యను వ్రాసి క్రిందగీటును గీయుము. ఆసంఖ్యయొక్క ఏకస్థానాంకమును ఆఅంకెచే గుణించి ఆగుణనఫలముయొక్క ఏకస్థానాంకమును గీటుక్రింద సంఖ్యయొక్క ఏకస్థానాంకము క్రిందనుండునట్లుగ వ్రాసి మిగిలినసంఖ్యను వేరుగనుంచుకొనుము.

(2) ఆఏకస్థానాంకమును రెట్టించి ఆసంఖ్యచే దశాదిస్థానాంకములను గుణించి వేరుగనుంచినసంఖ్య నందు కలిపి ఆసంఖ్యను గీటుక్రింద ఇదివరలో వ్రాయబడిన యంకెకు ఎడమవైపున చేర్చి వ్రాయుము. ఇది మొదటి పంక్తి.

(3) పిమ్మట వర్గింపదగినసంఖ్యయొక్క ఏకస్థానాంకమును విడచి మిగిలినసంఖ్యను వర్గింపదగినసంఖ్యగా భావించి పూర్వరీతిగ దీనియందలి ఏకస్థానాంకముచే పంక్తిని గనుగొనుము.

(4) ఈపంక్తిని దీనియొక్క ఏకస్థానాంకము పైపంక్తియొక్క శతస్థానాంకము క్రిందుగ నుండునట్లు వ్రాయుము. ఇది రెండవ పంక్తి

(5) ఇట్లు క్రమముగా వర్గముచేయదగిన సంఖ్యలోని అంకెలన్నియు పూర్తిఅగువరకు వర్గింపదగినట్లు భావింపబడిన సంఖ్యయందలి ఏకస్థానాంకము (తుదియంకె)చే ఆఅంకెనే గుణించి రెట్టింపబడిన ఆయంకెచే ఆయంకెకు ఎడమవైపునున్న యంకెలను గుణించి ఒక్కొకపంక్తి క్రింద వ్రాయుచు ఆయంకెను విడచుచు మిగిలినసంఖ్యను వర్గింపదగినసంఖ్యగా భావింపుచు పైపంక్తియొక్క శతస్థానాంకమునకు క్రిందుగ దానిక్రిందిపంక్తియొక్క ఏకస్థానాంకముండునట్లు పంక్తులను వ్రాయుచు నీక్రియను చేయుము.

(6) వర్గముచేయదగిన సంఖ్యయందలి అంకెలన్నియు పూర్తిగాగనే పంక్తులక్రింద నొకగీటును వ్రాసి పంక్తులనన్నిటినికలుపగా ఆయోగము ఇష్టసంఖ్యయొక్క వర్గమగును. ఇష్టసంఖ్యయందు సున్నలున్నచో గుణకారమునందు ఒకశూన్యమునకు ఒకస్థానమును విడచునట్లు ఇందు ఒకశూన్యమునకు రెండుస్థానముల విడువవలయును.

(1) ఉదా:—

	వర్గింపదగినసంఖ్య	8796
(1)	పంక్తి	105516
(2)	పంక్తి	15741
(3)	పంక్తి	1169
(4)	పంక్తి	64
	వర్గము	77369616

(2) ఉదా:—

	వర్గింపదగినసంఖ్య	45023
(1)	పంక్తి	270129
(2)	పంక్తి	18004
(3)	పంక్తి	425
(4)	పంక్తి	16
	వర్గము	2027070529

పై (1) ఉదాహరణమునందు ఏకస్థానాంకము 6 యొక్క వర్గము 36 నందలి 6 ను మొదట వ్రాసి 3 ను వేరుగానునిచి ఆఏకస్థానాంకము 6 ను రెట్టించి 12 చే మిగిలినసంఖ్య 879 ను గుణించగానగు 10448 లో ఇదివరలో వేరుగానుంచిన 3 ను కలుపగా నగు 10551 ని ఇదివరకు వ్రాసిన 6 కు ఎడమవైపునచేర్చి మొదటిపంక్తిగా వ్రాయబడెను. పిమ్మట 6 ను విడచి మిగిలిన 879 ని వర్గింపదగినసంఖ్యగా భావించి మొదట అందలిఏకస్థానాంకము 9 యొక్క వర్గము 81 నందలి 1 టిని వ్రాసి 8 ని వేరుగానుంచి ఆ 9 ని రెట్టింపనగు 18 చే మిగిలిన 87 ను గుణించి అందువేరుగనుంచిన 8 ని గలిపి ఈసంఖ్య 1574 ఇదివరలోవ్రాయబడిన 1 టికి ఎడమవైపునచేర్చి రెండవపంక్తిగా వ్రాయబడెను పిమ్మట 9 ని విడచి మిగిలిన 87 ను వర్గింపదగినసంఖ్యగా భావించి అందలి 7 యొక్క వర్గము 49 యందలి ఏకస్థానాంకము 9 ని మొదటవ్రాసి 4 ను వేరుగనుంచి ఆ 7 ను రెట్టించి 14 చే 8 ని గుణించి అందు వేరుగానుంచిన 4 ను గలిపి 116 ఇదివరలో వ్రాసిన 9 కి ఎడమవైపునచేర్చి 1159 మూడవపంక్తిగా వ్రాయబడెను. ఇకను 8 యే మిగిలినది. దానికి ఎడమవైపున అంకములులేవు. కావున 8 యొక్క వర్గమే 64 నాలవపంక్తిగ వ్రాయబడెను. అన్నిపంక్తులును రెండురెండు స్థానములు వ్యత్యాసముగ వ్రాయబడెను. అన్నిటియొక్కయు మొత్తము వర్గము అగుచున్నది.

ఈపద్ధతియందు వర్గింపదగిన (మూల) సంఖ్యయం దెన్నియంకెలు గలవో అన్నిపంక్తులుండును.

(2) వ ఉదాహరణమునందును అట్లుగనే పంక్తులు వ్రాయబడెను. కాని మూలసంఖ్యయందు శతస్థానమున సున్నలుండుటచే అందునిమిత్తము రెండుస్థానములను విడువదగిన స్థానములు రెండును మొత్తము 4 స్థానములనువిడచి 3వ పంక్తిగ వ్రాయబడెను. కావుననే మూలసంఖ్యయందు సున్నతో 5 స్థానములందు అంకెలున్నను 4 పంక్తులే వ్రాయబడినవి.

దీని ఉపపత్తి:—34 ప్ర క్రమముగ వ్రాయబడెను.

ఖండద్వయస్యాభిహతిర్ద్వినిఘ్నీ తత్ఖండవర్గైక్యయుతాకృతిర్వా॥

టీ॥ ఖండద్వయస్య = ఖండద్వయముయొక్క, అభిహతిః = గుణనము, ద్వినిఘ్నీ = రెండుచే గుణింపబడినదై, తత్ఖండవర్గైక్యయుతా = ఆప్రత్యేకఖండములయొక్క యోగముతోడ కలుపబడినదై, వా = ప్రకారాంతముచే, కృతిః = వర్గమగును

32. ప్ర. ఏసంఖ్యకు వర్గముగావలయునో ఆసంఖ్యను రెండుఖండములుగ చేయుము. ఒకఖండముచే మరియొకఖండమును గుణించి దానిని 2 చే గుణించి అందు ఆఖండముల ప్రత్యేకవర్గములను గలుపుము. కలుపగానగు మొత్తము వర్గమగును. ఇది ఖండవర్గపద్ధతియని చెప్పబడును.

ఉదా:—96 నకు వర్గము గావలయును.

96 నకు 90, 6 ఇట్లు ఖండములు చేయబడెను.

పద్ధతి ప్రకారము

$96^2 = \{(90 \times 6) \times 2\} + 90^2 + 6^2 = (540 \times 2) + 90^2 + 6^2$

$= 1080 + 8100 + 36 = 9216$. ఇది 96 యొక్క వర్గము.

ఉపపత్తి:—$96^2 = 96 \times 96$ (15 ప్ర) చే

$96 \times 96 = (90 + 6) \times 96 = (90 \times 96) + (6 \times 96)$ అట్లు

$= 90\ (90 + 6) + 6\ (90 + 6) = (90 \times 90) + (90 \times 6) + (6 \times 90)$

$+ (6 \times 6) = 90^2 + 6^2 + (90 \times 6 \times 2) =$ 96 యొక్క వర్గము.

ఇట్లు ఖండగుణనముచే నీపద్ధతి ఉపపన్నమగుచున్నది.

అను:— ఏరాసులయొక్క అంతరము ఇష్టసంఖ్యఅగునో అట్టి రెండు రాసులను కల్పించి ఆరెండురాసులయొక్కయు వర్గయోగమువలన ఆరెండురాసులయొక్క గుణనఫలమును రెట్టించి వ్యవకలింపుము. ఆశేషము ఇష్టసంఖ్యకు వర్గమగును.

ఉదా:—16 నకు వర్గమెంత ?

16 = 20 − 4 కావున పైఅనుమానముచే

$(20^2 + 4^2) - 20 \times 4 \times 2 = 16^2$

$\therefore (400 + 16) - 160 = 416 - 160 = 256 = 16^2$

దీనియొక్క ఉపపత్తి పైఉపపత్తిచేతను (15 ప్ర అను) చేతను స్పష్టమగుచున్నది.

33. ప్ర. ఇష్టోనయుగ్రాశివధః కృతిస్స్యా దిష్టస్య
వర్గేణ సమన్వితో వా॥ ౧౭॥

టీ॥ వా. ఇష్టోనయుగ్రాశివధః ఇష్టస్యవర్గేణ సమన్వితః కృతి స్స్యాత్ = లేక ఇష్టమగునంకెను వర్గముచేయదగిన రాశిలో నొకచో తీసివేయుము ఒకచో కలుపుము ఆరెండిటియొక్కయు గుణనమునందు ఇష్టాంకముయొక్క వర్గమును కలిపినచో వర్గింపదగిన సంఖ్యయొక్క వర్గమగును.

ఉదా:—84 యొక్క వర్గమును చేయుము.

ఇచట ఇష్టాంకము 4 కల్పింపబడెను.

$84^2 = (84 - 4)\ (84 + 4) + 4^2 = (80 \times 88) + 16$

$= 7040 + 16 = 7056$ ఇది 84 యొక్క వర్గమైనది.

ఉపపత్తి:—$84^2 = 84 \times 84$

(15 ప్ర) చే $(80 + 4) \times 84 = (80 \times 84) + (84 \times 4)$.

$= (80 \times 84) + (80 + 4)\, 4 = (80 \times 84) + (80 \times 4) + 4^2 \because 80 = 84 - 4$

$\therefore$ ఇందు $(84 \times 80) + (4 \times 80) = (84 + 4) \times (84 - 4)$ (15 ప్ర చూ)

$\therefore 84^2 = (84 + 4) \times (84 - 4) + 4^2 = 88 \times 80 + 16 = 7056$

ఈసూత్రమువలన నీవిషయము స్పష్టమగుచున్నది.

(1) ఒకటిపెద్దది రెండవదిచిన్నది అట్టి రెండురాసులు గలవు. ఆరెండు రాసులయొక్కయు యోగమును ఆరెండురాసులయొక్కయు అంతరముచేగుణించి అందు చిన్నసంఖ్యయొక్క వర్గమును గలిపినచో పెద్దసంఖ్యయొక్క వర్గమగును.

(2) పెద్దసంఖ్యయొక్క వర్గమునందు చిన్నసంఖ్యయొక్కవర్గమును వ్యవకలించినచో అనగా ఆరెండుసంఖ్యలయొక్కయు వర్గాంతరము, ఆరెండుమూలసంఖ్యలయొక్క యోగమును అంతరముచే గుణింపనగు గుణనఫలముతో సమమగుచున్నది.

(ఇదియే వర్గాంతరము యోగాంతరఘాతసమము అను సిద్ధాంతము)

34. ప్ర. వర్గపద్ధతియొక్క ఉపపత్తి:—(29, 30, 31 ప్ర)

8796 ఈసంఖ్యకు వర్గముచేయవలసినచో (32 ప్ర) ఖండవర్గ పద్ధతిచే

$8796^2 = 8790^2 + (8790 \times 6 \times 2) + 6^2$

ఇట్లు $8790^2 = 8700^2 + (8700 \times 90 \times 2) + 90^2$

ఇట్లు $8700^2 = 8000^2 + (8000 \times 700 \times 2) + 700^2$

$8000^2 = (8000)^2$

$$
\begin{aligned}
8796^2 = &\ (8790 \times 6 \times 2) + 6^2 \\
&+ (8700 \times 90 \times 2) + 90^2 \\
&\ (8000 \times 700 \times 2) + 700^2 \\
&+ 8000^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= &\ 8790 \times 12 + (6 \times 6) \\
&+ 8700 \times 180 + (90 \times 90) \\
&+ 8000 \times 1400 + (700 \times 700) \\
&+ (8000 \times 8000)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\text{అ}) = &\ 105480 + 36 \\
&+ 1566000 + 8100 \\
&+ 11200000 + 490000 \\
&+ 64000000
\end{aligned}
$$

(క) (1) =

36
+ 105480
+ 8100
+ 1566000
+ 490000
+ 11200000
+ 64000000
77369616

(క) (2)

36
10548
81
1566
49
112
64
77369616

(గ) (1)

105516
1574100
11690000
64000000
77369616

(గ) (2)

105516
15741
1169
64
77369616

(అ) ఈచిహ్నముగల సంఖ్యాసమూహము (క) (గ) చిహ్నలకు ఎదుట రూపాంతరములతో చూపబడినది.

(క) సంఖ్యాసమూహములో (1) ఈసంఖ్యాసమూహమే (2) ఈసంఖ్యాసమూహముగ శూన్యముల విడచి రూపాంతరముగ చూపబడినది. దీనిచే మూలోక్తపద్ధతి (29 ప్ర 30 ప్ర) ఉపపన్నములగుచున్నవి. ఆయాపంక్తులు ఎట్లు ఉత్పన్నములైనదియు పైస్వరూపమువలన నెరుంగవలయును.

(గ) సంఖ్యాసమూహములో (1) సంఖ్యాసమూహము (2) సంఖ్యాసమూహముగ రూపాంతరముతో శూన్యములవిడచి చూపబడినది. దీనిచే సామాన్యపద్ధతి (30 ప్ర) ఉపపన్నమగుచున్నది.

అత్రోద్దేశకః

సఖే నవానాంచ చతుర్దశానాం బ్రూహి త్రిహీనస్య శతత్రయస్య।
పంచోత్తరస్యాప్యయుతస్య వర్గం జానాసి చేద్వర్గవిధానమార్గం॥ 3॥

న్యాసః ౯, ౧౪, ౨౯౭, ౧౦౦౦౫ ఏషాం యథోక్తకరణేన జాతా వర్గాః ౮౧, ౧౯౬, ౮౮౨౦౯, ౧౦౦౧౦౦౦౨౫

అథవా నవానాంఖండే ౪, ౫ అనయోరాహతిః ౨౦ ద్విఘ్నీ ౪౦ తత్ఖండవర్గైక్యేన ౪౧ యుతా జాతా సైవ కృతిః ౮౧

అథవా చతుర్దశానాంఖండే ౬, ౮ అనయో రాహతిః ౪౮ ద్విఘ్నీ ౯౬ తత్ఖండవర్గౌ ౩౬, ౬౪ అనయోరైక్యేన ౧౦౦ యుతా జాతా సైవకృతిః ౧౯౬

అథవాఖండే ౪, ౧౦ తథాపి సైవకృతిః ౧౯౬

అథవారాశిః ౨౯౭ అయం త్రిభిరూనః పృథగ్యుతశ్చ ౨౯౪, ౩౦౦ అనయోర్ఘాతః ౮౮౨౦౦ త్రివర్గ ౯ యుతో జాతోవర్గః సఏవ ౮౮౨౦౯ ఏవం సర్వత్ర.

ఇతివర్గః.

తా॥ మిత్రుడా! వర్గమును చేయుమార్గము నెరింగినచో 9 యొక్కయు 14 యొక్కయు 3 చే తీసివేయబడిన 100 అనగా 97 యొక్కయు 5 చే అధికమగు అయుతము అనగా 10005 యొక్కయు వర్గమును చెప్పుము.

$9^2 = 81$

$14^2 = 196$

$297^2 = 88209$

$10005^2 = 100100025$

వర్గపద్ధతి చెప్పునపుడు ఉదాహరణములిచ్చి చూపబడినవి. కావున నిచట తిరిగి ఉదాహరణముల చూపుట అనావశ్యకమగుటచే చూపబడలేదు.

35. ప్ర. వర్గమును గనుగొనుటయందును, వర్గసంఖ్యలకు మూలమును గనుగొనుటయందును ఉపయుక్తములగుటచేతను ఎక్కుములవలె కొన్నిసంఖ్యలకు వర్గములను కంఠస్థముచేయుట మంచిది. అందులకై 1 టి మొదలు 50వరకును సంఖ్యలకు వర్గము లీదిగువ చూపబడుచున్నవి.

వర్గచక్రము.

సంఖ్య	వర్గము	సంఖ్య	వర్గము	సంఖ్య	వర్గము	సంఖ్య	వర్గము	సంఖ్య	వర్గము
1	1	11	121	21	441	31	961	41	1681
2	4	12	144	22	484	32	1024	42	1764
3	9	13	169	23	529	33	1089	43	1849
4	16	14	196	24	576	34	1156	44	1936
5	25	15	225	25	625	35	1225	45	2025
6	36	16	256	26	676	36	1296	46	2116
7	49	17	289	27	729	37	1369	47	2209
8	64	18	324	28	784	38	1444	48	2304
9	81	19	361	29	841	39	1521	49	2401
10	100	20	400	30	900	40	1600	50	2500

వర్గమూలము.

పటికిలోబడినవర్గసంఖ్యలకు వర్గమూలము ఎక్కములచేతనే తెలియదగినది. వీటిసహాయముచే పటికిమించిన అన్నిసంఖ్యలకును వర్గమూలమును చెప్పబోవు పద్ధతిచే గనుగొనవలయును. అందులకై పద్ధతి.

అథవర్గమూలే కరణసూత్రం వృత్తేనాహ

త్యక్త్వాంత్యాద్విషమాత్ కృతిం ద్విగుణయేన్మూలం సమేతద్ధృతే
త్యక్త్వా లబ్ధకృతిం తదాద్యవిషమాల్లబ్ధం ద్వినిఘ్నం న్యసేత్।

పంక్త్యాం పంక్తిహృతే సమేన్యవిషమా త్త్యక్త్వాప్తవర్గం ఫలం
పంక్త్యాం తద్ద్విగుణం న్యసేదితి ముహుః పంక్తే ర్దలం స్యాత్పదం॥ ౧౮

టీ॥ అంత్యాత్ = తుదయందున్న, విషమాత్ = విషమ(బేసి)అంకెవలన, కృతిం = వర్గమును, త్యక్త్వా = తీసివేసి, మూలం = మూలాంకమును, ద్విగుణయేత్ = రెట్టించవలెను, సమే = సమాంకము, తద్ధృతే = ఆరెట్టింపబడిన మూలాంకముచే భాగింపబడినదగుచుండగా, తదాద్యవిషమాత్ = ఆసమాంకమునకు ముందరనున్న విషమాంకమువలన, లబ్ధకృతిం = (ఆభాగింపగావచ్చిన) లబ్ధముయొక్కవర్గమును, త్యక్త్వా = తీసివేసి, ద్వినిఘ్నం = రెండుచేగుణింపబడిన, లబ్ధం = లబ్ధమును, పంక్త్యాం = భాజకపంక్తియందు, న్యసేత్ = ఉంచవలయును, సమే = మరియొక సమాంకము, పంక్తిహృతే = భాజకపంక్తిచే భాగింపబడినదగుచుండగా, అన్యవిషమాత్ = మరియొక విషమాంకమువలన, ఆప్తవర్గం= ఆలబ్ధముయొక్క వర్గమును, త్యక్త్వా = తీసివేసి, ద్విగుణం = రెండుచేగుణింపబడిన, తత్ = ఆ, ఫలం = లబ్ధము పంక్త్యాం = భాజకపంక్తియందు, న్యసేత్ = వ్రాయవలయును. ఇతి = ఇట్లు, ముహుః = తిరుగా, కృతే = చేయగా, పంక్తేః = భాజకపంక్తియొక్క, దలం = సగము, పదం = పదమై, స్యాత్ = అగును.

తాత్పర్యము—వర్గమూలపద్ధతి.

36. ప్రి. (1) మూలింపదగిన (వర్గమూలము గనఁగొనదగిన)సంఖ్యయొక్క ఏకస్థానము శతస్థానము మొదలగు బేసిస్థానములయందలి అంకెలకు పైభాగమున బేసియగు స్థానాంకములను గుర్తుకొరకు • ఇట్టిబిందువులను లిఖింపుము. బిందుచిహ్నముగల యంకె లెన్ని గలవో అన్నిమూలాంకము లుండునని తెలియుము. ఇట్లు ఏకస్థానము మొదలుకొని సంఖ్యయందలి బేసిస్థానములందలి అంకెలన్నిటియందును బిందుచిహ్నములను చేసి ఎడమవైపునుండి బిందువులుగల యంకెలను క్రమముగా మొదటివిషమాంకము రెండవవిషమాంకము మూడవవిషమాంకము ఇట్లు తెలియుము. (భాస్కరాచార్యులవారు కుడివైపునుండి ఆద్యాంకమును గ్రహించి సంఖ్యయొక్క ఎడమవైపునుండి మొదటిదియగు విషమాంకమును అంత్యాంకమని చెప్పియున్నారు. కాని అంత్యము ఉపాంత్యము ఇత్యాదిసంజ్ఞలవలన వ్యవహారము దుర్బోధమని యెంచి మొదటివిషమాంకము రెండవ విషమాంకము ఇట్లు బోధకై వ్రాయబడినది.)

(2) మొదటివిషమాంకమువలన నంతకంటె చిన్నదియగు వర్గసంఖ్యలలో పెద్దసంఖ్యను తీసివేసి ఆవర్గసంఖ్యయొక్క మూలమును రెండుచే గుణించి వేఱుగ లిఖింపుము

(3) ఇట్లు తీసివేయగానైన శేషమునకు కుడివైపున మొదటివిషమాంకమునకు కుడివైపుననున్న అంకెను వ్రాసి ఆసంఖ్యను రెట్టింపబడిన మూలాంకముచే భాగించి ఆలబ్ధమును రెట్టించి ఈరెట్టింపబడినసంఖ్యను దీనియొక్క ఏకస్థానాంకము ఇదివరలో రెట్టింపబడి వేఱుగలిఖింపబడిన సంఖ్యయొక్క ఏకస్థానాంకమునకు కుడివైపున నుండునట్లు క్రిందుగ వ్రాసి పైసంఖ్యతో గలుపుము. ఆసంఖ్యను భాజకపంక్తియని భావింపుము.

(4) అట్లు భాగింపగానగు శేషముయొక్క కుడివైపున రెండవవిషమాంకమును లిఖించి దానివలన వెనుకభాగింపగావచ్చిన లబ్ధముయొక్క వర్గమును తీసివేయుము.

(5) ఆశేషమునకు కుడివైపున రెండవవిషమాంకమునకు కుడివైపుననున్న యంకెను లిఖించి ఆసంఖ్యను భాజకపంక్తిచే భాగింపుము.

(6) భాగింపగానైన శేషమునకు కుడివైపున మూడవవిషమాంకమును లిఖించి దానివలన తిరుగభాగింపగానైన లబ్ధముయొక్క వర్గమును తీసివేసి లబ్ధమును రెండుచేగుణించి పూర్వమునందువలె భాజకపంక్తియందు కలుపుము. ఇపుడు దీనిని భాజకపంక్తిగ భావింపుము.

(7) ఇట్లు తిరుగతిరుగ విషమాంకమునకు కుడివైపుననున్న యంకెను వ్రాసి పంక్తిచే భాగింపుచు ఆలబ్ధమును రెట్టింపగానైనసంఖ్యను పంక్తియందు

గలుపుచు విషమాంకమును వ్రాసి ఆలబ్ధముయొక్క వర్గమును తీసివేయుచు నీక్రియను తుదవరకును చేయుము.

(8) ఇట్లు చేయఁగానైన భాజకపంక్తిని రెండుచే భాగించి ఆలబ్ధమును మూలముగా నెరుంగుము.

అత్రోద్దేశకః

మూలంచతుర్ణాంచ తథా నవానాంపూర్వంకృతానాంచసఖేకృతీనాం।
పృథ క్పృథ గ్వర్గపదాని విద్ధి బుద్ధే ర్వివృద్ధి ర్యది తేత్రి జాతా॥ ౪॥

న్యాసః ౪, ౯, ౮౧, ౧౯౬, ౮౮౨౦౯, ౧౦౦౧౦౦౨౦౧

లబ్ధాని క్రమేణ మూలాని ౨, ౩, ౯, ౧౪, ౨౯౭, ౧౦౦౦౧.

ఇతివర్గమూలం

తా. మిత్రుఁడా ఈగణితమునందు నీకు బుద్ధియొక్క యభివృద్ధి గలిగినచో 4 యొక్కయు 9 యొక్కయు మూలమును పూర్వమందుచేయబడిన వర్గముల యొక్క వర్గమూలములను వేర్వేరుగ తెలియుము.

(1) 4 యొక్క వర్గమూలము 2
(2) ఇట్లు $\sqrt{9} = 3$
(3) $\sqrt{81} = 9$

ఈసంఖ్యలు 9 ఎక్కములకు లోబడినవగుటచే మూలము గనుంగొనుటకు పద్ధతియొక్క ఆవశ్యకతలేదు,

(4) 196 దీనియొక్క మూలమును తెలియవలయును.

```
  ) 196 ( 1
    1
2 ) 9 ( 4
    8
    16
    16
    ..
```

పంక్తి
2) 28
14 మూలము.

ఇందు 6 విషమాంకము. 9 సమాంకము. 1 విషమాంకము మొదటి విషమాంకము 1 టి వలన 1 టి యొక్క వర్గమును తీసివేసి సమాంకమగు 9 ని మొదటి విషమాంకమునుండి తీసివేయబడిన వర్గసంఖ్య 1 యొక్క మూలమగు 1 టిని రెట్టింపనగు 2 చే భాగింప లబ్ధము 4 వచ్చినది శేషము. 1 టి. ఈశేషముయొక్క కుడిప్రక్కను రెండవ విష

మాంకము 6 ను చేర్పగానగు 16 లో వెనుక భాగింపగావచ్చిన లబ్ధము 4యొక్క వర్గము 16 ను తీసివేయగా శేషము మిగలలేదు. వర్గసంఖ్యయందలి అంకెలన్నియు పూర్తిఅయినవి. ఈ 4 ను రెట్టించి భాజకపంక్తియందు కుడిప్రక్కను చేర్పగా 28. దీనిని రెండుచే భాగింపగా 14 వర్గమూలసంఖ్య అని తెలియుచున్నది.

మరియొక ఉదాహరణము.

```
      88209 ( 2
      4
4  |  48 ( 9
   |  36
      122
      81
58 |  410 ( 7
   |  406
       49
       49
```

పంక్తి
4
18
14
2) 594
297 వర్గమూలము.

బేసిస్థానములందలి అంకెలకు పైన బిందువులు గుర్తుగా నుంచబడెను. మొదటి విషమాంకము 8 వలన 2 యొక్క వర్గము 4 తీసివేయబడెను. శేషము 4 మిగిలెను. దీని కుడిప్రక్కను వర్గసంఖ్యయందలి విషమాంకమునకు కుడిప్రక్కనున్న సమాంకము 8 చేర్చబడెను మొదటివిషమాంకమువలన తీసివేయబడిన వర్గసంఖ్య 4 యొక్క మూలమగు 2 ను రెట్టించగానగుసంఖ్య 4 చే భాగింపవలెను. కాని ఇచట నీవిషయము గమనింపదగినది. అట్లు భాగించుటలో ఎంతలబ్ధమును గ్రహించినచో లబ్ధముయొక్క వర్గము భాగింపగానగు శేషముయొక్క కుడిప్రక్కను విషమాంకమును చేర్పగానగు సంఖ్యనుండి తీసివేయబడునో అంతలబ్ధమును మాత్రమే గ్రహింపవలయును. కావున 9 మాత్రమే లబ్ధముగా గ్రహింపబడెను. $4 \times 9 = 36$ ను తీసివేయగానగు శేషము 12 దీనికుడిప్రక్కను రెండవవిషమాంకమగు 2 ను చేర్పగా 122, ఇందు 9 యొక్క వర్గము 81 ను తీసివేసి శేషము 41 యొక్క కుడిప్రక్కను రెండవ సమాంకమును చేర్పగా 410 దీనిని ఇదివరలో భాగింపగావచ్చిన లబ్ధమగు 9 ని రెట్టింపగానగు 18 ని మొదట రెట్టింపబడిన వర్గమూలాంకమునందు 18 యొక్క ఏకస్థానాంకము కుడిప్రక్కనుండునట్లు క్రిందుగలిఖించి కలుపగా నగుపంక్తి 58చే భాగింపగా 7 లబ్ధము శేషము 4. దీనికి కుడిప్రక్కను మూడవవిషమాంకము 9ను చేర్ప 49. ఇందు రెండవసారి భాగింపగా వచ్చిన లబ్ధము 7 యొక్క వర్గము

49 ను తీసివేయగా శేషము మిగులలేదు. వర్గసంఖ్యయందలి యంకములన్నియు పూర్తియైనవి. రెండవసారి భాగింపవచ్చినలబ్ధమగు 7 ను రెట్టించి 14 ను పంక్తి 58 లో పూర్వమువలె కూర్పగా 534 పంక్తి. దీనిని 2 చే భాగింప 237 ఇది వర్గమూలమయ్యెను.

37. ప్ర. పూర్వపద్ధతి ననుసరించి మఱియొక వర్గమూలపద్ధతి.

(1) మూలింపదగిన సంఖ్యయందు విషమాంకములను పూర్వప్రకారము గుర్తింపుము.

(2) (36 ప్ర. 1 భా 2 భా. లను బాగుగ గమనింపుము) మొదటి విషమాంకమువలన నంతకంటె చిన్నదియగు పెద్దవర్గసంఖ్యను తీసివేసి ఆవర్గసంఖ్య యొక్క మూలమును భాగహారమునందువలె లబ్ధస్థానమును మూలస్థానముగకల్పించి అచట వ్రాయుము. ఈయంకె మూలమునందు ఎడమవైపునుండి ప్రథమాంకమగును.

(3) అట్లు తీసివేయగా వచ్చినశేషముయొక్క కుడివైపున రెండవవిషమాంకమును (మొదటివిషమాంకము తరువాతనుండు సమాంకముతోడ రెండవ విషమాంకమును అనగా రెండిటిని) లిఖించి ఇట్లు లిఖించుటచేనగు సంఖ్యను భాజ్యముగ భావింపుము.

(4) వెనుకవచ్చినమూలసంఖ్యను రెట్టించి ఆసంఖ్యను భాగహారమునందువలె ఈభాజ్యముయొక్క ఎడమవైపున భాజకస్థానమున లిఖించి దీనిని అపూర్ణభాజకముగ భావింపుము. భాజ్యమునందలి ఏకస్థానాంకమును విడువగ నగు సంఖ్యను అపూర్ణభాజకముచే భాగింప నెంతలబ్ధమువచ్చునో ఆలబ్ధాంకమును అపూర్ణభాజకముయొక్క కుడివైపున వ్రాసి ఆమొత్తపుసంఖ్యను పూర్ణభాజకముగ భావింపుము.

(5) ఆ పూర్ణభాజకమును పూర్వపులబ్ధాంకముచే గుణించిభాజ్యమునుండి తీసివేయుము (ఇందు ఏయంకెను లబ్ధాంక మనుకొనినచో అపూర్ణభాజకముయొక్క కుడివైపున లబ్ధాంకమును చేర్చుటచేనగు పూర్ణభాజకమును లబ్ధాంకముచే గుణించినచగు గుణనఫలము భాజ్యమునుండి తీసివేయబడునో ఆశేషమున్న భాజ్యముకంటె తక్కువయుండునో అట్టిఅంకెను గమనించి లబ్ధాంకముగా గ్రహింపవలయును.)

(6) ఈలబ్ధాంకము ఎడమవైపునుండి రెండవమూలాంక మగుచున్నది. కావున నీయంకెను వెనుకటిమూలాంకమునకు నెడమవైపున వ్రాయుము.

(7) తిరుగా తీసివేయగానైన శేషముయొక్క కుడివైపున రెండవవిషమాంకమునకు ముందున్న సమాంకవిషమాంకములను రెంటిని లిఖించి మొత్తపు సంఖ్యను భాజ్యముగా భావించి ఇందలి ఏకస్థానముకంటె నితరమైన సంఖ్యను— ఇంతవరకువచ్చిన మూలసంఖ్యను రెట్టించి దానిని అపూర్ణభాజకముగ భావించి ఆఅపూర్ణభాజకముచే—భాగింపగా వచ్చు లబ్ధాంకమును ఆఅపూర్ణభాజకముయొక్క కుడివైపున వ్రాసి, దీనిని పూర్ణభాజక మనుకొనుము. పిమ్మట పూర్ణభాజకమును లబ్ధాంకముచే గుణించి ఆగుణనఫలమును పూర్ణభాజ్యమునుండి తీసివేయుము. ఈలబ్ధాంకమును వెనుకటిమూలాంకములకు కుడిప్రక్కనులిఖింపుము

(8) ఇట్లు వర్గసంఖ్యయందలి యంకములన్నియు ముగించువరకు నీక్రియను చేయుము. తుదకు మూలస్థానమందు నిష్పన్నమగుసంఖ్య వర్గమూలమగును తుదను శేషము మిగిలినచో ఆవర్గమూలము అభీష్టరాశియొక్క నిరగ్రమూలమని చెప్పబడును.

(9) ఎపుడు భాజ్యమునం దేకస్థానాంకమును విడువగానైన సంఖ్యను అపూర్ణభాజకముచే భాగించుటచే లబ్ధము లభింపకపోవునో అపుడు శూన్యము (0) ను లబ్ధమనుకొని అపూర్ణభాజకముయొక్క కుడివైపునను మూలస్థానమునందును వ్రాసి వెనుకటివలెనే చేయుము.

ఉదా:—148225 దీనికి వర్గమూల మెంత ?

```
వర్గము    వర్గమూలము
 148225 ( 385
 9
68 ) 582 ( 8
     544
765 ) 3825 ( 5
      3825
      ...
```

ఇచట మొదటివిషమాంకము 14లో 3 యొక్క వర్గము 9 ని తీసివేయగా శేషము 5 ఇందు రెండవవిషమాంకమువరకు నున్నసంఖ్య 82 ను చేర్పగానైన భాజ్యము 582 ఈభాజ్యమునందు ఏకస్థానాంకమును విడువగానైనసంఖ్య 58 దీనిని మూలాంకమును రెట్టింపగానగు6 చే భాగింప 9 లబ్ధము వచ్చును. కాని 8మాత్రమే గ్రహింపవలయును రెట్టింపబడిన మూలాంకమగు అపూర్ణభాజకము 6 యొక్క కుడి వైపున 9 ని చేర్పగా 69 పూర్ణభాజకమగును. దీనిని 9 చే గుణింప గుణనఫలము 621 ఇదిభాజ్యము 582 వలన తీసివేయబడదు, కావున 8 ని లబ్ధముగ గ్రహించినచో $68 \times 8 = 544$ ఇది భాజ్యము 582 వలన తీసివేయబడుచున్నది. ఈ 8 రెండవమూలాంకము.

తిరుగ శేషము 38 ఇందు మూడవవిషమాంకమువరకునైన సంఖ్య 25 ను చేర్పగా 3825 భాజ్యము. మూలస్థానమందలి సంఖ్యను రెట్టింప 76, ఇపుడు భాజ్యమునందేకస్థానాంకమును విడువగానగు సంఖ్య 382 ను ఇప్పటి అపూర్ణభాజకము 76 చే భాగింప వచ్చులబ్ధము 5. దీనిని చేర్చుటచేనైన పూర్ణభాజకము 765 ను 5 చే గుణింప 3825 దీనిని తీసివేయగా శేషముమిగులలేదు. 5 మూడవ మూలాంక మయ్యెను. కాబట్టి 385 ఉద్దిష్టరాశి (148225) కి వర్గమూలము.

(2) ఉదా:—1096203 దీనికి వర్గమూల మెంత ?

```
వర్గము    వర్గమూలము
   | 1096209 ( 1047
   | 1
20 | 9 ( 0
   | 0
204 | 962 ( 4
    | 816
2087 | 14609 ( 7
     | 14609
```

ఇచట మొదటి విషమాంకము 1 టి వలన 1 టి యొక్కవర్గము తీసివేయబడుచున్నది గాన 1 టి మొదటి మూలాంకమయ్యెను. శేషము లేదు. మొదట విషమాంకము తరువాత వర్గసంఖ్యయందు సమాంకము శూన్యము (0). ఈగణితమునందెడమభాగమున నంకెలులేని శూన్యమునకు ప్రయోజనములేదు. కావున శేషము లేకుండుటచే శూన్యమును వ్రాయక విషమాంకము మాత్రమే వ్రాయ

బడెను. ఇది భాజ్యము. మొదటిమూలాంకమును రెట్టింప 2 అపూర్ణభాజకము భాజ్యమునందలి ఏకస్థానమునందలి యంకము (19) ను విడువగా సంఖ్యయే లేదు. కాబట్టి అపూర్ణభాజకము 2 చే భాగించుటకు సంఖ్యయే లేదు. భాజ్యములేనిచో లబ్ధమున్నులేదు. కాని లబ్ధమునకు ముందు ప్రయోజనము గలదు. కావున లబ్ధము లేదనగాలబ్ధము సున్నయని గ్రహింపవలెను. అట్టి సున్నను చేర్పగానగు పూర్ణభాజకమును సున్న (0) చే గుణింపగా గుణనఫలము (0) దీనిని తీసివేయగా 9 శేషము. కనుక నిచట రెండవమూలాంకము (0) యని గ్రహింపవలయును. తక్కినగణితము పూర్వమునందువలెనే గ్రహింపవలయును.

38. ప్ర. వర్గమూలపద్ధతియొక్క ఉపపత్తి:—

(31. ప్ర) వర్గసామాన్యపద్ధతికి తలక్రిందగు పద్ధతిచే నీవర్గమూలపద్ధతి బయలువెడలుచున్నది. కావున నీవిషయము స్పష్టపడుటకై ఆ (31 ప్ర 1) ఉదాహరణమును సంపూర్ణముగా నిచటచూపి ఉపపత్తి చూపబడుచున్నది.

మూలసంఖ్య	8796
(1) పంక్తి	105516
(2) పంక్తి	15741
(3) పంక్తి	1169
(4) పంక్తి	64
వర్గము	77369616

ఇచట 76369616 ఈసంఖ్య సిద్ధమైన వర్గరాశి యగుచున్నది. ఈవర్గసంఖ్యకుపైన ఒకపంక్తి క్రిందనొకపంక్తి రెండురెండుస్థానముల విడచి క్రిందు క్రిందుగనుండునట్లు నాలుగుపంక్తులు వ్రాయబడినవి,

ఈనాలుగింటియొక్కయు యోగము వర్గసంఖ్య కాబట్టి ఉద్దిష్టవర్గసంఖ్యయందుఎడమవైపునుండి ఎంతెంతవరకు ఆపంక్తులలో నొక్కొకపంక్తి కలుగుటయు రెండేసిస్థానములకు నొక్కొక్కటిచొప్పున లిఖింపబడు బిందువులచే స్పష్టపడుచున్నది

పై నాలుగుపంక్తులలోను నాల్గవపంక్తి 64. ఇది మూలసంఖ్యలోని మొదటియంకె 8 యొక్క వర్గము. దీనిని వర్గరాశిలో నెడమవైపునుండి తీసివేయగా 13369616 ఈశేషము మిగిలినది. ఇది పైనుండి 1, 2, 3 పంక్తుల యోగమై

యున్నది. ఈశేషమునందు మూడవపంక్తి ఈ 1336 సంఖ్యలో నున్నది. ఇది మొదటిమూలాంకముయొక్క వర్గమును తీసివేయగా మిగిలిన శేషముతో రెండవ విషమాంకమువరకు నున్నసంఖ్యను చేర్పగా నైనసంఖ్య అగుచున్నది. ఇందు మూడవ పంక్తి తీసివేయవలయును. మూడవపంక్తి మూలసంఖ్యలో మొదటి యంకెయగు 8 తో కుడివైపున 7 ను చేర్పగా నైన 87 లో ఏకస్థానాంకము 7 ను 7 చేతను గుణించి మిగిలినసంఖ్యను రెట్టింపబడిన 7 చే గుణింపగానగు సంఖ్యతో సమమగు చున్నది. అనగా $(80 \times 7 \times 2) + (7 \times 7) = (80 \times 2 + 7) \times 7 = 167 \times 7 = 1169$ ఆగుచున్నది. (31 ప్ర చూ) ఇపుడు 87 లో 8 మాత్రము తెలియబడెను. 7 ను గనుగొనవలయును, దీనినిమిత్తము ఆలోచింపవలయును. 1169 లో ఏకస్థానాంకము 9 ను విడువగా మిగిలిన 116 నందు రెట్టింపబడిన మొదటిమూలాంకము 16 ను 7 చే గుణింపనగు 112 గలదు. గనుక రెట్టింపబడిన మొదటిమూలాంకము 16 చే 112 ను భాగింప రెండవమూలాంకము 7 లబ్ధముగ వచ్చును. ఇపుడీ 112 సంఖ్య మూడవపంక్తి 1169 లో ఏకస్థానాంకము 9 ను విడువగా నైన 116 నందును గలదు. 8 యొక్క వర్గమును తీసివేయగా నైన శేషము 13 తో రెండవవిషమాంకమువరకునున్న 36 ను చేర్పగానగు 1336 లో ఏకస్థానాంకము 6 ను విడువగా నైన 133 నందును గలదు. కనుకనే మూలానయనపద్ధతియందు (31 ప్ర)లో "భాజ్యమునందు ఏకస్థానాంకమును విడువగా నైన సంఖ్యను రెట్టింపబడిన మూలస్థానమందలి సంఖ్యచే భాగింపగా వచ్చు లబ్ధము రెండవమూలాంకము అగును" అని చెప్పబడినది.

కాని భాజ్యమున ఏకస్థానాంకమును విడువగా నైన సంఖ్య రెట్టింపబడిన మొదటిమూలాంకముచే రెండవమూలాంకమును గుణింపగా నైన గుణనఫలముకంటె తరచుగ నెక్కువయైయుండును. కావున నొకానొకపుడు రెట్టింపబడిన మూలాంకముచే భాగించుటలో రెండవమూలాంకముకంటె నధికమగులబ్ధముకూడ వచ్చుచున్నది, అపుడాలబ్ధమును రెట్టింపబడిన మొదటిమూలాంకము (అపూర్ణభాజకము)నకు కుడివైపున వ్రాయుటచేనైన పూర్ణభాజకమును లబ్ధముచే గుణింపగానగు గుణనఫలము భాజ్యముకంటె పెద్దదియగుటచే భాజ్యమువలన తీసివేయబడదు. అనగా గుణనఫలము మూడవపంక్తికంటెను పెద్దసంఖ్యయగుచున్నది. అందుచే

ఏయంకెను లబ్ధముగ గ్రహించినచో పూర్ణభాజకమును లబ్ధముచే గుణింపనగు గుణనఫలము భాజ్యమునుండి తీసివేయబడునో అట్టిపెద్దయంకెనే లబ్ధముగ గ్రహింపవలయుననియు వ్రాయబడెను. ఈప్రకారము మూలమునందు రెండంకెలు తెలియబడినవి. ఇపుడీరెండంకెలను ఒకసంఖ్యగా భావించి పైప్రకారము మూడవయంకెను గనుగొనుము. అట్లుగ నాలవయంకెయును తెలియబడును. ఇట్లు వర్గసంఖ్యయం దెన్నియంకెలున్నను గ్రహించునది. ఇట్లు వర్గమూలానయనపద్ధతియొక్క ఉపపత్తి స్పష్టముగ గన్పట్టుచున్నది.

39. ప్ర. ఇట్లు (36 ప్ర) వర్గమూలపద్ధతియు (29 ప్ర 30 ప్ర) వర్గపద్ధతుల వలన స్పష్టముగాగలదు. అందులకై ఆపద్ధతి (29 ప్ర) వర్గము యొక్క ఉదాహరణమును మూలానయనపద్ధత్యుదాహరణమును ఒకచో చూపబడుచున్నవి.

(29 ప్ర) వర్గానయనము

మూలసంఖ్య	234
(1) పంక్తి	16
(2) పంక్తి	184
(3) పంక్తి	9
(4) పంక్తి	12
(5) పంక్తి	4
యోగవర్గము	54756

(30 ప్ర) వర్గానయనము

మూలసంఖ్య	234
(1) పంక్తి	4
(2) పంక్తి	12
(3) పంక్తి	9
(4) పంక్తి	184
(5) పంక్తి	16
యోగము వర్గము	54756

మూలాయనము

```
వర్గసంఖ్య 54756 ( 2
          4
     4 ) 14 ( 3
          12
           27
            9
    46 ) 185 ( 4        పంక్తి
         184              4
           16             6
           16               8
           ..          2 ) 468
                  మూలము   234
```

చూడుము:—

ఈవర్గానయనములకు ఎదుట మూలానయనము చూపబడినది. (29 ప్ర) వర్గానయనమునకు మూలాయనము తలక్రిందుగ నున్నది అనగా

వర్గానయనమునందు భాజకపంక్తియగు 5 వ పంక్తి మూలానయనమునందు తొలుత తీసివేయబడెను. 4 పంక్తి రెండవసారి తీసివేయబడెను. ఇట్లు తలక్రిందుగ గనుపించుచున్నదిగాని '(30 ప్ర) వర్గానయనమున పంక్తులు ఎట్లు కనుపించుచున్నవో మూలానయనమునందు అట్లుగనే క్రమముగా తీసివేయబడినవి' అను విషయము బాగుగ గమనింపదగినది. దానిచే మూలానయనోపపత్తి స్పష్టము గాగలదు. వైవర్గానయనమును బాగుగ గమనించినచో ఆపంక్తులయందు ఒకటి విడచి యొకటి మూలసంఖ్యలయందలి యంకెలవుక్రమముగ వర్గములైయున్నవి. దానిచే బిందుచిహ్నలయొక్క ప్రయోజనము స్పష్టముగాగలదు.

మూలానయనమునందు మొదటివిషమాంకము 5 వలన (30 ప్ర వర్గానయనము) మొదటిపంక్తి 4 అగు 2 యొక్కవర్గము తీసివేయబడెను శేషము 1 టి దీనితో వర్గసంఖ్యయందలి సమాంకము 4 ను చేర్పగావగు 14 వలన ఇందు రెండవ పంక్తియగు 12 ను తీసివేయవలయును. రెండవపంక్తియగు 12 మొదటిమూలాంకము 2 ను రెట్టింపనగు 4 యొక్కయు రెండవమూలాంకము 3 యొక్కయు గుణనఫలమై యున్నది. కావున ద్విగుణిత ప్రథమమూలాంకము4చే ద్వితీయమూలాంకమును గనుగొనవచ్చును. $\frac{2\times2\times3}{2\times2}=3$ కావున ద్విగుణితప్రథమమూలాంకముచే భాగింప లబ్ధము రెండవమూలాంకమగుచున్నది. అట్లు 14 వలన 12 ను తీసివేయగా శేషము 2 దీనితో వర్గసంఖ్యయందలి 7 ను చేర్ప 27 ఇందు ద్వితీయ మూలాంకవర్గము 9 అగు వర్గానయనమున మూడవపంక్తి తీసివేయవలయును అట్లు తీసివేయగా శేషము18. దీనితో వర్గసంఖ్యయందలి 5 ను చేర్పగా 185భాజ్యము. ఇందు 184 నాలవపంక్తిగలదు ఈ 4 వ పంక్తి ఒకటి రెండు మూలాంకములను క్రమముగ వ్రాయుటచేనగు సంఖ్యను రెట్టించి దానిచే మూడవ మూలాంకమును గుణింపనగు గుణనఫలము. $23\times2\times4=184$ కావున $4=\frac{184}{23\times2}$ ఇట్లు 3 వ మూలాంకము లభించును, ఇట్లు ఎప్పటికప్పుడు అదివరకులభించిన మూలాంకములను క్రమముగ లిఖించి రెట్టించి దానిచే సమాంకమును చేర్పగానగు సంఖ్యను భాగింపగా మూలాంకములు లభించును గాన అట్లు భాగించుటకై భాజకపంక్తి

నిర్మింపబడుచువచ్చెను ఈభాజకపంక్తి క్రమలిఖితమూలాంకములచే నగు సంఖ్యను ద్విగుణముచేయుటచే రెండుచే భాగింప మూలము లభించునని చెప్పబడెను.

ఇట్లంతటను గ్రహింపనది.

ఇందును ఒకానొకపుడు భాజకపంక్తిచే భాజ్యమును భాగించుటలో తెలియవలసిన మూలాంకముకంటె పెద్దసంఖ్యయగు లబ్ధముగూడ వచ్చును. అపుడు ఆశేషముతో విషమాంకమును చేర్పగానగు సంఖ్యవలన లబ్ధముయొక్క వర్గము తీసివేయబడదు. కాబట్టి ఎట్టిలబ్ధమును గ్రహించినచో ముందు శేషముతో విషమాంకమును జేర్పనగు సంఖ్యవలన లబ్ధముయొక్క వర్గము వ్యవకలింపబడునో అట్టి పెద్దసంఖ్యనే లబ్ధముగ గ్రహింపవలయును. ఇట్లు (36 ప్ర) వర్గమూలపద్ధతి ఉపపన్నమగుచున్నది.

40. ప్ర. ఘనమును చేయు పద్ధతి.

ఘనే కరణసూత్రం వృత్తత్రయం

సమత్రిఘాతశ్చ ఘనః ప్రదిష్టః, స్థాప్యో ఘనోఽన్త్యస్య,
తతోఽన్త్యవర్గః। ఆదిత్రినిఘ్నస్తత ఆదివర్గ స్త్ర్యన్త్యాహతో,
ఽథాదిఘన శ్చ, సర్వే॥ ౧౯॥ స్థానాన్తరత్వేనయుతా ఘనస్స్యాత్ప్ర
కల్ప్య తత్ఖండయుగం తతోఽన్త్యమ్। ఏవం ముహు ర్వర్గ ఘనప్రసిద్ధా
వాద్యాంకతో వా విధి రేవ కార్యః॥ ౨౦॥

టీ॥ సమత్రిఘాతః = సమమైన మూడంకెలయొక్క గుణనము, ఘనశ్చ= ఘనమనియు (త్రిఘాతమనియు) ప్రదిష్టః = చెప్పబడినది. (28 ప్ర. 1 సి. చూ.)

(1) అన్త్యస్య = అన్త్యాంకముయొక్క, ఘనః = ఘనము, స్థాప్యః= వ్రాయదగినది.

(2) తతః = పిమ్మట, ఆదిత్రినిఘ్నః = ఆద్యాంకముచేతను, 3 చేతనున్న గుణింపబడిన, అన్త్యవర్గః = అన్త్యాంకముయొక్క వర్గము. (వ్రాయదగినది,)

(3) తతః = పిమ్మట, త్ర్యన్త్యాహతః = 3 చేతను, అన్త్యాంకముచేతనున్ను గుణింపబడిన, ఆదివర్గః = ఆద్యాంకవర్గము, (వ్రాయదగినది.)

(4) అథ = పిమ్మట, ఆదిఘనశ్చ = ఆద్యాంకముయొక్క ఘనమున్ను (వ్రాయదగినది.)

(5) సర్వే = అన్నియు, స్థానాంతరత్వేన = ఒక్కొక్కస్థానభేదము గలవియగుటచే (వ్రాయబడినవియై) యుతాః = కలుపబడినవియైనచో, ఘనః = ఘనము, స్యాత్ = అగును.

(6) తతః = పిమ్మట, తత్ఖండయుగం = ఆఅంత్యాంకము, దానికిముందుగలయంకె ఆద్యాంకము అనురెండిటిని, అంత్యం = అంత్యమునుగా, ప్రకల్ప్య = కల్పించి, (అంత్యముగ కల్పింపబడిన, ఆయంకెలకు ముందున్నయంకెను ఆద్యముగాను కల్పించి) ఏవం = ఈప్రకారముగా, ముహుః = తిరుగతిరుగ (చేయవలయును.)

(7) వర్గఘనపరిసిద్ధ్యై = వర్గఘనములు సిద్ధించునిమిత్తము, ఏషః = ఈ విధిః = పద్ధతి, ఆద్యాంకతో వా = ఏకస్థానమునుండియైనను, కార్యః = చేయదగినది.

తాత్పర్యము—సూత్రానుసారిపద్ధతి.

(1) ఘనముచేయదగినసంఖ్యను వ్రాసి క్రింద గీటును గీయుము.

(2) తొలుత నెడమవైపునుండి మొదటియంకెయొక్క ఘనమును గీటు క్రింద మొదటిపంక్తిగ వ్రాయుము.

(3) మొదటియంకెయొక్క వర్గమును రెండవయంకెచే గుణించి దానిని 3 చే గుణించి ఆగుణనఫలమును రెండవపంక్తిగా మొదటిపంక్తియొక్క ఏకస్థానాంకముక్రిందుగ రెండవపంక్తియొక్క దశస్థానాంకముండునట్లు వ్రాయుము. (సూత్రమునందు ఈరెండవయంకె ఆద్యాంకమని వ్యవహరింపబడెను.)

(4) పిమ్మట రెండవయంకెయొక్క వర్గమును మొదటియంకెచే గుణించి దానిని 3 చే గుణింపనగు సంఖ్యను 3 వ పంక్తిగా వ్రాయుము. పైపంక్తియొక్క ఏకస్థానముక్రిందుగ క్రిందిపంక్తియొక్క దశస్థానాంక ముండవలయును. అను విషయము మరువదగదు.

(5) రెండవయంకెయొక్క ఘనమును 4 పంక్తిగ వ్రాయుము.

(6) పిమ్మట 1, 2 అంకెలుగల సంఖ్యను మొదటియంకెగా భావించి 3 వ యంకెను రెండవయంకెగా భావించి పూర్వమువలె పంక్తులను క్రమముగ వ్రాయుము. అనగా 1, 2 అంకెలను ఒకసంఖ్యగా భావించి ఆసంఖ్యయొక్క వర్గమును 3 వ యంకెచేతను 3 చేతను గుణించి 5 వ పంక్తిగ వ్రాయుట. 3 వ యంకెయొక్క వర్గమును 1, 2 అంకెలుగల సంఖ్యచేతను 3 చేతను గుణించి 6 వ పంక్తిగా వ్రాయుటయు చేయదగినది.

(7) మూడవయంకెయొక్క ఘనము 7 పంక్తిగ వ్రాయుము.

(8) ఇట్లు తిరుగ 1, 2, 3 అంకెలను ఒకసంఖ్యగ భావించి 4 వ యంకెను రెండవసంఖ్యగ భావించి పూర్వప్రకారము పంక్తులను వ్రాయుము.

(9) ఇట్లు తిరుగతిరుగ ఘనముచేయదగిన సంఖ్యయందలి అంకెలన్నియు ముగించువరకు వెనుకటి అంకెలను ఒకసంఖ్యగ భావించుట పంక్తులను క్రిందక్రింద వ్రాయుటయు చేయదగినది.

(10) ఇట్లు తుదివరకు వ్రాయబడిన పంక్తులనన్నిటిని కలిపినచో ఉద్దిష్ట సంఖ్యయొక్క ఘనమగును.

ఉదా:—125 కు ఘనము చేయవలయును.

		125
(1)	పంక్తి	1
(2)	పంక్తి	6
(3)	పంక్తి	12
(4)	పంక్తి	8
(5)	పంక్తి	2160
(6)	పంక్తి	900
(7)	పంక్తి	125
యోగము	ఘనము	1953125

ఇచట మొదటియంకెయగు 1టి యొక్క ఘనము 1 టి (1) పంక్తిగ వ్రాయబడెను. మొదటియంకె 1 యొక్క వర్గము 1 యొక్కయు, రెండవయంకె 2 యొక్కయు, 3 యొక్కయు, గుణనము $1 \times 2 \times 3 = 6$ రెండవపంక్తిగ వ్రాయబడెను. రెండవయంకె 2 యొక్క వర్గము 4 యొక్కయు మొదటియంకె 1 టి యొక్కయు 3 యొక్కయు గుణనము $4 \times 1 \times 3 = 12$ మూడవపంక్తిగ వ్రాయబడెను. రెండవయంకె 2 యొక్క ఘనము 8 నాలవపంక్తిగ వ్రాయబడెను ఒకటి రెండంకెలను ఒకసంఖ్య 12 గ భావించి మూడవయంకె 5 ను రెండవయంకెగా భావించి

$12^2 \times 5 \times 3 = 2160$ ఐదవపంక్తి. $5^2 \times 12 \times 3 = 900$ ఆరవపంక్తి 5 యొక్క ఘనము 7 వ పంక్తి. ఒక పంక్తి క్రింద నొకపంక్తి క్రమముగ నొక్కొక స్థానము ముందునకుజరిపి వ్రాయబడి కలుపబడినవి కలుపగానైనయోగము 1953125 ఉద్దిష్టసంఖ్య 125 కు ఘనమయ్యెను. ఇట్లు అంతటను గ్రహింపదగినది.

41. ప్ర. ఈపద్ధతిచే నేకస్థానమునుండి చేయుట.

సూత్రమునందు "ఆద్యాంకవా విధి రేష కార్యతోః" అనియే యున్నది. ఆభేదము వివరింపబడలేదు, ఆకారణముచే ఆద్యాంకము (ఏకస్థానాంకము)నుండి చేయునపుడు పూర్వమువలె రెండవయాంకెగా దశస్థానాంకమే గ్రహించినచో క్రియానిర్వాహము గాదు. కావున ఆపద్ధతి వివరింపబడుచున్నది.

(1) తొలుత ఏకస్థానాంకముయొక్క ఘనము. (1) పంక్తి.

(2) ఏకస్థానాంకవర్గమును ఏకస్థానాంకమును విడువగానైనసంఖ్యచే గుణించి దానిని 3 చే గుణించి (2) పంక్తి

(3) ఏకస్థానాంకమును విడువగానైన సంఖ్యయొక్క వర్గమును ఏకస్థానాంకముచే గుణించి దానిని 3 చే గుణించి (3) పంక్తి

(4) పిమ్మట ఘనముచేయదగిన సంఖ్యలోని ఏకస్థానాంకమును విడచి మిగిలినసంఖ్యను ఘనముచేయదగిన సంఖ్యగ భావించి అందలిఏకస్థానాంకఘనము నాలవపంక్తి ఇట్లు పూర్వ ప్రకారము పంక్తులను వ్రాయవలయును.

(5) ఇట్లు ఘనింపదగినసంఖ్యయందలి అంకెలన్నియు ముగించునరకు తిరుగతిరుగ నీక్రియను చేయుచు తుదకు నెడమవైపునుండి మొదటిదగు అంకె యొక్క ఘనమును వ్రాయుము.

(6) పైపంక్తియొక్క దశస్థానాంకము క్రిందుగ క్రిందిపంక్తియొక్క ఏకస్థానాంకముండునట్లు పంక్తుల నన్నిటిని క్రమముగ వ్రాసి కలిపినచో అట్లు కలుపగానైన మొత్తము అభీష్టసంఖ్యయొక్క ఘనమగును.

ఉదా:—125 కు ఘనము.

(40 ప్ర) పద్ధతిచే వ్రాయబడిన పంక్తులు ఈ (41 ప్ర) పద్ధతిచే తల క్రిందుగ వచ్చుచున్నవి. అనగా (40 ప్ర) చే ఉదాహరణమునందు క్రిందినుండి లెక్కింపగా 1, 2, 3 మొదలగు పంక్తులు (41 ప్ర) చే పైనుండి 1, 2, 3 మొదలగు పంక్తులుగ నుండును. కావున రెండువిధములుగను చూపబడుచున్నవి.

(40 ప్ర చే) 125	(41 ప్ర చే) 125
1	125
6	900
12	2160
8	8
2160	12
900	6
125	1
1953125	1953125

ప్రతిపంక్తియొక్కయు వివరమునుగూర్చి (40 ప్ర) చూడుము.

42. ప్ర. పైపద్ధతినిబట్టి ఘనమునందు సామాన్యపద్ధతి.

(1) ఘనింపదగినసంఖ్యక్రింద గీటును గీయుము.

(2) ఘనముచేయదగినసంఖ్యయొక్క ఏకస్థానాంకముయొక్క ఘనమును గనుగొని ఆసంఖ్యయొక్క ఏకస్థానాంకమునుమాత్రము గీటుక్రింద వ్రాసి మిగిలిన సంఖ్యను వేరుగ లిఖించుకొనుము.

(3) పిమ్మట ఘనముచేయదగిన సంఖ్యను ఆసంఖ్యయొక్క ఏకస్థానాంకముచే గుణించి ఆగుణనఫలమును ఘనింపదగిన సంఖ్యయందు ఏకస్థానాంకమును విడువగానైనసంఖ్యచే గుణించి దానిని తిరుగ 3 చే గుణించి అందు ఇదివరకు వేరుగలిఖించినసంఖ్యను కలిపి అట్లుచేయగానగు మొత్తపుసంఖ్యను వెనుక గీటు క్రింద వ్రాసినయంకెకు ఎడమవైపున ఒకపంక్తిగ వ్రాయుము.

(4) ఏకస్థానాంకమును విడచి మిగిలినసంఖ్యను ఘనింపదగిన సంఖ్యగా భావించి పూర్వమునందువలె రెండవపంక్తిని గనుంగొనుము.

(5) ఈ రెండవపంక్తిని మొదటిపంక్తిలో 3 అంకెలను విడచి క్రిందుగ అనగా పైపంక్తియొక్క సహస్రస్థానాంకము క్రిందుగ క్రిందిపంక్తియొక్క ఏకస్థానాంకముండునట్లు వ్రాయుము.

(6) ఇట్లు తిరుగతిరుగ ఒక్కొకయంకెను విడచుచు మిగిలినసంఖ్యను ఘనీకరింపదగినసంఖ్యగా భావించుచు పంక్తిని గనుగొనుచు పైపంక్తియొక్క సహస్రస్థానాంకముక్రిందుగ క్రిందిపంక్తియొక్క ఏకస్థానాంకముండునట్లు వ్రాయుచు తుదివరకు చేయుము.

(7) తుదను ఎడమవైపునుండి మొదటిదగు అంకెయొక్క ఘనము మాత్రమే తుదిపంక్తి యగును.

(8) అన్నిపంక్తులయొక్కయు యోగము ఘనము గాగలదు.

ఉదా:—125 నకు ఘనము.

	ఘనీకరింపదగినసంఖ్య	125
(1)	పంక్తి	225125
(2)	పంక్తి	728
(3)	పంక్తి	1
		1953125

వివరము:—ఏకస్థానాంకము 5 దీనియొక్క ఘనము 125 ఇందలి ఏకస్థానాంకము 5 ను గీటుక్రింద లిఖించి మిగిలినసంఖ్య 12 ను వేరుగ లిఖించితి మనుకొనుము.

ఘనీకరింపదగినసంఖ్య 125 ను ఏకస్థానాంకము 5 చే గుణింప $125 \times 5 = 625$ దీనిని ఘనీకరింపదగినసంఖ్యయందు ఏకస్థానాంకమును విడువగానున్న సంఖ్య 12 చే గుణింప $625 \times 12 = 22500$ ఇందు తొలుత వేరుగలిఖించినసంఖ్య 12ను గలుప $22500 + 12 = 22512$ దీనిని గీటుక్రింద మొదటవ్రాయబడిన 5 నకు ఎడమవైపున చేర్పగా 225125 మొదటిపంక్తి యయ్యెను.

ఇపుడు ఏకస్థానాంకము 5 ను విడిచి మిగిలినసంఖ్య 12 ను ఘనీకరింపదగినసంఖ్యగ భావించి రెండవపంక్తిని గనుగొనవలయును.

ఇందలి ఏకస్థానాంకము 2 యొక్క ఘనము 8 ఇది రెండవపంక్తిలో ఏకస్థానాంకము. ప్రస్తుతము ఘనీకరింపదగినసంఖ్య 12 ను ఇందలి ఏకస్థానాంకము 2 చేతను ఏకస్థానాంకము 2 ను విడువగా నైనసంఖ్య 1 టి చేతను 3 చేతను గుణింప $12 \times 2 \times 1 \times 3 = 72$ దీనిని వెనుకవ్రాసినయంకె 8 యొక్క ఎడమవైపున చేర్పగా రెండవపంక్తి 728 అయ్యెను.

ఇపుడు 2 ను కూడ విడువగా 1 టి మిగిలెను. దీనియొక్క ఘనము 1 టి మూడవపంక్తిగ వ్రాయబడెను.

ఒకపంక్తిక్రింద మరియొకపంక్తి 3 స్థానములు జరిపి వ్రాయబడెను. అన్నిటియొక్కయు యోగము ఘనమయ్యెను.

43. ప్ర. పైపద్ధతులకు ఉపపత్తి:—

(1) ఉదా:—27 నకు ఘనము గనుగొనవలయును.

$27^3 = 27 \times 27 \times 27 = 27 \times 27 \times (20 + 7)$ (చూ 15 ప్ర) ఇట్లు $= (20 + 7) \times (20 + 7) \times 27 = \{20^2 + (2 \times 7 \times 20) + 7^2\} \times 27$ (చూ 32 ప్ర) $= \{20^2 + (2 \times 7 \times 20) + 7^2\} \times (20 + 7) = 20^3 + (20^2 \times 7 \times 3) + (7^2 \times 20 \times 3) + 7^3 = 8000 + 8400 + 2940 + 343$ వీటియోగము ఘనము.

ఈసంఖ్యలను ఒకదానిక్రింద నొకటి ఎడమవైపునుండి క్రమముగ సున్నలతోడను సున్నలను తీసియు లిఖించి కలిపినచో వర్గానయనోపపత్తివలె స్పష్టము గాగలదు.

శూన్యములతో	శూన్యములనుతీసి	
8000	8	(1) పంక్తి
8400	84	(2) పంక్తి
2940	294	(3) పంక్తి
343	343	(4) పంక్తి
19683	19683	

దీనిచే (40 ప్ర) పద్ధతి ఉపపన్నమగుచున్నది.

ఇట్లు కుడివైపునుండి సంఖ్యలను క్రమముగ లిఖించి కలిపినచో

శూన్యములతో	శూన్యములులేక	
343	343	(1) పంక్తి
2940	294	(2) పంక్తి
8400	84	(3) పంక్తి
8000	8	(4) పంక్తి
19683	19683	

దీనిచే (41 ప్ర) పద్ధతి ఉపపన్నమగుచున్నది.

తిరుగా పూర్వపుపంక్తికి రూపాంతరము.

$20^3 + (20^2 \times 7 \times 3) + 7^2 \times 20 \times 3) + 7^3$

$= 20^3 + (20 \times 20 \times 7 \times 3) + (7 \times 7 \times 20 \times 3) + 7^3$

$= 20^3 + (\overline{20 + 7} \times 20 \times 7 \times 3) + 7^3$

$= 8000 + 27 \times 20 \times 7 \times 3 + 343$

$= 8000 + 11340 + 343 = 8000 + 11683.$

వీటిని కలుపగా

శూన్యములతో	శూన్యములులేక
11683	11683
8000	8
19683 ఘనము	19683 ఘనము

ఇట్లు (42 ప్రి) పద్ధతియొక్క ఉపపత్తి స్పష్టమగుచున్నది

ఇందు 11683 = 343 + 11340 = 11683 = 343 + 1134 = 11683 దీనిచే (42 ప్ర) 2, 3 భాగములు ఉపపన్నములగుచున్నవి.

ఈపంక్తులయొక్క వివరణమును పాఠకులు విమర్శనతో చూచి గ్రహింపవలెను. గ్రంథవిస్తరమగునని వ్రాయలేదు.

2 ఉదా:—125 నకు ఘనము.

$125^3 = 125 \times 125^2$ (32 ప్రి.) చే

$125^2 = 120^2 + 120 \times 5 \times 2 + 5^2$ కావున (15 ప్రి) చే

$125 \times 125^2 = (120 + 5) \times (120^2 + 120 \times 5 \times 2 + 5^2)$

$= (120 + 5) \times (100^2 + 100 \times 20 \times 2 + 20^2 + 120 \times 5 \times 2 + 5^2)$

కోష్ఠములను విప్పుటచే రూపాంతరములు

$= (120 \times 100^2) + (120 \times 100 \times 20 \times 2) + (120 \times 20^2) + (120^2 \times 5 \times 2) + (120 \times 5^2) + (100^2 \times 5) + (100 \times 20 \times 2 \times 5) + (20^2 \times 5) + (120 \times 5^2 \times 2) + 5^2$

$= (100 + 20) \times 100^2 + (100 + 20) \times 100 \times 20 \times 2 + (100 + 20) \times 20^2 + 120^2 \times 5 \times 2 + (100^2 \times 5) + (100 \times 20 \times 2 \times 5) + (20^2 \times 5) + 120 \times 5^2 + 120 \times 5^2 \times 2 + 5^3$

$= 100^3 + (100^2 \times 20 \times 2 + 100^2 \times 20) + (20^2 \times 100 \times 2 + 20^2 \times 100) + 20^3 + 120^2 \times 5 \times 2 + (100^2 + 20^2 + 100 \times 20 \times 2)\ 5 + 120 \times 5^2 \times 3 + 5^3$

$= 100^3 + 100^2 \times 20 \times 3 + 20^2 \times 100 \times 3 + 20^3 + 120^2 \times 5 \times 3 + 120 \times 5^2 \times 3 + 5^3$

$=$ (1) 100^3

(2) $+ 100^2 \times 20 \times 3 + 20^2 \times 100 \times 3 + 20^3$

(3) $+ 120^2 \times 5 \times 3 + 120 \times 5^2 \times 3 + 5^3$

ఇందు (2) $100^2 \times 20 \times 3 + 20^2 \times 100 \times 3 + 20^3$

$= 100 \times 100 \times 20 \times 3 + 20 \times 20 \times 100 \times 3 + 20^3$

$= (100 + 20) \times 100 \times 20 \times 3 + 20^3$

$= 120 \times 100 \times 20 \times 3 + 20^3$

ఇట్లు (3) $120^2 \times 5 \times 3 + 120 \times 5^2 \times 3 + 5^3$

$= (120 + 5) \times 120 \times 5 \times 3 + 5^3$

$= 125 \times 120 \times 5 \times 3 + 5^3$ అగుచున్నది.

ఇట్లు సిద్ధించినపంక్తులు

(1) 100^3 $= 1000000$ $= 1000000$

(2) $120 \times 100 \times 20 \times 3 + 20^3 = + 720000 + 8000 = 728000$

(3) $125 \times 120 \times 5 \times 3 + 5^3 = + 225000 + 125 = 225125$

ఈ (1) (2) (3) పంక్తులను తలక్రిందుగ శూన్యములతోడను శూన్యము లను తీసివేసియు వర్గోపపత్తియందువలె కలిపినచో

శూన్యములతో	శూన్యముల తీసి వేసినచో	
225125	225125	(1) పంక్తి
728000	728	(2) పంక్తి
1000000	1	(3) పంక్తి
ఘనము 1953125	ఘనము 1953125	

పై సమీకరణములలో తుదిసమీకరణమునందలి పంక్తులను చూచినచో ఈఘనపద్ధతిచే గలిగిన పంక్తులు ఎట్లుసిద్ధమైనదియు స్పష్టము గాగలదు. ఈ (2) ఉదాహరణము (42 ప్ర) పద్ధతి స్పష్టముగా తెలియుటకై చూపబడినది. ఇట్లు ఘనానయనపద్ధతులకు ఉపపత్తి స్పష్టమగుచున్నది.

ఖండాభ్యాం వా హతో రాశి స్త్రిఘ్నః ఖండఘనైక్యయుక్॥

టీ॥ వా = లేక, రాశిః = ఘనీకరింపదగినసంఖ్య, ఖండాభ్యాం = యోజ్యయోజకరూపవిభాగఖండములచే, హతః = గుణింపబడినదై, త్రిఘ్నః = 3 చే గుణింపబడినదియై, ఖండఘనైక్యయుక్ = ఆరెండుఖండములయొక్కయు ఘనములయొక్క మొత్తముతో కలుపబడినదియై (ఘనమగును).

44. ప్ర. తా॥ ఏసంఖ్యకు ఘనముచేయవలెనో ఆసంఖ్యకు యోజ్యయోజకములుగ రెండుఖండములను చేయుము. ఘనీకరింపదగినసంఖ్యను తొలుత నొకఖండముచే గుణించి ఆగుణనఫలమును రెండవఖండముచే గుణించి దానిని 3 చే గుణించి అంతు ఆఖండములకు వేర్వేరుగ ఘనములజేసి ఆఘనముల మొత్తమును కలుపుము. ఈ కలుపగావైనసంఖ్య ఇష్టసంఖ్యకు ఘనమగును.

ఉదా:—27 నకు ఘనము కావలయును.

27 = 20 + 7 ఇట్లు రెండుఖండములు చేయబడెను.

ఇష్టసంఖ్య 27 ను మొదట 20 చే గుణింప $27 \times 20 = 540$ దీనిని రెండవ ఖండము 7 చే గుణింప $540 \times 7 = 3780$ దీనిని 3 చే గుణింప $3780 \times 3 = 11340$ ఇందు మొదటిఖండము 20 యొక్క ఘనము 8000 రెండవఖండము 7 యొక్క ఘనము 343 వీటిని కలుప $11340 + 8000 + 343 = 19683$ ఇష్టసంఖ్య 27 యొక్క ఘనము.

ఉపపత్తి:—(43 ప్ర) 1 ఉదాహరణమునందలి సమీకరణ రూపము.

$23^3 + (20+7) \times 20 \times 7 \times 3 + 7^3$ దీనికి రూపాంతరము.

$27 \times 20 \times 7 \times 3 + 20^3 + 7^3$ ఇట్లు దీనియుపపత్తి స్పష్టమగుచున్నది.

వర్గమూలఘన స్స్వఘ్నో వర్గరాశే ర్ఘనో భవేత్॥ ౨౧॥

టీ॥ వర్గరాశేః = వర్గరాశియొక్క, వర్గమూలఘనః = వర్గమూలముయొక్క ఘనము, స్వఘ్నః = వర్గింపబడినదియై, ఘనః = ఘనము, భవేత్ = అగుచున్నది.

45. ప్ర. తా॥ ఘనీకరింపదగినసంఖ్య వర్గరాశియగుచో నాసంఖ్యకు వర్గమూలమును గనుగొనుము. ఆవర్గమూలమునకు ఘనమునుచేసి ఆఘనమునువర్గింపుము. అది ఇష్టసంఖ్యకు ఘనమగును.

ఉదా:—36 నకు ఘనము కావలయును.

36 యొక్క వర్గమూలము 6 దీనికిఘనము $6 \times 6 \times 6 = 216$ దీనియొక్క వర్గము 46656 ఈసంఖ్య 36 యొక్క ఘనమగుచున్నది.

దీనికి యుక్తి:—

$36 = 6^2 \therefore 36^3 = (6^2)^3$ (28 ప్ర 3 సి) చే

$36^3 = 6^{2 \times 3} = 6^{3 \times 2} = (6^3)^2 = 46656$ అగుచున్నది.

అత్రోద్దేశకః

నవఘనం త్రిఘనస్య ఘనం తథా కథయ పంచఘనస్య ఘనంచ మే॥ ఘనపదంచ తతోపి ఘనాత్సఖే యది ఘనేస్తి ఘనా భవతో మతిః॥ ౫॥

న్యాసః ౯, ౨౭, ౧౨౫ జాతాః క్రమేణ ఘనాః ౭౨౯, ౧౯౬౮౩, ౧౯౫౩౧౨౫ అథవా రాశిః ౯ అస్యఖండే ౪, ౫ ఆభ్యాం హతో రాశిః ౧౮౦ త్రిఘ్నః ౫౪౦ ఖండఘనైక్యేన ౧౮౯ యుతో జాతో ఘనః ౭౨౯

అథవారాశిః ౨౭ అస్యఖండే ౨౦, ౭ ఆభ్యాం హతస్త్రిఘ్నశ్చ ౧౧౩౪౦ ఖండఘనైక్యేన ౩౪౩ యుతో జాతో ఘనః ౧౯౬౮౩

అథవారాశిః ౪ అస్యమూలమ్ ౨ అస్యఘనః ౮ అస్యవర్గో జాతశ్చతుర్ణాంఘనః ౬౪

అథవారాశిః ౯ అస్యమూలం ౩ అస్యఘనః ౨౭ అస్యవర్గో జాతో నవానాంఘనః ౭౨౯ ఇతిఘనః

తా॥ ఓమిత్రుడా నీయొక్కబుద్ధి ఘనమునందు గొప్పదైయున్నచో 9 యొక్కయు 3 యొక్క ఘనముయొక్కయు ఘనమును అట్లుగ 5 యొక్క ఘనముయొక్క ఘనమునున్ను నాకు చెప్పుము.

(1) $9^3 = 729$ (2) $(3^3)^3 = 27^3 = 19683$

(3) $(5^3)^3 = (125)^3 = 1953125$

లేక $9 = 4+5 \therefore 9 \times 4 \times 5 \times 3 + 4^3 + 5^3 = 540 + 189 = 729$

$27 = 20 + 7 \therefore 27 \times 20 \times 7 + 20^3 + 7^3 = 11340 + 834 = 19683$

$4^3 = (\sqrt{4})^3)^2 = (2^3)^2 = 8^2 = 64$

ఇట్లు $9^3 = (3^3)^2 = 27^2 = 729$

46. ప్రి. ఇదివరకు చెప్పబడిన పద్ధతులచే ఘనగణితమును చేయుటకును చెప్పబోవు పద్ధతిచే ఘనమూలము నెరుంగుటకును 10 వరకునైన సంఖ్యలకు ఘనములు కంఠస్థములై యుండవలయును. కావున 1 మొదలు 10 వరకునైన సంఖ్యలకు ఘనములు లీదిగువను చూపబడుచున్నవి.

సంఖ్య	ఘనము	సంఖ్య	ఘనము
1	1	6	216
2	8	7	343
3	27	8	512
4	64	9	729
5	125	10	1000

ఘనమూలము.

అథ ఘనమూలే కరణసూత్రం వృత్తద్వయమ్.

ఆద్యంఘనస్థాన, మథాఘనేద్వే, పునస్తథాంత్యాద్ఘనతో విశోధ్య। ఘనం, పృథక్స్థంపద, మస్యకృత్యాత్రిఘ్న్యాతదాద్యం విభజేత్ఫలంతు పంక్త్యాం న్యసేత్తత్కృతి మంత్యనిఘ్నీం త్రిఘ్నీం త్యజేత్తత్ప్రథమాత్ఫలస్య। ఘనంతదాద్యాద్ఘనమూలమేవంపంక్తిర్భవేదేవమతఃపునశ్చ॥

(1) టీ॥ ఆద్యం = ఏకస్థానము, ఘనస్థానమ్ = ఘనమునకు స్థానమైనది. (అనగా ఆస్థానమునుండి ఘనమూలాంకము తెలియును. అథ = పిమ్మట, ద్వే = రెండుస్థానములు. అఘనే = ఘనస్థానములుగానివి, పునస్తథా = తిరిగి అట్లు (తెలియవలయును.)

(2) అంత్యాత్ = తుదనుండెడు (ఎడమవైపునుండి మొదటిదగు) ఘనతః = ఘనస్థానాంకమువలన, ఘనం = ఒకానొక యంకెయొక్క ఘనమును, విశోధ్య = తీసివేసి, పదం = ఆఘనము యొక్క మూలాంకము, పృథక్స్థం = వేరుగనున్నదిగ (చేయదగినది)

(3) త్రిఘ్న్యా = 3 చే గుణింపబడిన, అస్య = ఈఘనమూలాంకము యొక్క, కృత్యా = వర్గముచేతను, తదాద్యం = ఆఘనస్థానాంకమునకు ముందుండెడు అఘనాంకమును, విభజేత్ = భాగింపవలయును.

(4) ఫలంతు = లబ్ధమునున్న, పంక్త్యాం = మూలాంకపంక్తియందు. న్యసేత్ = వ్రాయవలయును.

(5) తత్ప్రథమాత్ = ఆఅఘనాంకమునకు ముందుండెడు మరియొక అఘనాంకమునవలన, అంత్యనిఘ్నం = మూలమునందలితుదియంకె అనగా మొదటి మూలాంకముచే గుణింపబడినదియును, త్రిఘ్నం = 3 చే గుణింపబడినదియునగు తత్కృతిం = ఆలబ్ధము (రెండవమూలాంకము)యొక్క వర్గమును, త్యజేత్ = తీసివేయవలయును.

(6) తదాద్యాత్ = ఆయంకెకు ముందున్నయంకె (రెండవఘనాంకము) వలన, ఘనం = ఆబ్ధము యొక్క ఘనమును (తీసివేయవలయును.)

(7) ఏవం = ఈప్రకారముగ, పంక్తిః = మూలాంకపంక్తి, ఘనమూలం = ఘనమూలము, భవేత్ = అగును.

(8) అతః = ఈకారణమువలన, పునశ్చ = తిరుగతిరుగ [ఘనమునందలియంకెలన్నియు ముగించువరకును] ఏవం = పూర్వప్రకారము [చేయవలయును]

47. ప్రి. తాత్పర్యము — ఘనమూలానయనపద్ధతి.

(1) ఘనమూలమును గనుగొనవలసినసంఖ్యకు పైభాగమున ఏకస్థానాంకమునందును అదిమొదలు ప్రతినాలవయంకెయందును [అనగా ఏకస్థానమునందు పిమ్మట దశశతస్థానములవిడచి సహస్రస్థానమునందు అయుతలక్షస్థానములనువిడచి ప్రయుతస్థానమునందు ఇట్లు బిందువులుగల యంకెలకు మధ్యయందు బిందుశూన్యములగు అంకెలు రెండురెండు ఉండునట్లు] బిందువు (చుక్క)లను

లిఖింపుము. ఎన్నిబిందువులుగలవో అన్ని ఘనమూలాంకములు లభించును. కావున చుక్కలుగల యంకెలు ఘనాంకములనియు చుక్కలులేనియంకెలు అఘనములనియు చెప్పబడెను.

(2) ఎడమవైపునుండి మొదటిదగు ఘనాంకమువరకునైన సంఖ్యవలన నంతకంటె చిన్నదియగు పెద్దఘనమును తీసివేయుము. ఆఘనమూలాంకమును వర్గమునందువలె మూలస్థానమున వ్రాయుము. ఇదిఘనమూలములో ఎడమవైపునుండి మొదటియంకె యగును.

(3) ఆశేషమునకు కుడివైపున 1 టవ ఘనాంకమునకు కుడివైపుననున్న అఘనాంకమును వ్రాసి ఆసంఖ్యను—ఇదివరకు లభించిన మూలాంకమును వర్గించి 3 చే గుణింపనగు సంఖ్యచే భాగింపుము.

(4) ఈలబ్ధము రెండవఘనమూలాంక మగుచున్నది కావున మూలస్థానమున మొదటిమూలాంకమునకు కుడిప్రక్కను వ్రాయుము.

(5) ఆశేషముయొక్క కుడివైపున రెండవయఘనాంకమును వ్రాసి ఆసంఖ్యవలన ఈలబ్ధముయొక్క వర్గమును దానికి నెడమవైపుననున్న మూలాంక సంఖ్యచే గుణించి దానిని 3 చే గుణింపనగు సంఖ్యను తీసివేయుము.

(6) శేషముతో రెండవఘనాంకమును చేర్చి ఆసంఖ్యవలన ఈలబ్ధాంకముయొక్క ఘనమును తీసివేయుము.

(7) ఆశేషముతో రెండవఘనాంకమునకు ముందున్న మొదటి అఘనాంకమును చేర్చి ఆసంఖ్యను ఇంతవరకు లభించిన మూలాంకములచే నైన సంఖ్యను వర్గించి 3 చే గుణించనగు సంఖ్యచే భాగించి—లబ్ధమును మూలస్థానమున పూర్వప్రకారము వ్రాయుము.

(8) ఇపుడీలబ్ధముయొక్క వర్గమును పూర్వప్రకారము దీనికి నెడమవైపుననున్న మూలసంఖ్యచే గుణించి 3 చే గుణించనగు సంఖ్యను—శేషముతో మరియొక అఘనాంకమును చేర్పగానగు సంఖ్యవలన తీసివేయుము.

(9) తిరుగ శేషముతో ఘనాంకమును చేర్చి దానివలన—ఇప్పటిలబ్ధముయొక్క ఘనమును తీసివేయుము.

(10) ఇట్లు ఘనాంకము తరువాతనున్న అఘనాంకమును శేషముతో చేర్చి దానిని మూలాంకసంఖ్యను వర్గించి 3 చే గుణించి దానిచే భాగించుట, ఆలబ్ధమును మూలాంకపంక్తియందు వ్రాయుట, మరియొక అఘనాంకమును చేర్చి లబ్ధవర్గమును లబ్ధమునకు వెనుకనున్న మూలసంఖ్యచే గుణించి 3 చే గుణించి తీసివేయుట, ఘనస్థానాంకమును చేర్చి లబ్ధముయొక్క ఘనమును తీసివేయుట, ఈక్రియలను క్రమముగ ఘనసంఖ్యముగించువరకు తిరుగతిరుగ చేయుము.

(11) భాగించుటలో వర్గమూలమునందువలెనే ఎంతలబ్ధమును గ్రహించినచో ఆలబ్ధవర్గము దానికి వెనుకనున్న మూలసంఖ్యచే గుణించి 3 చే గుణింప తీసివేయబడునో తిరుగ ఆలబ్ధఘనము తీసివేయబడునో అంతలబ్ధమును గమనించి గ్రహింపవలయును.

ఉదా:—1953125 దీనికి ఘనమూలము.

```
     1953125 ( 125
     1
    ----
 3 ) 9 ( 2
     6
    ----
      35
      12
    -----
      233
        8
    ------
432 ) 2251 ( 5
      2160
     ------
        912
        900
       -----
         125
         125
       -----
          ...
```

ఇదివరలో [40 ప్రి] ఉదాహరణమునందు ఘనము చేయగానగు సంఖ్యయే ఘనమూలమునకై ఉదాహరణముగ నివ్వబడెను. అందు అంత్యాంకమునుండి చేయగా నగు పంక్తులు ఇందు క్రమముగ తీసివేయబడినవి. ఆద్యాంకమునుండి చేయబడినపంక్తులు తలక్రిందుగ తీసివేయబడినవి. ఇందు మొదట 1టియొక్క ఘనము తీసివేయబడెను. 1 టి యొక్క వర్గమును 3చే గుణింపనగు సంఖ్య 3 చే అఘనాంకము భాగింపబడెను. శేషముతో రెండవ అఘనాంకమును చేర్చి దానివలన లబ్ధవర్గమును మొదటి మూలాంకముచేతను 3 చేతను గుణించి 12 తీసివేయబడెను. శేషముతో రెండవ ఘనాంకమును చేర్పగా నగుసంఖ్యవలన లబ్ధముయొక్క ఘనము 8 తీసివేయబడెను. శేషముతో అఘనాంకమును చేర్చి ఆసంఖ్య ఇంతవరకు లభించిన మూలసంఖ్య 12 ను వర్గించి 3 చే గుణింపనగుసంఖ్య 432 చే భాగింపబడెను. ఇది మూడవమూలాంకము. శేషముతో మరియొక అఘనాంకమును చేర్చి దానివలన లబ్ధవర్గము 25 ను దానికి వెనుకనున్న మూలాంకసంఖ్య 12 చే గుణించి 3 చే గుణించి 900తీసివేయబడెను. శేషముతో ఘనాంకమును చేర్చి లబ్ధముయొక్క ఘనము తీసివేయబడెను.

ఉపపత్తి:—

ఇట్లు తీసివేయబడిన సంఖ్యలన్నియు (40 ప్రి) ఉదాహరణమునందు చూపినపంక్తులై యున్నవి. కావున వర్గమూలోపపత్తి వలెనే (40 ప్రి 41 ప్రి) పద్ధతి వైపరీత్యముచే దీనియుపపత్తియు స్పష్టము కాగలదు.

48. ప్ర. పైపద్ధతినిబట్టి ఘనమూలమునందు సామాన్యపద్ధతి.

(1) పైపద్ధతిప్రకారము ఘనమూలమును గనుగొనవలసిన సంఖ్యకు చుక్కలను లిఖింపుము.

(2) మొదటిఘనాంకముపరకు నైన సంఖ్యవలన అంతకంటెచిన్నదియగు పెద్దఘనమును తీసివేసి ఆసువమూలాంకమును మూలస్థానమున వ్రాయుము. ఇది ఘనమూలమున ఎడమవైపునుండి మొదటియంకె యగును.

(3) శేషమునకు కుడివైపున రెండవఘనాంకమును (1 టవ ఘనాంకము నకు తరువాత రెండవఘనాంకమువరకునున్న సంఖ్య మూడంకెల)ను చేర్చి ఆసంఖ్యను భాజ్యముగ భావింపుము.

(4) ఈభాజ్యమునకు నెడమవైపున భాగహారమున భాజకస్థానమునందు వలె మొదటిమూలాంకముయొక్క వర్గమును 3 చే గుణించి 100 చే గుణించి వ్రాయుము. దీనిని అపూర్ణభాజక మనుకొనుము.

(5) దీనికి నెడమవైపున నొకచోట మొదటిమూలాంకమును 3చే గుణించి వ్రాయుము. ఇది క్షేపపంక్తి యనుకొనుము.

(6) అపూర్ణభాజకముచే భాజ్యమును భాగింపుచో నెంతలబ్ధము రాగలదో ఆలబ్ధాంకము రెండవమూలాంక మగుచున్నది.

(7) ఆలబ్ధాంకమును మూలాంకముతోడను క్షేపపంక్తితోడను కుడివైపునవ్రాసిచేర్చి అట్టిపంక్తిని వేఱుచోట ఆలబ్ధాంకముచే గుణించి దానిని క్షేపమని తెలియుము.

(8) ఆక్షేపమును అపూర్ణభాజకముక్రిందుగ వ్రాసి ఆరెండిటియొక్కయు యోగమును వాటిక్రింద వ్రాసి దీనిని పూర్ణభాజక మనుకొనుము.

(9) పిమ్మట పూర్ణభాజకమును రెండవమూలాంకముచే గుణించి భాజ్యమువలన తీసివేయుము. (ఎట్టిలబ్ధమును గ్రహించినచో ఇట్లు భాజ్యమువలన తీసివేయుట గలుగునో అట్టిలబ్ధమును గమనించి గ్రహింపవలయును).

(10) తిరుగ శేషముతో 3వ ఘనాంకమును (3వ ఘనాంకమువరకునున్న మూడంకెలను) చేర్చి ఆసంఖ్యను భాజ్యముగ భావింపుము.

(11) పిమ్మట రెండవమూలాంకముయొక్క వర్గమును పూర్ణభాజకమునకు క్రిందుగ వ్రాసి ఆవర్గమును పైరెండుసంఖ్యలనున్న (పూర్ణభాజకక్షేపములనున్న) కలిపి, ఆవర్గమునకు క్రిందుగ వ్రాసి దానిని 100 చే గుణించి దానిని అపూర్ణభాజక మనుకొనుము.

(12) రెండవ మూలాంకమును రెట్టించి క్షేపపంక్తియందు కలిపి దీనిని క్షేపపంక్తియని తెలియుము.

(13) పూర్వమునందువలెనే తిరుగా అపూర్ణభాజకముచే భాజ్యమును భాగింప నెంతలబ్ధము వచ్చునో ఆలబ్ధాంకమును మూలసంఖ్యయందును క్షేపపంక్తియందును కుడిప్రైపున చేర్చి ఆపంక్తిని ఆలబ్ధాంకముచే వేరుగ గుణించి ఆక్షేపమును అపూర్ణభాజకముక్రిందుగ వ్రాసి కలిపి అట్టి పూర్ణభాజకమును లబ్ధాంకముచే గుణించి భాజ్యమునుండి తీసివేయుట. ఈలబ్ధముయొక్క వర్గమును ఈపూర్ణభాజకముక్రిందుగవ్రాసి వర్గపూర్ణభాజకక్షేపములను కలిపి 100 చే గుణించి అపూర్ణభాజకమనుకొనుట ఈలబ్ధమును రెట్టించి పంక్తియందు కలిపి దీనిని పంక్తిగ భావించుటయును తిరుగతిరుగ తుదివరకును చేయుము.

(14) ఇట్లు చేయగానైన మూలస్థానమందలిసంఖ్య ఘనమూలము.

(1) ఉదా:— $\sqrt[3]{1953125}$?

1953125 (125 ఘనమూలము.

1

క్షేపపంక్తి	అపూర్ణభాజక	300	953 (2
32	క్షేపము	64	
4	పూర్ణభాజకము	364	728
365	లబ్ధవర్గము	4	225125 (5
	అపూర్ణభాజకము	43200	
	క్షేపము	1825	
	పూర్ణభాజకము	45025	225125
			... ...

(42 (ప) ఉదాహరణమును దీనినిన్ని చూచినచో ఘనాయనపద్ధతికి వైపరీత్యముగ నీఘనమూలానయన పద్ధతియుండుట స్పష్టము గాగలదు.

(2) ఉదా:— ఘనసంఖ్య ఘనమూలము

819552855133368 (93582

729

	అపూర్ణభాజకము	24300	90552 (3
క్షేపపంక్తి	క్షేపము	819	
273	పూర్ణభాజకము	25119	75357
6	లబ్ధవర్గము	9	
2795	అపూర్ణభాజకము	2594700	15195855 (5
10	క్షేపము	13975	
28058	పూర్ణభాజకము	2608675	
16	లబ్ధవర్గము	25	13043375
280742	అపూర్ణభాజకము	262267500	2152480133 (8
	క్షేపము	224464	
	పూర్ణభాజకము	262491964	
	లబ్ధవర్గము	64	2099935712
	అపూర్ణభాజకము	26271649200	52544421368 (2
	క్షేపము	561484	
	పూర్ణభాజకము	26272210684	
			52544421368

దీనివివరము:— మొదటి ఘనాంకమువరకునైనసంఖ్య 813 వలన 9 యొక్క ఘనము 729 తీసివేయబడెను. శేషముతో రెండవఘనాంకమువరకు నైనసంఖ్యను చేర్పగా 90552 భాజ్యము. ప్రథమమూలాంకము 9 యొక్క వర్గము 81 ను 3 చే గుణింప 243 దీనిని 100 చే గుణింప 24300 అపూర్ణభాజకము. మొదటి మూలాంకము 9 ను 3 చే గుణించి 27 క్షేపపంక్తిలో వ్రాయబడెను. అపూర్ణభాజకముచే భాజ్యమును భాగింప 3 లబ్ధము. ఇది రెండవమూలాంకము. దీనిని క్షేపపంక్తియందు చేర్ప 273 దీనిని వేరుగ లబ్ధాంకము 3 చే గుణించి ఈ క్షేపము అపూర్ణభాజకములో కలుప 25119 పూర్ణభాజకము ఇది లబ్ధము 3 చే గుణించి భాజ్యము వలన తీసివేయబడెను. ఈలబ్ధము రెట్టించి క్షేపపంక్తిలో కలుపబడెను. లబ్ధము యొక్క వర్గము పూర్ణభాజకముక్రింద వ్రాసి లబ్ధపూర్ణభాజక క్షేపములు కలుపబడెను. దీనిని 100 చే గుణింప అపూర్ణభాజక మగుచున్నది. పూర్వమువలె శేషముతో ఘనాంకమువరకునైనసంఖ్య 855 ను చేర్పగానగు సంఖ్య భాజ్యము. ఈభాజ్యమును అపూర్ణభాజకముచే భాగించుచో 5 లబ్ధము వచ్చుచున్నది. దీనిని క్షేపపంక్తియందు కుడివైపున చేర్చితిమి. దీనిని ఇప్పటి లబ్ధాంకము 5 చే గుణించి ఈ క్షేపమును అపూర్ణభాజకముతో కలిపితిమి. ఇది పూర్ణభాజకము. దీనిని లబ్ధాంకముచే గుణించి భాజ్యమునుండి తీసివేసితిమి. ఇట్లు తుదివరకును చేయగా లబ్ధములు క్రమముగా వ్రాయబడి ఘనమూలమయ్యెను.

దీనికి ఉపపత్తి:— (42 ప్ర) పద్ధతియొక్క వైపరీత్యముచే స్పష్టము గాగలదు.

అత్రోద్దేశకః

పూర్వఘనానాం మూలార్థం న్యాసః ౭౨౯, ౧౯౬౮౩, ౧౯౫౩౧౨౫ క్రమేణ లబ్ధాని మూలాని ౯, ౨౭, ౧౨౫

ఇతి ఘనమూలమ్. ఇ త్యభిన్నపరికర్మాష్టకమ్

తా॥ వెనుక చేయబడిన ఘనములకు మూలములను గనుపరచియున్నారు.

(1) $\sqrt[3]{729} = 9$ (2) $\sqrt[3]{19683} = 27$ (3) $\sqrt[3]{1953125} = 125$

50. ప్ర. అభీష్టఘాతమును చేయుపద్ధతి.

ఇష్టసంఖ్యకైనను చతుర్ఘాత పంచఘాత షష్ఠాఘాతాదులును ఆయాఘాతముల మూలములును తెలియుటకు పద్ధతులను వర్గ వర్గమూల ఘన ఘనమూలములకు వలె యోజ్యయోజక రూపఖండగుణనమును బట్టి నిర్మింపవచ్చును. ఆయాఘాతములకును ఘాతమూలములకును వ్యక్త (అంక) గణితమున విశేషోపయోగములేదు. ఆయా ఘాత ఘాతమూలములకు నవధియును లేదు వర్గ వర్గమూల ఘన ఘనమూలములకే విశేషోపయోగముగలదు. ఐనను ఒకానొకపుడు ఆ యా ఘాతములకును కించిదుపయోగము గలదు. కావున కొంచెము సులభముగా నా యా ఘాతమును గనుగొనుపద్ధతి ఈదిగువ చూపబడుచున్నది. (దీనిని భాస్కరాచార్యులవారు శ్రేఢీ వ్యవహారాంతమున సూచించియున్నారు. 144 ప్ర చూ.)

పద్ధతి:_ఘాతమాపకసంఖ్య నొకచో వ్రాసి దానిక్రిందుగ ఘాతమాపకసంఖ్య సమసంఖ్య యగుచో అర్ధించియును విషమసంఖ్యయగుచో 1 టిని తీసివేసియు వ్రాయుము. ఇట్లు తిరుగతిరుగ పైసంఖ్య సమమగుచో నర్ధించియు విషమసంఖ్య యగుచో 1టిని తీసివేసియు క్రిందుక్రిందుగ వ్రాయుము. ఇట్లు తుదను సున్న '0' యగు వరకును చేయుము. ఇవన్నియు ఘాతమాపకములని భావింపుము. ఈసంఖ్యలకు కుడివైపున తిన్నగ నర్ధించినచోట వర్గమునకై 'వ' అనియు 1 టిని తీసివేసిన చోట గుణనమునకై గుణనగుర్తును × న్ను వ్రాయుము. ఈగుర్తులకు కుడివైపున సున్నకు తిన్నగ 1 టిని వ్రాసి గుర్తులననుసరించి క్రిందిసంఖ్యను అభీష్టఘాతము గానలసినమూలసంఖ్యచే గుణించుటయు క్రిందిసంఖ్యను వర్గించుటయును అభీష్టఘాతమాపకాంక మున్నంతవరకును చేయుము. ఇట్లుచేయగా నాయాఘాతమాపకపంక్తియందుగల సంఖ్య మూలసంఖ్యకు ఆయాఘాతమాపకసంబంధిఘాతమగును.

ఉదా:—8 కి 11 ఘాతము 8^{11} ఎంతయగును ?

1 వ	ఘాతమాపకము	11,	× ,	8589934592
2 వ	,,	10,	వ,	1073741824
3 వ	,,	5,	× ,	32768
4 వ	,,	4,	వ,	4096
5 వ	,,	2,	వ,	64
6 వ	,,	1,	×	8
7 వ	,,	0,	వ,	1

$\therefore 8^{11} = 8589934592$

దీనికియుక్తి:—ఏసంఖ్యకైనను ఘాతమాపకము '0' యగుచో ఫలము (28 ప్ర 5 సి) చే 1 తియే కాగలదు. కావున 1 టి వ్రాయబడెను. ఇది 8చే గుణింపబడెను. కావున ఇది 8 యొక్క ఏకఘాతము. పిమ్మట నిదివర్గింపబడెను. తిరుగ నిది వర్గింపబడెను (28 ప్రి 5 సి) చే ఇది 8 యొక్క చతుర్ఘాత మగుచున్నది. దీనిని 8 చే గుణింప నిది 8 యొక్క పంచఘాత మగుచున్నది. దీనివర్గము 8 యొక్క దశఘాతము. దానిని 8 చే గుణింప 8 యొక్క 11 ఘాతమగుచున్నది. ఇట్లు మూలసంఖ్యకు అభీష్టఘాత మగుచున్నది.

పూర్వానుబంధము.

51. ప్రి. ఇంతవరకు ఈప్రకరణమునందు అభిన్నసంఖ్యలయొక్క సంకలనము వ్యవకలనము గుణనము భాగహారము వర్గము వర్గమూలము ఘనము ఘనమూలము అనునీ 8 గణితములయొక్కయు పద్ధతులు చూపబడినవి. వీటికి అభిన్నపరికర్మాష్టక మనిపేరు. అభీష్టములగు సంఖ్యలయొక్క యోగము అంతరము మొదలగు ఫలమునుబట్టి అభీష్టసంఖ్యల నెరుంగవలసిన దానిని తెలియు పద్ధతి వ్యస్తవిధి లేక విలోమకర్మ యని చెప్పబడును.

ఎట్లనగా:—అభీష్టసంఖ్యయందు రెండవసంఖ్యను కలుపగానైన యోగము నుండి రెండవసంఖ్యను వ్యవకలించినచో అభీష్టసంఖ్య గాగలదు

ఇట్లు అభీష్టసంఖ్యవలన రెండవసంఖ్యను వ్యవకలింపనగు అంతరమును రెండవసంఖ్యతో గలుపగా అభీష్టసంఖ్య అగును.

అభీష్టసంఖ్యను రెండవసంఖ్యచే గుణింపగా నగు గుణనఫలమును రెండవ సంఖ్యచే భాగింప అభీష్టసంఖ్య అగును.

అభీష్టసంఖ్యను రెండవసంఖ్యచే భాగింపనగు లబ్ధమును రెండవసంఖ్యచే గుణింప అభీష్టసంఖ్య అగును

అభీష్టసంఖ్యయొక్క వర్గమును మూలించినచో నభీష్టసంఖ్య అగును,

అభీష్టసంఖ్యయొక్క మూలమును వర్గించినచో నభీష్టసంఖ్య అగును.

ఇష్టసంఖ్యాఘనమునకు ఘనమూలము ఇష్టసంఖ్య అగును.

ఇష్టసంఖ్యాఘనమూలమునకు ఘనము ఇష్టసంఖ్య అగును.

ఈప్రకారముగ నిష్టసంఖ్యయందు సంకలనాదికమును చేయుటచే నేరాశి యగునో యారాశియందు సంకలనమునకు వ్యవకలనము వ్యవకలనమునకు సంకలనము గుణనమునకు భజనము భజనమునకు గుణనము వర్గమునకు వర్గమూలము వర్గమూలమునకు వర్గము ఘనమునకు ఘనమూలము ఘనమూలమునకు ఘనము ఇట్లు ప్రశ్నింపబడిన రీతికి తలక్రిందుగ చేయుటచే నిష్టసంఖ్య ఏర్పడుచున్నది. ఇది వ్యస్తవిధి (ఈవ్యస్తవిధి వ్యస్తవిధిప్రకరణమున చూడవగును. 5 ప్రికరణం చూ)

ఇట కొంచెము చూపబడుచున్నది.

(1) ఏసంఖ్యయందు 17 ను కలిపిన 35 అగును? పైయుక్తిని బట్టి 35—17 = 18 ఇష్టసంఖ్య

(2) ఏసంఖ్యయందు 25 ను వ్యవకలింప 38 శేషమగును? 38 + 25 = 63 ఇష్టసంఖ్య

(3) ఏసంఖ్యను 12 చే గుణింప 192 అగును? 192 ÷ 12 = 16 ఇష్టసంఖ్య

(4) ఏసంఖ్యను 16 చే భాగింప 22 అగును? 22 × 16 = 352 ఇష్టసంఖ్య

(5) ఏసంఖ్యయొక్క వర్గము 4489 అగును? $\sqrt{4489} = 67$ఇష్టసంఖ్య

(6) ఏసంఖ్యయొక్క వర్గమూలము 25 అగును? $25^2 = 625$ ఇష్టసంఖ్య

(7) ఏసంఖ్యయొక్క ఘనము 2197 అగును? $\sqrt{2197} = 13$ ఇష్టసంఖ్య

(8) ఏసంఖ్యయొక్క ఘనమూలము 23 అగును? $23^3 = 12167$ ఇష్టసంఖ్య

(9) ఒకానొకసంఖ్యను 2 చే గుణించి దానిని వర్గించి అందు 58 వ్యవకలించి దానిని ఘనీకరించి దానిని 9 చే భాగించి అందు 3 ను కలిపి దానియొక్క ఘనమూలమున 1 టిని కలిపి వర్గమూలము గనుగొనిన 2 అగుచున్నది. ఆఒకానొక సంఖ్య యెద్ది?

పైయుక్తినిబట్టి తలక్రిందుగ చేయవలయును.

$\sqrt[3]{(2^2-1)^3-3\times 9}+58 = 64$ దీనియొక్క వర్గమూలము 8 ను 2 చే భాగింప 4 ఇష్టసంఖ్య

వర్గప్రశ్నములు.

(1) 435004^2? (2) 9080706^2? (3) 23450^2? (4) 8000939^2?

వర్గమును సంబంధించిన ప్రశ్నములు.

(1) ఒకప్రదేశము పొడవు 16 గజములు అంతియ వెడలుపు నున్నచో ఆ ప్రదేశము ఎన్ని చతురపు గజము లుండును ?

(2) 13 అడుగులు వెడల్పును 13 అడుగులు పొడవునుగల ఒకగదియందు 1 అడుగువెడల్పు 1 అడుగు పొడవుగల రాతిపలకలు ఎన్ని పరచవచ్చును ?

(3) ఒకప్రదేశమునందు సైనికులు చతురముగ నిలబడియుండిరి. అనగా ఆసేనయందు ప్రతిపంక్తియందును ఎటుచూచినను సమానముగ సైనికులు గలరు. అట్టిపంక్తులలో ఒక్కపంక్తియందు 30197 సైనికులున్నచో సైనికులమొత్తమెంత?

(4) అట్టి 1 సైనికపంక్తి నిలబడినప్రదేశము 619+ అడుగులయినచో మొత్తము సైనికులు నిలబడిన ప్రదేశము ఎన్ని చతురపుటడుగు లుండును?

వర్గమూలమును సంబంధించిన ప్రశ్నములు.

(1) ఒక సమచతురప్రదేశమునందు 1 గజము వెడల్పు 1 గజము పొడవును గల రాతిపలకలు 256 పట్టును. ఆప్రదేశముయొక్క వెడలుపు ఎంతయుండును ?

(2) ఒకసమచతురప్రదేశముయొక్క చతురము 400 అడుగులు అందు 1 అడుగు వెడల్పును 1 అడుగు పొడవునుగల ఇటుకలు 1 టన వరుసకు ఎన్ని పట్టును ?

(3) ఒకదాత కొందరు యాచకులకు ఒక్కొక్కనికి 1-0-0 చొప్పున యిచ్చెను. ఇట్లు ఎందరు యాచకులుగలరో అందరకును యాచకులసంఖ్యఎంతయో అన్నిదినములు ప్రతిదినమునను యిచ్చెను. అట్టిదాతకు తుదకు రూ 38969 లు అయినవి, ఎంతమందికి ఎన్నిరోజులు యిచ్చెను?

(4) సమచతురప్రదేశమునందు ప్రతిపంక్తియందును ఎట్లు చూచినను సమానముగునట్లు నిలబడిన సైనికుల మొత్తము 62500 లు అయియున్నచో ఒక్కొకపంక్తియందెందరు గలరు ?

ఘనప్రశ్నలు.

(1) 509^3 (3) 80705^3?

(2) 3987^3 ? (4) 50009^3?

ఘనమును సంబంధించిన ప్రశ్నలు.

(1) ఒకధాన్యపుకొట్టు లోపలవెడల్పు 9 అడుగులు పొడవు 9 అడుగులు ఎత్తు 9 అడుగులు ఉన్నది. లోపల 1 అడుగు వెడల్పును అంతియపొడవును అంతియలోతునుగల పెట్టెయందు 19 శేర్ల ధాన్యము పట్టును. అట్లు చూచినచో ఆధాన్యపుకొట్టునందు పూర్తిగ ధాన్యమును పోయుచో ఎన్నికుంచములు పట్టును?

(2) 1 గజము వెడల్పును 1 గజము పొడవును 1 గజము లోతునుగల గోతిని త్రవ్వుటకు రు 0-1-3 లు కూలి అగుచున్నది. 24 గజములు వెడల్పును అంతియపొడవును అంతియ లోతునుగల పెద్ద గోతిని నిర్మించుటకు ఎంత ఇవ్వవలసియుండును ?

ఘనమూలమును సంబంధించిన ప్రశ్నములు.

(1) పొడవు వెడల్పు ఎత్తును సమానముగాగల ఒకరాతియందు ఘనాంగుళములసంఖ్య 729 అయియున్నది ఆరాతియొక్క వెడలుపు ఎంతయుండును ?

(2) వెడలుపు పొడవు లోతును సమానముగ గల ఒకతటాకముయొక్క ఘనగజములు 15625 సంఖ్య అగుచున్నది ఆతటాకముయొక్క లోతు ఎంత ?

మహత్తమాప వర్తనము.

ముందుచెప్పబోవు భిన్నపరికర్మాష్టకమునందు అపవర్తన అపవర్త్యముల యుపయోగము చాలగలదు. వీటిని భాస్కరాచార్యులు ముందుముందు చెప్పియున్నారు. ఐనను ముందువాటికిగల ఉపయోగమునుబట్టి సంగ్రహముగ నిచట వ్రాయబడుచున్నవి.

52. ప్రి. అపవర్తనమును సంబంధించిన పారిభాషికపదముల నిర్వచనము

(1) రెండుసంఖ్యలలో పెద్దసంఖ్య చిన్నసంఖ్యచే నిశ్శేషముగ భాగింపబడుచో నాపెద్దసంఖ్యకు చిన్నసంఖ్య అపవర్తనమని చెప్పబడును. ఆచిన్నసంఖ్యకు పెద్దసంఖ్య అపవర్త్యమని చెప్పబడును. (అపవర్తనము = భాగించునది. అపవర్త్యము = భాగింపదగినది. అపవర్తనశబ్దమునకు భాగించుటయును అర్థము)

కాని ప్రతిసంఖ్యయును 1టిచే నిశ్శేషముగ భాగింపబడును గాన 1 టికి అపవర్తనాపవర్త్య వ్యవహారము లేదు తక్కినసంఖ్యలకే గలదు.

(2) అట్లు 1 టి కంటెను తనకంటెను ఇతరమగుసంఖ్యచే నిశ్శేషముగ భాగింపబడనిసంఖ్య దృఢసంఖ్యయని చెప్పబడును.

ఉదా:— 3, 7, 11 ఈసంఖ్యలు తమచేగాని, 1 టిచే గాని భాగింపబడును. ఇతరసంఖ్యచే భాగింపబడవు. కావున 3 ను 7 ను 11 ను దృఢసంఖ్యలని చెప్పబడును.

(3) ఒకసంఖ్య అనేకసంఖ్యలచే నిశ్శేషముగ భాగింపబడునపుడు ఆ అనేకసంఖ్యలన్నియు అపవర్తనములని చెప్పబడును. అందు పెద్దసంఖ్య మహత్తమాపవర్తనము. సామాన్యముగ నపవర్తనము రెండుసంఖ్యల కొక్కటి గనుగొనవలసివచ్చును. ఏరెండుసంఖ్యలకు లేక అనేకసంఖ్యలకు 1 టి కంటె ఇతరమగు నపవర్తనము లేదో ఆసంఖ్యలు పరస్పరము దృఢములని చెప్పబడును (అపవర్తనములభోపాయములు 24 ప్రి చూ.)

53. ప్రి. అపవర్తనమును సంబంధించిన సిద్ధాంతములు.

(1) రెండుసంఖ్యలలో 1 టవ సంఖ్య 2 వ సంఖ్యచేనపవర్తింపబడుచో ఆఒకటవసంఖ్యచే నపవర్తింపబడుసంఖ్యయును ఆ 2 వ సంఖ్యచే నపవర్తింపబడును.

ఉదా:—8 ఈసంఖ్య 4 చే నపవర్తింపబడును. $8 \times 9 = 72$ కావున 72 నకు 8 అపవర్తనాంకము. ఈకారణముచే 72 నకును 4 అపవర్తనాంకమగుచున్నది.

దీనికియుక్తి:—$8 = 4 \times 2 \therefore 72 = 9 \times 8 = 9 \times 4 \times 2$ కావున 72 ఇది 4 చే నపవర్తింపబడును. (16 ప్రి. చూ)

(2) ఒకసంఖ్య రెండవ సంఖ్యచే నిశ్శేషముగ భాగింపబడును. ఆలబ్ధము ఆరెండిటికంటె నితరసంఖ్యచే నిశ్శేషముగ భాగింపబడును. అపుడు ఆరెండవసంఖ్యయొక్కయు ఆరెండవలబ్ధముయొక్కయు గుణనఫలముచే నామొదటిసంఖ్య నిశ్శేషముగ భాగింపబడును.

ఉదా:—$72 \div 9 = 8$ లబ్ధము $8 \div 4 = 2$ లబ్ధము

కావున $72 \div (9 \times 2) = 4$ అగుచున్నది. ఎందుచేతననగా:—

$72 = 9 \times 8$ అగుచున్నది $8 = 4 \times 2$ అగుచున్నది. కావున (16 ప్రి చే) $72 = 9 \times 4 \times 2$ దీనివలన 72 ఇది 9×2 దీనిచే భాగింపబడునని స్పష్టమగుచున్నది. 9 రెండవసంఖ్య 2 రెండవలబ్ధము. 9×2 రెండవసంఖ్యయొక్కయు రెండవలబ్ధముయొక్కయు ఘాతము.

(3) ఏరెండుసంఖ్యలు 3 వ సంఖ్యచే నిశ్శేషములగునో ఆరెండుసంఖ్యలయొక్కయు యోగమున్ను అంతరమున్ను ఆమూడవసంఖ్యచే నిశ్శేషములగును.

ఉదా:—16 న్ను 44 న్ను 4 చే నిశ్శేషములగును. కావున $44 + 16 = 60$ ఇది 4 చే నిశ్శేషమగును. $44 - 16 = 28$ ఇదియును 4 చే నిశ్శేషమగును.

యుక్తి:—$16 = 4 \times 4$ ఇట్లు $44 = 4 \times 11$ కనుక $44 + 16 = 4 \times 4 + 4 \times 11 = (11 + 4) \times 4$ ఇట్లు $44 - 16 = 4 \times 11 - 4 \times 4 = (11 - 4) \times 4$

ఇంటు $(11 + 4) \times 4$ ఇదియును $(11 - 4) \times 4$ ఇదియును 4 చే నిశ్శేషమగుననుట స్పష్టమగుచున్నది.

54. ప్రి. రెండుసంఖ్యలకు మహత్తమాపవర్తనము నెరుంగుటకు పద్ధతి.

ఏరెండుసంఖ్యలకు మహత్తమాపవర్తనము గావలయునో ఆసంఖ్యలలో చిన్నసంఖ్యచే పెద్దసంఖ్యను భాగించి ఆశేషముచే పూర్వభాజకమును భాగింపుము. ఇట్లు తిరుగతిరుగ నాయాశేషముచే నాయాపూర్వభాజకమును శేషము '0' యగు

వరకును భాగింపుము. తుదనైన భాజకము ఇష్టసంఖ్యలకు మహత్తమాపవర్తనము అగును. ఆమహత్తమాపవర్తనముచే నపవర్తింపబడిన ఇష్టసంఖ్యలు పరస్పరము దృఢము లగుచున్నవి.

(1) ఉదా:—(1) 624 (2) 1443 వీటికి మహత్తమాపవర్తనమెద్ది ?

```
624 ) 1443 ( 2
      1248
      ----
       195 ) 624 ( 3
             585
             ---
              39 ) 195 ( 5
                   195
                   ---
                   ...
```

ఇట్లు పరస్పరము భాగింపగా తుదనైన భాజకము (లేక శేషము) 39 పైరెండు సంఖ్యలకును మహత్తమాపవర్తనమగుచున్నది. కావున 39 చే పైరెండుసంఖ్యలను భాగింప శేషము లేకుండును ఆలబ్ధములు పరస్పరము దృఢము లగును. అనగా వారియేయితర సంఖ్యచేతను భాగింపబడవు.

$624 \div 39 = 16$ మరియు $1443 \div 39 = 37$ ఇచట 16 ను 37 ను పరస్పరము దృఢము లగుచున్నవి.

ఉపపత్తి:—పై ఉదాహరణమువందు తుదిభాజకము 39. తుదిభాజ్యము 195 ఈరెండిటికిని 39 కంటె మహత్తమాపవర్తన ముండదుగదా !

కనుక $195 \times 3 = 585$ ఇదియును 39చే నిశ్శేషమగును. (53 ప్ర 1సి చూ)

కనుకనే $585 + 39 = 624$ ఇదియును 39చే ,, (53 ప్ర 3సి చూ)

ఇట్లు $624 \times 2 = 1248$ ఇదియును 39 చే ,, (53 ప్ర 1సి)

ఇట్లు $1248 + 195 = 1443$ ఇదియును 39 చే ,, (53 ప్ర 3సి)

దీనివలన 39 చే అభీష్టములగు పైరెండుసంఖ్యలును నిశ్శేషమగునని స్పష్టమగుచున్నది.

మరియొక ప్రకారముగ ఉపపత్తి:—

ఏసంఖ్య (1) 624 (2) 1443 వీటిని నిశ్శేషముగ భాగించునో ఆసంఖ్య. $624 \times 2 = 1248$ దీనినిన్నీ నిశ్శేషముగ భాగించును. (53 ప్ర 1 సి) ఇట్లు $1443 - 1248 = 195$ దీనినిన్నీ నిశ్శేషము చేయును. (57 ప్ర 3 సి) ఈకారణముచే ఆసంఖ్య $195 \times 3 = 585$ దీనిని నిశ్శేషముచేయును. (53 ప్ర 1 సి)

$624 - 585 = 39$ దీనినిన్నీ నిశ్శేషము చేయును (53 ప్ర 1 సి) దీనింబట్టి ఏసంఖ్య 624 నున్ను 1443 నున్ను నిశ్శేషముగ భాగించునో ఆసంఖ్య వాటిని పరస్పరముభాగించుటచే తుదను శేషముగనున్న 39 నిన్నీ నిశ్శేషముగభాగించును అని తెలియుచున్నది.

పైఉపపత్తులనుబట్టిగూ తుదకు శేషించిన 39 యే మహత్తమాపవర్తనమనిన్ని నంతకంటె పెద్దసంఖ్య ఆరెండిటినపవర్తించునది లేదనియు స్పష్టమగుచున్నది.

దీనింబట్టి ఈఅనుమానములు సిద్ధించుచున్నవి.

(1) రెండుసంఖ్యలకు మహత్తమాపవర్తనమగుసంఖ్య ఆరెండిటిని పరస్పరము భాగించుటచే నగు ప్రతిభాగహారమందున్న భాజ్యభాజకములకును నపవర్తనమగును.

(2) రెండుసంఖ్యలను నిశ్శేషముగ భాగించుసంఖ్య ఆరెండుసంఖ్యలయొక్కయు మహత్తమాపవర్తనమునున్ను నిశ్శేషముగ భాగించును.

(3) పరస్పరము దృఢములగు రెండుసంఖ్యలను పరస్పరము భాగించుటచే తుదకు 1 శేషించును.

55. ప్ర. మహత్తమాపవర్తనము నెరుంగుటకు సులభపద్ధతి.

ఏరెండుసంఖ్యలకు మహత్తమాపవర్తనము గావలయునో ఆరెండిటిని తొలుత (24 ప్ర) సామాన్యముగ గోచరించినంతవరకు సాధారణాపవర్తనములచే నపవర్తించి అట్లు సాధరణాపవర్తితసంఖ్యలకు మహత్తమాపవర్తనమును గనుగొనుము. అట్టి మహత్తమాపవర్తనముయొక్కయు సాధారణాపవర్తనాంకములయొక్కయు గుణనము, మొదటి రెండుసంఖ్యలకు నపవర్తనాంకము అగును.

ఉదా:—(1) 11132 (2) 15180 వీటికి మహత్తమాపవర్తనము ?

```
 4 | 11132        4 | 15180
   -------          -------
11 |  2783       11 |  3795
   -------          -------
       253              345
```

తిరుగా 11 చే భాగింప

ఇపుడు 253 నకును 345 నకును పరస్పరము భాగించుటచే 23 మహత్తమాపవర్తనము వచ్చుచున్నది. కావున $4 \times 11 \times 23 = 1012$ ఇది మొదటిసంఖ్యలకు మహత్తమాపవర్తనము

యుక్తి:—అపవర్తితసంఖ్యలయొక్క మహత్తమాపవర్తనమును అపవర్తింపబడినదగుచుండుటచే అపవర్తనాంకములచే అపవర్తితసంఖ్యలయొక్క మహత్తమాపవర్తనము గుణింపబడి ఇష్టసంఖ్యలకు మహత్తమాపవర్తన మగుచున్నది.

(2) అభీష్టసంఖ్యలు రెండిటిలో నొకసంఖ్య మాత్రమే సాధారణాపవర్తనాంకముచే నపవర్తింపబడెను. అపుడు సాధారణాపవర్తనాంకముచే నపవర్తింపబడిన సంఖ్యకును రెండవసంఖ్యకును అగు మహత్తమాపవర్తనాంకము అభీష్టములగు సంఖ్యలకును అపవర్తనాంక మగుచున్నది. కాని ఇందు అట్టి సాధారణాపవర్తనాంకమును రెండవసంఖ్యయును పరస్పరము దృఢములు కావలయును.

ఉదా:—4599 కిని 1710 కిని మహత్తమాపవర్తన మెద్ది ?

ఇందు 1710 దీనికి 10 అపవర్తనాంకము. ఈసంఖ్య 4599 దీనినిబట్టి దృఢమగుచున్నది. కావున 4999 కిని 171 కిని మహత్తమాపవర్తనము గనుగొనవలయును.

```
171 ) 4599 ( 26
      4446
      153 ) 171 ( 1
            153
            18 ) 153 ( 8
                 144
                   9 ) 18 ( 2
                       18
                       ..
```

ఇచట 9 మహత్తమాపవర్తనమగుచున్నది ఇదియే అభీష్టసంఖ్యలకును మహత్తమాపవర్తనమగును.

56. ప్ర. రెండిటికంటెనధికములగు సంఖ్యలకు మహత్తమాపవర్తనము కావలసినచో తొలుత రెండుసంఖ్యలకు మహత్తమాపవర్తనమును తెలిసికొని ఆమహత్త

మాపవర్తనాంకమునకును 3 వ సంఖ్యకును మహత్తమాపవర్తనమును గనుగొనును. ఇట్లు అభీష్టసంఖ్యలన్నియు ముగించువరకును పూర్వపు మహత్తమాపవర్తనమునకును మరియొక సంఖ్యకును కనుగొనుచు క్రియను చేయును. తుదనైన మహత్తమాపవర్తనము అభీష్టసంఖ్యలకన్నిటికిని మహత్తమాపవర్తనమగును.

ఉదా:—45, 54, 60 వీటికి మహత్తమాపవర్తన మెద్ది ?

```
45 ) 54 ( 1
     45
      9 ) 45 ( 5
          45
```

తొలుత 45 కును 54 కును మహత్తమాపవర్తనమును గనుగొనగా 9 అగుచున్నది. కాబట్టి,

```
9 ) 60 ( 6
    54
     6 ) 9 ( 1
         6
         3 ) 6 ( 2
             6
```

ఇపుడు పూర్వమహత్తమాపవర్తనమగు 9 కిని 60 కిని గనుగొనగా 3 మహత్తమాపవర్తన మగుచున్నది. కావున 3 ఈసంఖ్య పైమూడుసంఖ్యలకును మహత్తమాపవర్తనమగును (54 ప్ర 2 అను. 53 ప్ర 1 సి చూ)

57. ప్ర. అభీష్టములగు రెండుసంఖ్యలను ఒకఅంకెచే భాగించుటచే అభీష్టశేషములు రావలయును. అను ప్రశ్నమునందు అభీష్టశేషములను అభీష్టసంఖ్యలవలన తీసివేయగా మిగిలిన సంఖ్యలకు పూర్వప్రకారము అపవర్తనాంకమును గనుగొనుము ఆసంఖ్యచే అభీష్టసంఖ్యలను భాగింప అభీష్టశేషములే వచ్చును.

ఉదా:—48, 55 ఈసంఖ్యలకు క్రమముగ 3, 1 శేషము మిగులునట్లు భాగించు పెద్దసంఖ్య యెద్ది ?

ఇందు క్రమముగ ఈసంఖ్యలనుండి ఈ శేషములను తీసివేయును.

$48 - 3 = 45$. $55 - 1 = 54$ ఇపుడు (1) 45 (2) 54 లకు మహత్తమాపవర్తనము 9 అగుచున్నది. ఈసంఖ్యచే ఉద్దిష్టసంఖ్యలను భాగింప అభీష్టములగు శేషములు మిగులును.

ప్రశ్నములు.

ఈసంఖ్యలకు మహత్తమాపవర్తనములను గనుగొనుము.

(1) 728, 456

(2) 843, 1249

(3) 176, 1100, 444

(4) 252, 396, 924

(5) 3211, 4901, 7163

(6) 165, 231, 385

(7) 4934, 43677 ఈసంఖ్యలను 8 శేషము వచ్చునట్లు భాగించు పెద్ద సంఖ్యయెద్ది ?

(8) 78498, 648729 ఈసంఖ్యలను 9 శేషము వచ్చునట్లు భాగించు పెద్దసంఖ్య యెద్ది ?

(9) యా, కా, నీ అను 3 గ్గురు మనుష్యులు గలరు. వారు ఒకరోజున ఒక పెద్దదేవాలయమునకు ఉదయమునుండి సాయంత్రమువరకును ప్రదక్షిణములను చేయుటను ఆరంభించిరి ముగ్గురియొక్కయు గమనములు సమానములు కావు కాని ఎవరికి వారు ప్రత్యేకము ఒక్కరీతిగనే నడచుచుండిరి. ఉదయమున ఒకచోటనుండి బయలుదేరి సాయంత్రమగుసరికి 3 గ్గురును ఒకప్రదేశమునకు వచ్చిరి. అందు యా. కా. అనువారు ఇద్దరును 63 పర్యాయములు ప్రదక్షిణా సమయములంచు కలుసుకొనిరి. అట్లు యా. నీ అనువారిద్దరును 45 పర్యాయములు కలుసుకొనిరి. వారు 3 గ్గురును ఎన్ని పర్యాయములు కలుసుకొనెదరు ?

లఘుతమాప వర్త్యము.

58. ప్రి. (1) అభీష్టసంఖ్యలచే నిశ్శేషముగ భాగింపబడు పెద్దసంఖ్యలకు అపవర్త్యములని పేరు (52 ప్రి 1) అట్లు భాగింపబడు సంఖ్యలనేకములున్నను అన్నిటియందు చిన్నసంఖ్య లఘుతమాపవర్త్యమని చెప్పబడును.

ఉదా:—2, 3, 4, 6 ఈసంఖ్యలచే 12, 24, 36 మొదలగు సంఖ్యలు నిశ్శేషముగ భాగింపబడును కావున నీభాగింపబడుసంఖ్యలు ఇష్టసంఖ్యలకు సాధారణాప వర్త్యములని చెప్పబడును. అందు అన్నిటియందును చిన్నసంఖ్య 12 లఘుతమాపవర్త్యమని చెప్పబడును.

59. ప్రి. రెండు ఇష్టసంఖ్యలకగు లఘుతమాపవర్త్యమును వాటిచేవేర్వేరుగ భాగింపనగు లబ్ధములు పరస్పరము దృఢములగును. అనగా ఆలబ్ధములు అన్నిటిని భాగించుసంఖ్య 1 టి కంటె మరియొకటి (సాధారణాపవర్తనము) ఉండదు.

యుక్తి:—ఆలబ్ధములకు సాధారణాపవర్తనమున్నచో (53 ప్ర 2 సి చే) ఆసాధరణాపవర్తనాంకముయొక్కయు ఆసంఖ్యలలో ప్రత్యేకసంఖ్యయొక్కయు గుణనఫలముచే ఆలఘుతమాపవర్త్యము నిశ్శేషముగ భాగింపబడవలయును. కావున సాధారణాపవర్తనాంకముచే ఆలఘుతమాపవర్త్యమును భాగింపగావచ్చులబ్ధము ఆరెండుసంఖ్యలకును (లఘుతమాపవర్త్యముకంటె చిన్నదియగు) అపవర్త్యము కావలయును. కాని అన్ని అపవర్త్యములలోను లఘుతమాపవర్త్యమే చిన్నదియగుటచే అంతకంటె చిన్నదియగు నపవర్త్య ముండుట అసంభవము. కావున ఆలబ్ధములు దృఢములే యగుచున్నవి.

60. ప్ర. పరస్పరము దృఢములగు రెండుసంఖ్యలయొక్క గుణనఫలము ఆసంఖ్యలకు లఘుతమాపవర్త్య మగుచున్నది.

ఉపపత్తి:—(1) 8 (2) 13 వీటికి లఘుతమాపవర్త్యము కావలయును.

ఈరెండును పరస్పరము దృఢములైనవి. కావున (59 ప్రి చే) ఏసంఖ్యను అభీష్టసంఖ్యలచే భాగింప వచ్చులబ్ధములు దృఢములగునో ఆసంఖ్య లఘుతమాపవర్త్యము కావలయును. కావున దృఢసంఖ్యలకు వాటిగుణనఫలమే లఘుతమాపవర్త్య మగుచున్నది.

61. ప్రి. అదృఢములగు రెండుసంఖ్యలకు లఘుతమాపవర్త్యము నెరుంగుట.

రెండుసంఖ్యలయొక్క గుణనఫలమును వాటియొక్క మహత్తమాపవర్తనముచే భాగించిన వచ్చులబ్ధము ఆరెండుసంఖ్యలకు లఘుతమాపవర్త్యము.

ఉదా:—96 కును 156 కును లఘుతమాపవర్త్యము కావలయును.

ఈరెండుసంఖ్యలకును మహత్తమాపవర్తనము 12 అగుచున్నది.

$\therefore$ $156 \times 96 \div 12 = 14976 \div 12 = 2248$ ఇది లఘుతమాపవర్త్యము

ఉపపత్తి:—96 ను 156 ను వీటియొక్క మహత్తమాపవర్తనము 12 చే భాగింప క్రమముగ 8 యును 13 ను లబ్ధము (అపవర్తితసంఖ్య)లగుచున్నవి. వీటియొక్కలఘుతమాపవర్త్యము (60 ప్రి చే) $8 \times 13 = 104$ కాగలదు. కాని అప

వర్తితసంఖ్యలయొక్క లఘుతమాపవర్త్యమును అపవర్తింపబడినదియే యగుటచే 8×13 ఈసంఖ్యను అపవర్తనాంకము 12 చే గుణింపవలసియున్నది.

కావున $13 \times 8 \times 12$ ఇది అభీష్టసంఖ్యలకు లఘుతమాపవర్త్యము గాగలదు. (ఈవిషయమే భాస్కరాచార్యులచే సూచింపబడెను 72 ప్రి 2 చూ)

ఇపుడు ఈలఘుతమాపవర్త్యము $8 \times 13 \times 12$ ను 12 చే గుణించి దానిని 12 చే భాగించినను లఘుతమాపవర్త్యమే యుండును (7 ప్రి 7 సి చూ)

$\therefore 8 \times 13 \times 12 = 8 \times 13 \times 12 \times 12 \div 12 = 8 \times 12 \times 13 \times 12 \div 12$
$= 96 \times 156 \div 12$ లఘుతమాపవర్త్య మగుచున్నది.

ఇట్లీపద్ధతి ఉపపన్న మగుచున్నది.

అనుమాన:—రెండుసంఖ్యలకగు మహత్తమాపవర్తనముయొక్కయు లఘుతమాపవర్త్యముయొక్కయు గుణనఫలము ఆరెండుసంఖ్యలయొక్కయు గుణనఫలముతో సమమగుచున్నది.

62. ప్ర. రెండిటికంటె నధికసంఖ్యలకు లఘుతమాపవర్త్యము కావలసినచో తొలుత రెండిటికి గనుంగొని ఆలఘుతమాపవర్త్యమునకును 3 వ సంఖ్యకును గనుగొనుము. ఇట్లు సంఖ్యలన్నియు ముగించువరకును చేయుము. తుదనైన లఘుతమాపవర్త్యము అన్నిటియొక్కయు లఘుతమాపవర్త్యము గాగలదు.

ఉదా:—6, 20, 25 వీటికి లఘుతమాపవర్త్యమెద్ది ?

ఇచట 6 కును 20 కిని మహత్తమాపవర్తనము 2 అగుచున్నది కావున $6 \times 20 \div 2 = 60$ ఈసంఖ్య 6 నకును 20 కిని లఘుతమాపవర్త్యము (61 ప్ర చూ)

ఇపుడు 60 కిని 25 నకును మహత్తమాపవర్తనము 5 అగుచున్నది. కావున $60 \times 25 \div 5 = 1500 \div 5 = 300$ ఇది 60 కిని 25 నకును లఘుతమాపవర్త్యమగుచున్నది. ఈ 300సంఖ్య మొదటి మూడుసంఖ్యలకును లఘుతమాపవర్త్యము గాగలదు,

63. ప్ర. లఘుతమాపవర్త్యము కావలసినసంఖ్యలనేకములైనపుడు అందలి ఏరెండుసంఖ్యలైనను పరస్పరము దృఢములేయగుచో (ఏరెండుసంఖ్యలైనను సాధారణాపవర్తాంకముచే నపవర్తింపబడనియెడల) వాటి అన్నిటియొక్కయు గుణనఫలము అన్నిటియొక్కయు లఘుతమాపవర్త్యము గాగలదు.

ఉదా:—4, 7, 9 ఇందు 4, 7 ఈరెండైనను 4, 9 ఈరెండైనను 9, 7 ఈరెండైనను పరస్పరము దృఢములే యగుచున్నవి. కావున $4 \times 7 \times 9 = 252$ ఇది ఈమూడుసంఖ్యలకును లఘుతమాపవర్త్యము.

యుక్తి.—(60 ప్రి) చే 4, 7 ఇవి దృఢములగుటచే వీటికి 4×7 లఘుతమాపవర్త్యము.

ఇట్లు 4×7 ఇదియును 9 ఇదియును పరస్పరము దృఢములగుటచే వీటికి $4 \times 7 \times 9$ లఘుతమాపవర్త్యము.

64. ప్రి. లఘుతమాపవర్త్యము కావలసినసంఖ్యలు అనేకములై అందుకొన్నిటిలో రెండేసిసంఖ్యలు పరస్పరము దృఢములును కొన్ని పరస్పరము అదృఢములును అగునపుడు చేయదగినపద్ధతి:— అదృఢసంఖ్యలలో రెండేసిసంఖ్యలను వాటియొక్క అపవర్తనములచే నపవర్తింపుము. ఎట్లపవర్తించినచో తుదనున్న లబ్ధములు పరస్పరము దృఢములగునో అట్లపవర్తింపవలయును. పిమ్మట దృఢలబ్ధములయొక్కయు మిగిలినసంఖ్యలయొక్కయు గుణనమును ఆఅపవర్తనాంకములచే గుణింపనగుసంఖ్య లఘుతమాపవర్త్యము గాగలదు.

ఉదా:—6, 20, 25 ఈసంఖ్యలకు లఘుతమాపవర్త్యమెద్ది ?

ఇందు 6, 25 ఈరెండును పరస్పరము దృఢములైనను 6, 20 ఈరెండును 20, 25 ఈరెండును అదృఢములగుచున్నవి. కావున 6, 20 వీటిని 2 చే నపవర్తింప 3, 10 దృఢలబ్ధములు. పిమ్మట 10, 25 ఈరెండిటిని 5 చే నపవర్తింప 2, 5 ఇవి దృఢలబ్ధములు కావున $3 \times 2 \times 5$ దీనిని 2, 5 ఈఅపవర్తనాంకములచే గుణింప $(3 \times 2 \times 5) \times (2 \times 5) = 300$ ఇది లఘుతమాపవర్త్య మగుచున్నది.

ఉపపత్తి:—దృఢసంఖ్యలయొక్క గుణనము వాటికి లఘుతమాపవర్త్యమగుచున్నది. (63 ప్రి. చూ) కాని అపవర్తింపబడిన సంఖ్యలయొక్క లఘుతమాపవర్త్యమును అపవర్తింపబడినదగుటచే ఆ అపవర్తాంకములచే దృఢసంఖ్యలయొక్క లఘుతమాపవర్త్యమును గుణింప అభీష్టసంఖ్యలయొక్క లఘుతమాపవర్త్యమగుచున్నది.

65. ప్రి. అనేకసంఖ్యలకు లఘుతమాపవర్త్యము నెరుంగు సామాన్యపద్ధతి.

ఉద్దిష్టసంఖ్యల నన్నిటిని ఒకపంక్తిగ వ్రాయుము. అట్టిపంక్తి

యందలి కొన్నిసంఖ్యలచే తదితరములగుసంఖ్యలు అపవర్తింపబడునో అట్లు అపవర్తించుసంఖ్యలను కొట్టివేసినట్లు గుర్తుగ క్రింద గీటుగీయుము. మిగిలినసంఖ్యలలో 1 టి కంటె నెక్కువయగు సంఖ్యలు సాధారణముగ నపవర్తింపబడుచో నట్లపవర్తింపుము. సూక్ష్మభాగహారమునందువలె అపవర్తనాంకమును భాజకస్థానమునందును లబ్ధములనున్న అపవర్తింపబడనిసంఖ్యలనున్న పైయంకములకు క్రిందుగ నొకపంక్తిగను వ్రాయుము. ఇట్లు తిరుగతిరుగ చేయుము. పరస్పరము దృఢములుగానట్టి సంఖ్యలు రెండైనను లేకుండవలయును తుదిపంక్తియందలి సంఖ్యలయొక్కయు భాజకస్థానమందలి అపవర్తనాంకములయొక్కయు గుణనఫలము లఘుతమాపవర్త్యమగును.

మొదటిపంక్తియందువలె ప్రతిపంక్తియందును పంక్తిలోనిసంఖ్యలు ఒకదానిచే నొకటి యపవర్తింపబడుచో నట్టి యపవర్తనాంకములను కొట్టివేయవలెను.

(1) ఉదా:—12, 15, 16, 18 వీటికి లఘుతమాపవర్త్యము ?

పై ప్రకారముచే

2	12, 15, 16, 18
2	6, 15, 8, 9
3	3, 15, 4, 9
	5, 4, 3

కావున $5 \times 4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 = 720$ ఇది లఘుతమాపవర్త్యము.

2 ఉదా:—2 మొదలు 10 వరకు గల సంఖ్యలకు లఘుతమాపవర్త్యమెద్ది ?

2	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
	3, 7, 4, 9. 5

కనుక $7 \times 4 \times 9 \times 5 \times 2 = 2520$ ఇది లఘుతమాపవర్త్యమగుచున్నది.

లఘుతమాపవర్త్య ప్రశ్నములు.

ఈక్రింది సంఖ్యలకు లఘుతమాపవర్త్యమెద్ది ?

(1) 9, 20, 12, 55, 33
(2) 8, 11, 14, 18, 22
(3) 12, 24, 40. 38, 72
(4) 120, 144, 180, 304, 154
(5) 30, 42, 70, 110
(6) 84, 91, 18, 24

లఘుతమాపవర్త్య సంబంధప్రశ్నములు.

(1) 4 తట్టలలో సమానముగ మామిడిపండ్లు గలవు. అందు మొదటి తట్టను 5 గురు పుచ్చుకొని సమానముగా పంచుకొనిరి. 2 వ తట్టను 6 గురు సమానముగా పంచుకొనిరి. 3 వ తట్టను 8 గురు సమానముగ పంచుకొనిరి. 4 వ తట్టను 9 గురు సమానముగ పంచుకొనిరి. ఒక్కతట్టయందున్న మామిడి పండ్లెన్ని?

(2) ఒకగ్రామమునందు 8 గృహములనుండి కొన్నిగొఱ్ఱెలు సమానముగ బయలుదేరినవి. ఆగ్రామమునుండి నాలుగువైపులకును సమానముగ వెళ్లినవి. తుదకు అవి అన్నియు గలసి తిరుగ 9 సమానగుంపులుగ విడి మేతమేసినవి. 10 స్థానములందు సమానముగ జలమును త్రాగినవి. ఆగొఱ్ఱెలసంఖ్యయెంత?

(3) ఒకపుడు శ్రీశైలమునకు ప్రదక్షిణమును చేయుటకు ముగ్గురు ఒకచోటనుండి బయలుదేరిరి. దానియొక్క చుట్టుకొలత 60 మైళ్ళు అయియుండెను. వారు అందరును బయలుదేరినచోటికి ఒకసారి వచ్చువరకును ప్రదక్షిణములు చేయుచుండుటకు సంకల్పించిరి. మొదటివాడు 1 గంటకు 3 మైళ్ళను 2 వ వాడు 1 గంటకు 4 మైళ్ళను 3 వ వాడు గంటకు 5 మైళ్ళను నడచెదరు. వారు బయలుదేరినదిమొదలు ఎన్నిగంటలకు అందరును ఒకమారు బయలుదేరిన ప్రదేశమునకు వచ్చెదరు? ఒక్కొకనికి ఎన్ని ప్రదక్షిణములగును ?

(4) ఒకసంఖ్యను 5, 6, 8, 9 ఈసంఖ్యలచే వేర్వేర భాగింప శేషము 3 మిగులుచున్నది ఆసంఖ్యయేది ?

ఇది అభిన్నపరికర్మాష్టకము. 2 వ ప్రకరణము.

భిన్న పరికర్మాష్టకము.

3వ ప్రకరణము.

భిన్నసంఖ్యోత్పాదనము.

---

66. ప్ర. ఇంతవరకును అభిన్న(పూర్ణ)ములగు అనగా ఏది ఒకటియొక్క గాని అనేక ఒకట్లయొక్కగాని సమూహమగుచున్నదో అట్టి సంఖ్యలనుగూర్చిన

గణితము చెప్పబడినది. ఆగణితమునందు సంకలన వ్యవకలన గుణనములందు ఫలము అభిన్నముగనే వచ్చుచున్నది.

భాగహారమునందుమాత్రము ఎపుడు భాజకముచే భాజ్యము నిశ్శేషముగ భాగింపబడునో అపుడు లబ్ధము అభిన్నము (పూర్ణము)గనే రాగలదు. కాని ఎప్పుడుభాజకముచే భాజ్యము నిశ్శేషముగ భాగింపబడదో అపుడు లబ్ధము భిన్నసంఖ్య (అపూర్ణసంఖ్య = చిల్లరిగనుండుసంఖ్య)గ వచ్చుచున్నది.

ఎట్లనగా రూ 61 లను 8 మనుష్యులకు పంచవలయును ఇది భాగహారప్రశ్నము. ఇపుడు 8 చే 61 ని భాగింపగా 7 లబ్ధము వచ్చుచున్నది. శేషము 5 ఉన్నది. కావున రూ 5 లను 8 చే సమానముగా విభజింపవలెను లబ్ధమున్ను రూ 7 లున్ను ఒక్కొకనికి ఇయ్యవలయును. అని చెప్పవలయును. ఇదియేభిన్నసంఖ్య. ఇట్టిసంఖ్యలను సంబంధించిన గణితము భిన్నగణితము.

ఈ భిన్నసంఖ్యయందు భాజ్యమును పైనివ్రాసి క్రిందగీటునుగీచి దాని క్రింద భాజకము వ్రాయబడుచున్నది. గీటుపైసంఖ్య అంశము లేకలవము అనిచెప్పబడును. క్రిందిసంఖ్య హారము లేకఛేదము అనియు చెప్పబడును.

ఉదా:—$\frac{5}{8}$ ఇది 5 లో 8 వ వస్తు అని బోధించుచున్నది.

ఇట్లుగనే $\frac{61}{8}$ అనియు వ్రాయవచ్చును. ఇపుడు 61 లో 8 వ వంతు అని గ్రహింపవలయును. 61 లో 8 వ వంతు అనినను 7 న్ను 5 లో 8 వ వంతున్ను అనినను సమానమే కావున $\frac{61}{8} = 7 + \frac{5}{8}$ అగుచున్నది. దీనింబట్టి హారముకంటె లవము ఒకపుడు హెచ్చుగను ఒకపుడు తక్కువగను నుండవచ్చునని తెలియదగియున్నది. కాని ఎపుడు హారలవములు రెండును సమానములగుచున్నవో అపుడు లబ్ధము 1 టి యగుచున్నదియని గ్రహింపవలయును.

67. ప్ర. ఈ $\frac{5}{8}$ భిన్నసంఖ్యయందు ఐదువస్తువులను 8 భాగములుగ విభజించి ఒకభాగము అను తాత్పర్యము పైలక్షణమునందు స్పష్టముగుచున్నది. కాని ఈభిన్నసంఖ్యకు ఒకవస్తువును 8 భాగములుచేసి అందు 5 భాగములు అనియు తాత్పర్యమును గ్రహింపవచ్చును. ఎట్లైనను పరిమాణము సమానమే యగుచున్నది.

ఎట్లనగా:—$\frac{5}{8}$ ఈభిన్నసంఖ్యయందు 5 రూప్యములను 8 మనుష్యులకు పంచిపెట్టుటయని అనుకొనుము. అపుడు 5 రూపాయిలను అణాలుగమార్చినచో $5 \times 16 = 80$ అణాలు అగుచున్నవి. ఈసంఖ్యను 8 చే భాగింప ఒక్కొకనికి అణాలు 10 వచ్చును.

లేక రూ 1 యిని 8 చే భాగించి 5 భాగములు గ్రహించినను అణాలు 10 యే అగుచున్నవి. ఇట్లుగనే $\frac{61}{8}$ ఈసంఖ్యయందును ఒకరూప్యమును 8 సమభాగములుగ విభజించిన నెంతయగునో అట్టిభాగములు 61 యనినను రూ 61 లను 8 చే భాగింపనగులబ్ధమనినను పరిమాణము సమానమే యగుచున్నది.

68. ప్ర. భిన్నసంఖ్యలయొక్క సంజ్ఞాభేదములు.

(1) భిన్నసంఖ్యయందు హారముకంటె లవము చిన్నదియగుచో నాభిన్నసంఖ్య సూక్ష్మభిన్నమని చెప్పబడును.

(2) హారముకంటె లవము పెద్దదియగుచో స్థూలభిన్నమని చెప్పబడును

(3) ప్రతిభిన్నసంఖ్యయందును పైసంఖ్య అంశములను బోధించునుగదా భాగములగిన ఒకసంఖ్యయొక్క అంశములేగాన అంశములను భాగములనియు వ్యవహరింపవచ్చును. కావున కేవలమైన ప్రతిభిన్నసంఖ్యను భాగజాతియని చెప్పవచ్చును. అనగా హారలవములు రెండును ప్రత్యేకము పూర్ణాంకములైనచో ఆభిన్నసంఖ్య కేవలభాగజాతిలోనిది, ఉదా:—$\frac{5}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}$ ఇత్యా... భాగజాతిలోనిది. అట్టి భిన్నసంఖ్యలను ఒకజాతిలోనివగునట్లు అనగా సమానహారములు గలవానినిగ జేయుటయు భాగజాతిఅనియు, సమచ్ఛేదీకరణమనియు చెప్పబడును.

(4) భాగములో భాగములు గలిగిన భిన్నసంఖ్య ప్రభాగజాతి

ఉదా:—$\frac{3}{4}$ లో $\frac{5}{7}$ లో $\frac{2}{3}$ ఇత్యా

(5) పూర్ణాంకమునందు భాగజాతిని చేర్చుట భాగానుబంధము తీసివేయుట భాగాపవాహము. ఈరెండిటిని సాధారణముగ మిశ్రభిన్నసంఖ్యయని వ్యవహరింతురు. భాగానుబంధ భాగాపవాహములు చేసినపిమ్మట స్థూలభిన్నమని చెప్పబడును.

(6) పూర్ణసంఖ్యయందుగాని భిన్నసంఖ్యయందుగాని తనలోని కొన్ని అంశములను కలుపుట స్వాంశానుబంధము. తీసివేయుట స్వాంశాపవాహము.

ఉదా:—ఒకనివద్ద రు 6 లు ఉండెను. వాడు తనవద్దనున్న ధనములో నాలవంతును ఖర్చుపెట్టెను. నిల్వయున్న ధనమెంత? ఈప్రశ్నము స్వాంశాపవాహములోనిది. కేవలము నాలవవంతు అనుచో రూపాయిలో నాలవవంతు అనగా 4 అణాలు అర్థము అగును. రు 6 లలో నాలవవంతు అనువో $1\frac{1}{2}$ రూపాయిలన్న అర్థము అగుచున్నది. దీనిని 6 — స్వ $\frac{1}{4}$ అని వ్రాయవలయును. ఇట్లనే తనసొమ్ములో నాలవవంతు యెంతయగునో అంతధనము నార్జించెను అపుడు నిల్వయెంత? అనుట స్వాంశానుబంధము. దీనిని 6 + స్వ $\frac{1}{4}$ అని వ్రాయవలయును. ఇట్లగనే $\frac{1}{2}$ లో $\frac{1}{4}$ ఎంతయగునో అంతయు $\frac{1}{2}$లో గలుపవలయుననిన $\frac{1}{2}$ + స్వ $\frac{1}{4}$ అనియు తీసివేయవలయుననిన $\frac{1}{2}$ — స్వ $\frac{1}{4}$ అనియు వ్రాయవలయును. ఇట్లు స్వాంశానుబంధ స్వాంశాపవాహములను కలిపియు వ్రాయవచ్చును. $\frac{2}{5}$ — స్వ $\frac{3}{7}$ + స్వ $\frac{5}{8}$ ఇచట $\frac{2}{5}$ లో స్వాంశము $\frac{3}{7}$ ను తీసి వేయగానైనసంఖ్యలో స్వాంశము $\frac{5}{8}$ కలుపవలయును.

(7) పై (3, (4) (5) (6) లందు చెప్పబడిన భాగజాతి, ప్రభాగజాతి భాగానుబంధ భాగాపవాహ స్వాంశానుబంధ స్వాంశాపవాహములను చేయుటను సామాన్యముగ సవర్ణనమనియును అంశసవర్ణనమనియును వ్యవహరింతురు.

(8) ఏభిన్నసంఖ్యయందు హారలవములు రెండును రెంటిలో నొకానొకటిగాని భాగజాతిగాని ప్రభాగజాతిగాని మిశ్రసంఖ్యగాని స్వాంశానుబంధముగాని స్వాంశాపవాహముగాని లేక ఈచెప్పబడినవాటిలో ననేకముగాని యగునో ఆభిన్నము ప్రభిన్నభాగజాతి.

(9) భాగజాతియందు హారలవములు రెండును దృఢములైనవో ఆభాగజాతిసంఖ్యకు అది లఘుతమరూపమని చెప్పబడును.

ఇవన్నియు క్రమముగ ఎటుందుముందు ఉదాహరణములందు స్పష్టమగును.

70, ప్ర. భిన్నసంఖ్యయొక్క రూపభేదములు.

ప్రతిభిన్నసంఖ్యను పరిమాణము మారకుండునట్లు అనేకరూపములలో నుంచవచ్చును. హారలవములను రెంటిని ఒకేసంఖ్యచే గుణించినను ఒకేసంఖ్యచే

భాగించినను పరిమాణము మారదు (20 ప్ర 6 సి చూ) కావున హారలవములకు గుణకమున్ను భాజకమున్ను మారినకొలదిని భిన్నసంఖ్యకు అనేకరూపములు గలుగగలవు. సంకలనాదులందు భిన్నసంఖ్యకు గుణకముచే మహద్రూపమును చేయుటయు భాజకముచే లఘురూపమును చేయుటయును ఆవశ్యకమగుచుండును. లఘుతమరూపమును చేయవలసివచ్చినపుడు (24, 53, 54, 55, 56 ప్ర)చే అపవర్తనాంకముల నెరింగి దానిచే హారలవముల రెండిటిని భాగింపనగులబ్ధములను హారలవములనుగా వ్రాయవలయును. ఇట్లు చేయుటచే గుణనభజనములందు సౌకర్యము గలుగును. మహద్రూపములుగల భిన్నసంఖ్యలకు గుణనభజనములుచేయుటకంటె లఘురూపములైన భిన్నసంఖ్యలకు గుణనభజనములచేయుట సుకరము. అదిగాక పరిమాణముల నెరుంగుటయును లఘుతమరూపభిన్నమునందు సులభము. కావున సంకలనాదికము చేసినపిమ్మటనున్ను లఘుతమరూపముగలదానినిగ మార్చవలయును.

ఉదా:— $\frac{156}{228}$, దీనికి లఘుతమరూపము కావలయును

$\frac{156}{228} = \frac{39}{57} = \frac{13}{19}$ ఈస్వరూపములందు పరిమాణము మారదుగాని

మొదటి $\frac{156}{228}$ స్వరూపమునకు రెండవ $\frac{39}{57}$ లఘురూపము 3వ $\frac{13}{19}$ రూపము లఘుతమస్వరూపము (24 ప్ర—53 ప్ర చూ).

71. ప్ర. పూర్ణసంఖ్యను అభీష్టసంఖ్యాహారముగగల భిన్నసంఖ్యగ మార్చుట.

ఏసంఖ్యకైనను 1 టి గుణకమైనను భాజకమైనను గుణనభజనములందు వికృతి గలుగదు. కావున పూర్ణసంఖ్యకు 1 టిని హారముగ వ్రాసినను పరిమాణము మారదు. ఈవిషయమును "హారములేనిరాశికి 1 టిని హారముగ కల్పింపవలయును" అని "కల్ప్యో హారో రూప మహారరాశేః" ఈసూత్రముచే ముందు సంకలన ప్రకరణమున భాస్కరాచార్యులు చెప్పియున్నారు.

పిమ్మట ఆహారలవములను (70 ప్ర చే) ఇష్టసంఖ్యచే గుణించినయెడల ఇష్టసంఖ్యాహారముగాగల భిన్నసంఖ్య అగుచున్నది.

లేక పూర్ణసంఖ్యను ఇష్టసంఖ్యచే గుణించి ఆగుణనఫలమునకు ఇష్టసంఖ్యను హారముగ చేయుము.

ఒకసంఖ్యను ఇష్టసంఖ్యచే గుణించి ఇష్టసంఖ్యచే భాగించినను లబ్ధము ఆ మొదటిసంఖ్యయే యగుచున్నది గావున పరిమాణమునందు భేదము గలుగదు.

ఉదా:—12 ను 5 హారముగగల భిన్నసంఖ్యగ మార్పుము.

$$12 = \frac{12}{1} \therefore \frac{12}{1} = \frac{12 \times 5}{1 \times 5} = \frac{60}{5}$$

లేక $12 = 12 \times 5 \div 5 = \dfrac{12 \times 5}{5} = \dfrac{60}{5}$

భిన్నభాగజాతి.

అథజాతి చతుష్టయమ్.

తత్రాదా వంశనవర్ణనమ్ తత్రాపి భాగజాతౌ కరణసూత్రం వృత్తమ్
అన్యోన్యహారాభిహతౌ హరాంశౌ రాశ్యోస్సమచ్ఛేదవిధానమేవమ్॥
మిథోహరాభ్యా మపవర్తితాభ్యాం యద్వా హరాంశౌసుధియాత్ర
గుణ్యౌ॥ ౹౩॥

టీ. హరాంశౌ = హారలవములు అన్యోన్యహారాభిహతౌ = పరస్పరము యొక్క హారములచే గుణింపబడినవియై (ఒకదానియొక్క హారముచే మరియొక దానియొక్క హారలవముల గుణింపవలెను) రాశ్యోః = రెండు రాసులకును సమచ్ఛేదవిధానమ్ = సమచ్ఛేదీకరణము ఏవం = ఈప్రకారముగ(నగును) యద్వా= లేక సుధియా = బుద్ధిమంతునిచే అత్ర = ఈసమచ్ఛేదీకరణమునందు అపవర్తితాభ్యాం = అపవర్తింపబడిన హారాభ్యాం = హారములచే మిథః = పరస్పరము హరాంశౌ = హారలవములు గుణ్యౌ = గుణింపదగినవి.

భాగజాతి లేక సమచ్ఛేదీకరణము.

72. ప్ర. తా. (1) రెండుభాగజాతి భిన్నసంఖ్యలను సమానహారములు గలవిగ చేయవలసినపుడు ఒకభిన్నసంఖ్యయొక్క హారముచే మరియొకభిన్నసంఖ్యయొక్క హారలవముల గుణింపుము మరియొక భిన్నసంఖ్యయొక్క హారముచే

మొదటిభిన్నసంఖ్యయొక్క హారలవములను గుణింపుము. అపుడు రెండుసంఖ్యలును సమానహారములు గలవి యగును.

భిన్నసంఖ్యలు అనేకములున్నచో సమానహారములగు రెండుభిన్నసంఖ్యలయొక్కయు హారలవములను 3 వ భిన్నసంఖ్యయొక్కహారముచే గుణింపుము ఆరెండుభిన్నసంఖ్యలయొక్కయు హారముచే 3 వ భిన్నసంఖ్యయొక్క హారలవములను గుణింపుము. ఇట్లు తుదవరకును చేయుము. అన్నియు సమచ్ఛేదములగును.

లేక ఒక్కొక భిన్నసంఖ్యయొక్క లవమును తదితరభిన్నసంఖ్యలయొక్క హారములచే గుణించి గుణింపవగు గుణనఫలములను లవములుగను అన్నిటియొక్కయు హారములు గుణింపనగు గుణనఫలముల హారములుగను వ్రాయుము. సమచ్ఛేదము లగును.

(ఇట్లు గుణించుటలో గుణించుటకు పూర్వమందలి హారములను ఉపయోగింపవలయును).

(1) ఉదా:—$\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$ వీటిని సమచ్ఛేదములుగ చేయుము.

$\dfrac{1}{5} = \dfrac{1 \times 3}{5 \times 3} = \dfrac{3}{15}$ ఇట్లు $\dfrac{1}{3} = \dfrac{1 \times 5}{3 \times 5} = \dfrac{5}{15}$

$\therefore$ $\frac{3}{15}$, $\frac{5}{15}$ ఇవి అభీష్టములగు సమచ్ఛేదములగు భిన్నసంఖ్యలు.

(2) ఉదా:—$\frac{3}{1}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$ వీటిని సమఛేదములుగ చేయుము.

తొలుత $\frac{3}{1}$, $\frac{1}{5}$ ఈరెండిటిని సమఛేదములుగ చేయవలయును. కావున పై ప్రకారము $\dfrac{3}{1} = \dfrac{3 \times 5}{1 \times 5} = \dfrac{15}{5}$ ఇట్లు $\dfrac{1}{5} = \dfrac{1 \times 1}{5 \times 1} = \dfrac{1}{5} \therefore \dfrac{15}{5}$, $\dfrac{1}{5}$ సమఛేదములు.

తిరుగ $\frac{15}{5}$, $\frac{1}{5}$ ఈ సంఖ్యలనున్ను $\frac{1}{3}$ దీనినిన్ని సమచ్ఛేదములుగ చేయవలయును.

$$\frac{15 \times 3}{5 \times 3}, \frac{1 \times 3}{5 \times 3} = \frac{45}{15}, \frac{3}{15} \text{ ఇట్లు } \frac{1}{3} = \frac{1 \times 5}{3 \times 5} = \frac{5}{15}$$

$\therefore$ $\frac{45}{15}$, $\frac{3}{15}$, $\frac{5}{15}$ సమచ్ఛేదములు లేక, మొదటి భిన్నసంఖ్య లవమును ఇతర

హారములచే గుణింప మొదటిసంఖ్యయొక్క లవము అగుచున్నది. $3 \times 5 \times 3 = 45$

ఇట్లు రెండవసంఖ్యయొక్క లవము ... $1 \times 1 \times 3 = 3$

,, మూడవసంఖ్యయొక్క లవము ... $1 \times 1 \times 5 = 5$

అన్నిహారములయొక్కయు గుణనము $1 \times 5 \times 3 = 15$ అన్నిటియొక్కయు హారము ∴ $\frac{45}{15}, \frac{3}{15}, \frac{5}{15}$ ఇవి సమచ్ఛేదములు.

(2) భిన్నసంఖ్యలు రెండైనచో రెండిటియొక్కయు హారములను మహత్తమాపవర్తనముచే నపవర్తింపుము. మొదటిభిన్నసంఖ్యయొక్క పూర్వహారలవములను రెండవభిన్నసంఖ్యయొక్క అపవర్తితహారముచే గుణింపుము. రెండవభిన్నసంఖ్యయొక్క పూర్వహారలవములను మొదటిభిన్నసంఖ్యయొక్క అపవర్తితహారముచే గుణింపుము. గుణింపబడిన హారలవములు హారలవములుగాగల భిన్నసంఖ్యలు సమానహారములు గలవి యగును.

ఉదా:— $\frac{1}{63}, \frac{1}{14}$ వీటిని సమచ్ఛేదములుగ జేయుము.

63, 14 ల యొక్క మహత్తమాపవర్తనము 7. దీనిచే రెండుభిన్నసంఖ్యలయొక్కయు హారములగు 63, 14 లను అపవర్తింప 9, 2 మొదటి అపవర్తితహారము 9 చే రెండవ భిన్నసంఖ్య $\frac{1}{14}$ యొక్క పూర్వహారలవములను, రెండవ అపవర్తితహారము 2 చే మొదటిభిన్నసంఖ్య $\frac{1}{63}$ యొక్కపూర్వహారలవములనుగుణింప $\frac{1 \times 2}{63 \times 2} = \frac{2}{126}$ ఇట్లు $\frac{1 \times 9}{14 \times 9} = \frac{9}{126}$ ∴ $\frac{2}{126}, \frac{9}{126}$ ఇవి సమచ్ఛేదములు.

ఇచట అపవర్తితహారముచే పూర్వహారమును గుణించుటచే ఆరెండుహారములకును లఘుతమాపవర్త్యము సిద్ధించుచున్నది. ఎట్లనగా 63, 14 ఈరెండిటియొక్కయు అపవర్తనాంకము 7 అగుచున్నది. దీనిచే ఆసంఖ్యలను అపవర్తింపగా 9, 2 అగుచున్నవి. అనగా $63 \div 7 = 9$ ఇట్లు $14 \div 7 = 2$ కావున $63 = 9 \times 7$, $14 = 7 \times 2$ అగుచున్నది. దీనింబట్టి $63 \times 2 = 9 \times 2 \times 7$ ఇట్లు $14 \times 9 = 7 \times 2 \times 9$ కావున 126 ఈసంఖ్య 63. 14 ల లఘుతమాపవర్త్యమగుచున్నది. (61 పు చూ) ఇట్లు ఇచట లఘుతమాపవర్త్యము సూచింపబడెను.

ఇట్లు రెండుసంఖ్యలయొక్కయు హారములయొక్క లఘుతమాపవర్త్యము హారముగ గ్రహింపబడెను. రెండవసంఖ్యయొక్కఅపవర్తితహారము అనగా ఆలఘుతమాపవర్త్యమునుపూర్వహారముచేభాగింపనగులబ్ధము దానిచే లవముగుణింపబడెను.

(3) ఇట్లు లఘుతమాపవర్త్యమును ఎరింగి సమచ్ఛేదములుగ చేయుట సులభపద్ధతి. భిన్నసంఖ్య లనేకము లున్నపుడును అన్నిసంఖ్యలయొక్కయు హారముల లఘుతమాపవర్త్యమును హారములుగను ఆలఘుతమాపవర్త్యమును తమతమపూర్వహారములచే భాగింపనగులబ్ధములచే లవములను గుణింపనగు గుణనఫలములను లవములుగను వ్రాయుము. అవి సమచ్ఛేదము లగును.

ఉదా:— $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$ ఈసంఖ్యలను సమచ్ఛేదములుగ చేయుము.

తొలుత హారములయొక్క లఘుతమాపవర్త్యముకొరకు న్యాసము.

2) 3, 4, 5, 6

2, 5, 3 .. $2 \times 2 \times 5 \times 3 = 60$ లఘుతమాపవర్త్యము

పైపద్ధతిననుసరించి $60 \div 3 = 20$ ∴ $20 \times 2 = 40$ మొదటిసంఖ్యయొక్కలవము

అట్లు $60 \div 4 = 15$ ∴ $15 \times 3 = 45$ రెండవ ,,

$60 \div 5 = 12$ ∴ $12 \times 4 = 48$ మూడవ ,,

$60 \div 6 = 10$ ∴ $10 \times 5 = 50$ నాలవ ,,

∴ $\frac{40}{60}, \frac{45}{60}, \frac{48}{60}, \frac{50}{60}$ ఇవి సమచ్ఛేదములగు ఉద్దిష్టభిన్నసంఖ్యలు

(4) ఇట్లు సమచ్ఛేదములనుగా చేయుటవలన భిన్నసంఖ్యలయొక్క న్యూనాధికభావము (తారతమ్యము) అనగా ఏసంఖ్యకంటె ఏసంఖ్య పెద్దదియగునదియు ఏసంఖ్య చిన్నదియగునదియు స్పష్టమగుచున్నది. ఎట్లనగా పైఉదాహరణమునందు

రూ 1 యిని 3 సమభాగములుచేసి అందలి 2 భాగములును

4 సమభాగములుచేసి అందలి 3 భాగములును

5 సమభాగములుచేసి అందలి 4 భాగములును

6 సమభాగములుచేసి అందలి 5 భాగములును

క్రమముగ పైభిన్నసంఖ్యలచే బోధింపబడుచున్నవి యనుకొనుము.

అందు ఏసంఖ్యకంటె ఏసంఖ్య పెద్దది అనువిషయము సామాన్యముగగోచరించుట కష్టము. సమచ్ఛేదములనుగాచేసినపిమ్మట ప్రతిభిన్నసంఖ్యయును 60 సమవిభాగములుగచేసిన 1 రూపాయిలో నెన్నెన్నిభాగములైనదియు స్పష్టముగ తెలియుచున్నది. అందుచే న్యూనాధికభావము అతిసులభముగ గోచరించుచున్నది.

(5) సమచ్ఛేదములుగ చేయవలసిన సంఖ్యలు ఏజాతివియైనను ఆసంఖ్యలను భాగజాతివానిగను లఘుతమరూపముగను మార్చి సమచ్ఛేదములుగ చేయవలయును. ఈపద్ధతి ముందు వివరింపబడును.

అత్రోద్దేశకః.

రూపత్రయం పంచలవ స్త్రిభాగో యోగార్థమేతాన్వదతుల్యహారాన్
త్రిషష్టిభాగశ్చ చతుర్దశాంశ స్సమచ్ఛిదామిత్రవియోజనార్థం॥౬॥

న్యాసః $\frac{౩}{౧}$, $\frac{౧}{౫}$, $\frac{౧}{౩}$ జాతా స్సమచ్ఛేదాః $\frac{౪౫}{౧౫}$, $\frac{౩}{౧౫}$, $\frac{౫}{౧౫}$ యోగేజాతం $\frac{౫౩}{౧౫}$ అథ ద్వితీయోదాహరణార్థంన్యాసః $\frac{౧}{౬౩}$, $\frac{౧}{౧౪}$ సప్తాపవర్తితాభ్యాం హారాభ్యాం ౯, ౨ సంగుణితౌ సమచ్ఛేదౌ $\frac{౨}{౧౨౬}$, $\frac{౯}{౧౨౬}$ వియోగేజాతం $\frac{౭}{౧౨౬}$

ఇతి భాగజాతిః.

తా॥ మిత్రుడా! 3 రూపములు (1 టిని రూపము వ్యవహరించుట శాస్త్రసంప్రదాయము) 5వ వంతు 3వ వంతు వీటిని సంకలనము నిమిత్తము సమచ్ఛేదములుగ చెప్పుము.

63 వ వంతు 14 వ వంతు వీటిని వ్యవకలనము నిమిత్తము సమఛేదములుగ చెప్పుము. అని సమఛేదీకరణము యొక్క ఉపయోగము చెప్పబడెను.

(1) ఉదా:—$\frac{3}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}$ (2) ఉదా:—$\frac{1}{63}, \frac{1}{14}$

ఈ ఉదాహరణములు చేసి చూపబడినవి భిన్నసంకలన వ్యవకలనములందు చెప్పబడుచున్నవి. ఆయా శ్లోకములబట్టి వ్యాఖ్యాతలు ఇచట యోగ వియోగములను చేసి చూపియున్నారు,

ఉపపత్తి:—పూర్వ (70, 71) ప్రక్రియలచే నిచట ఉపపత్తి స్పష్టమగుచున్నది.

ప్రశ్నములు.

ఈక్రిందిపంక్తులందు ఒక్కొక్కపంక్తియందలి భిన్నాంకములను సమచ్ఛేదములుగజేసి అందు పెద్దచిన్న సంఖ్యలను ఏర్పరచుము.

(1) $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$

(2) $\frac{13}{15}$, $\frac{23}{25}$

(3) $\frac{3}{16}$, $\frac{10}{21}$, $\frac{31}{60}$

(4) $\frac{7}{12}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{4}{7}$

(5) $\frac{6}{2}$, $\frac{35}{7}$, $\frac{29}{7}$, $\frac{112}{4}$

(6) $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ ఈ సంఖ్యలను 36 హారముగల సంఖ్యలుగ మార్చుము.

ప్రభాగజాతి.

అథప్రభాగజాతౌ కరణసూత్రం వృత్తార్థమ్.

లవాలవఘ్నాశ్చ హరాహరఘ్నా భాగప్రభాగేషు సవర్ణనంస్యాత్.

టీ॥ లవాః = లవములు, లవఘ్నాః = లవములచే గుణింపబడినవియు, హరాః = హారములు, హరఘ్నాశ్చ = హారములచే గుణింపబడినవియును (అగుచో) భాగప్రభాగేషు = భాగములలో భాగములు చేయవలసినపుడు, సవర్ణనం = సవర్ణనము, స్యాత్ = అగును.

73. ప్ర. తా. ప్రభాగజాతి భిన్నమందు అనగా భాగములలో భాగములుగల భిన్నసంఖ్యలను భాగజాతిసంఖ్యగా మార్చవలసినపుడు ఆప్రభాగజాతి భిన్నసంఖ్యలన్నిటియొక్కయు అంశముల గుణనఫలమును అంశముగను హారముల గుణనఫలమును హారముగను వ్రాసినచో భాగజాతి భిన్నసంఖ్య గాగలదు.

ఉదా:—$\frac{3}{4}$ లో $\frac{5}{6}$ దీనిని భాగజాతిగ మార్చుము. అనగా సవర్ణనము చేయుము.

పైపద్ధతి ననుసరించి $\frac{3}{4}$ లో $\frac{5}{6} = \frac{3 \times 5}{4 \times 6} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$ ఇది భాగజాతి యొక్క లఘుతమరూపము.

ఉపపత్తి:—$\frac{3}{4}$ లో $\frac{5}{6}$ దీనియొక్క అర్థమేమనగా 1 టి అనగా ఒక రూపాయి అనుకొనుచో రూ 1 యిని 4 భాగములుచేసి అందు 3 భాగములను మొత్తము 6 భాగములుగా విభజించి అందు 5 భాగములు అని అగుచున్నది.

ఆకారణముచే $\frac{3}{4} \div 6 \times 5 = \frac{3}{4}$ లో $\frac{5}{6}$ అగుచున్నది.

$\frac{3}{4} \div 6$ అనగా 3 ను 4 చే భాగించి దానిని 6 చే భాగించుటకదా ?

భాజ్యమును ఒకభాజకముచే భాగించి ఆలబ్ధమును మరియొకభాజకము చే భాగింపవచ్చులబ్ధము, భాజ్యమును 1, 2 భాజకములయొక్క గుణనఫలముచే భాగింపవచ్చులబ్ధముతో సమమే యగుచున్నది, (20 పు 2 సి చూ)

$\therefore \frac{3}{4} \div 6 = 3 \div (4 \times 6) = \frac{3}{4 \times 6}$

(1) అను:—దీనింబట్టి భిన్నసంఖ్యను అభిన్నసంఖ్యచే భాగింపవలసినచో ఆఅభిన్నసంఖ్యచే భిన్నసంఖ్యయొక్క హారమును గుణింపవలయును అని తెలియుచున్నది.

పిమ్మట $\frac{3}{4\times 6} \times 5$ దీనియర్థము 1 టిని 24 చే భాగింపనగు 24 వ వంతులు 3 అనియు వాటిని 5 చే గుణింపవలయుననిగదా?

కావున అట్టిమూడు 24 వ వంతులను 5 చే గుణింపగా 24 వ వంతులు 15 అగుచున్నవి. $\therefore \frac{3}{4 \times 6} \times 5 = \frac{3 \times 5}{4 \times 6}$ అని సిద్ధించుచున్నది.

(2) అను:—దీనింబట్టి భిన్నసంఖ్యను అభిన్నసంఖ్యచే గుణింపవలసినచో అభిన్నసంఖ్యచే భిన్నసంఖ్యయొక్క లవమును గుణింపవలయునని తెలియుచున్నది.

ఇట్లు ప్రభాగజాతిసూత్ర ముపపన్నము అగుచున్నది.

ఇచట $\frac{3 \times 5}{4 \times 6} = \frac{15}{24}$ దీనిని 3 చే నపవర్తింప $\frac{5}{8}$ అగుచున్నది.

కాని తొలుత ఈ $\frac{3 \times 5}{4 \times 6}$ రూపమునందే 3 చే 6 అపవర్తింపబడుచున్నది గావున నట్లు అపవర్తించినపిమ్మట గుణనముచేసినచో లఘుతమరూపమే యగుచున్నది,

$$\therefore \frac{3 \times 5}{4 \times 6} = \frac{1 \times 5}{4 \times 2} = \frac{5}{4 \times 2} = \frac{5}{8}$$

(3)అను:— కావున ప్రభాగజాతియందు హారలవము లనేకములున్నచో ఒకఅడ్డగీటునకు పైభాగమున లవములనన్నిటిని మధ్యమధ్య గుణనచిహ్నముతో వ్రాసి క్రింద హారములనన్నిటిని మధ్యమధ్యగుణనగుర్తుతో వ్రాసి యథాసంభవముగ హారలవముల నపవర్తించి శేషించిన అంశములను పరస్పరము గుణింపవలయును. శేషించినహారములను పరస్పరము గుణింపవలయును అని తెలియుచున్నది.

(2) ఉదా:—$\frac{2}{3}$ లో $\frac{3}{4}$ లో $\frac{4}{5}$ లో $\frac{5}{6}$ లో $\frac{6}{7}$ లో $\frac{7}{8}$ ఎంతయగును ?

$\frac{2}{3}$ లో $\frac{3}{4}$ లో $\frac{4}{5}$ లో $\frac{5}{6}$ లో $\frac{5}{7}$ లో $\frac{7}{8} = \frac{2 \times \underline{3} \times \underline{4} \times \underline{5} \times \underline{6} \times \underline{7}}{\underline{3} \times \underline{4} \times \underline{5} \times \underline{6} \times \underline{7} \times 8}$

$= \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ అగును. ఇట్లంతటను గ్రహింపవలయును.

అత్రోద్దేశకః

ద్రమ్మార్ధత్రిలవద్వయస్య సుమతే పాదత్రయం యద్భవే
త్పంచాంశక షోడశాంశ చరణ స్సంప్రార్థితేనార్థినే,
దత్తో యేన వరాటకాః కతి కదర్యేణార్పితా స్తేన మే
బ్రూహి త్వం యదివేత్సి వత్స గణితే జాతిం ప్రభాగాభిధాం॥ ౨॥

న్యాసః $\frac{౧}{౧}$, $\frac{౧}{౨}$, $\frac{౨}{౩}$, $\frac{౩}{౪}$, $\frac{౧}{౫}$, $\frac{౧}{౧౬}$, $\frac{౧}{౪}$ సవర్ణితే

జాతం $\frac{౬}{౭౬౮౦}$ షడ్భిరపవర్తితేజాతం $\frac{౧}{౧౨౮౦}$ ఏకో దత్తో వరాటకః.

ఇతిప్రభాగజాతిః.

తా॥ బుద్ధిమంతుడా ! యాచింపబడిన ఏపురుషునిచే యాచకునికొరకు ద్రమ్మముయొక్క సగమునందు మూడవవంతులు రెండిటియొక్క నాలవవంతుల లోమూడు ఎంతయగునో ఆందలి 5 వ వంతులోని 16 వ వంతునందలి నాలవ వంతు ఇవ్వబడినదియో ఆలుబ్ధునిచే నెన్నిగవ్వ లియ్యబడినవి ? వత్సా ! నీవు గణితమునందు ప్రభాగము పేరుగల జాతి నెరింగితివేని నాకుచెప్పుము.

న్యాసము. $\frac{1}{1}$ లో $\frac{1}{2}$ లో $\frac{2}{3}$ లో $\frac{3}{4}$ లో $\frac{1}{5}$ లో $\frac{1}{16}$ లో $\frac{1}{4}$ ఎంతయగును?

ఇందు మొదటనున్న 1 టి ఒకద్రమ్మమగుచో తుదకు నిష్పన్నమైనసంఖ్య ఎట్టిది ?

పైపద్ధతిననుసరించి $\frac{1}{1}$ లో $\frac{1}{2}$ లో $\frac{2}{3}$ లో $\frac{3}{4}$ లో $\frac{1}{5}$ లో $\frac{1}{16}$ లో $\frac{1}{4}$ =
$\frac{1\times1\times2\times3\times1\times1\times1}{1\times2\times3\times4\times5\times16\times4} = \frac{1}{1280}$ ఒక బ్రిమ్మమునకు 1280 గవ్వలు కావున అందులో 1 టి యనగా ఒకగవ్వను దానమిచ్చెనని చెప్పవలయును.

ప్రశ్నములు.

(1) $\frac{1}{2}$ లో $\frac{3}{4}$ లో $\frac{4}{1}$ ఎంత? (3) 100 లో $\frac{1}{2}$ లో $\frac{1}{5}$ లో $\frac{1}{10}$ లో $\frac{1}{19}$ ఎంత
(2) $\frac{2}{3}$ లో $\frac{7}{9}$ లో $\frac{9}{61}$ ఎంత? (4) 1 లో $\frac{1}{2}$ లో $\frac{1}{4}$ లో $\frac{3}{8}$ లో $\frac{1}{3}$ ఎంత ?

(5) ఒకడు ఒకబిచ్చగానికి రూ 1 యిలో $\frac{1}{2}$ లో $\frac{1}{8}$ లో $\frac{2}{4}$ లో $\frac{1}{3}$లో $\frac{1}{2}$ ఎంతయగునో అంతయిచ్చెను. ఏమియిచ్చెను ?

భాగానుబంధ భాగాపవాహములు.

భాగానుబంధ భాగాపవాహయోః కరణసూత్రం అర్ధవృత్తమ్
ఛేదఘ్నరూపేషు లవాధనవర్ణ మేకస్యభాగా అధికోనకాశ్చేత్॥ ౨౮

టీ॥ (రూపేషు = పూర్ణాంకములయందు) ఏకస్య = ఒకటియొక్క (స్వాంశములుగావనుటకు ఈపదము) భాగాః = అంశములు, అధికోనకాశ్చేత్ = అధికములు అనగా కలుపబడినవిగాని ఊనములు అనగా తీసివేయబడినవిగాని (చేయదగినవి) యగుచో లవాః = అంశములు ఛేదఘ్నరూపేషు = హారముచే గుణింపబడినపూర్ణాంకములందు, ధనవర్ణం=ధనముగాని ఋణముగాని (కార్యాః= చేయదగినవి.)

74. ప్ర. మిశ్రభిన్నసంఖ్యను (భాగానుబంధ భాగాపవాహములను) భాగజాతిగ మార్చుట.

భాగానుబంధమునందు పూర్ణసంఖ్యను భిన్నసంఖ్యయొక్క హారముచే గుణించి ఆగుణనఫలమునందు భిన్నసంఖ్యయొక్క లవములనుకలిపి ఆగుణనఫలము లవముగాను హారము హారముగా వ్రాయుము.

భాగాపవాహమునందు పూర్ణసంఖ్యను భిన్నసంఖ్యాహారముచే గుణించి అందు భిన్నసంఖ్యాలవమును తీసివేసి శేషమును లవముగాను హారమును హారముగాను వ్రాయుము.

అత్రోద్దేశకః

సాంఘ్రిద్వయం త్రియంవ్యంఘ్రి కీదృగ్బ్రూహి సవర్ణితం।
జానాస్యంశానుబంధంచే త్తథా భాగాపవాహనం॥ ౮॥

న్యాసః ౨ $\frac{౧}{౪}$, 3 $\frac{౧}{౪}$ సవర్ణితేజాతం $\frac{౯}{౪}$, $\frac{౧౧}{౪}$

ఉదా:—తా॥ భాగానుబంధమును భాగాపవాహమును ఎరుంగుదువేని $\frac{1}{4}$ తో గలిపిన 2న్ను $\frac{1}{4}$ను తీసివేసిన 3 న్ను సవర్ణితమై ఎంతయగును? చెప్పుము.

న్యాసము $2 + \frac{1}{4} = \frac{2\times4+1}{4} = \frac{8+1}{4} = \frac{9}{4}$ అగుచున్నది.

ఇట్లు $3 - \frac{1}{4} = \frac{3\times4-1}{4} = \frac{12-1}{4} = \frac{11}{4}$ అగుచున్నది.

ఉపపత్తి:—$2+\frac{1}{4}$ ఇచట 2 పూర్ణాంకము. $\frac{1}{4}$ భిన్నసంఖ్య వీటియోగము చేయవలయును గాని $2 = \frac{2\times4}{4} = \frac{8}{4}$ (71 ప్ర చూ).

$\therefore 2+\frac{1}{4} = \frac{8}{4} + \frac{1}{4}$ ఇట్లు $3 - \frac{1}{4} = \frac{3\times4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{12}{4} - \frac{1}{4}$

ఇచట $\frac{8}{4}$ అనగా 1 టిని 4 చే భాగింపగానైన భాగములు 8 ఇట్లు $\frac{1}{4}$ అనగా 1 టిని 4 చే భాగింపనగు భాగము 1 టి కావున నాలవభాగములు 8టి యొక్కయు ఒకనాలవభాగముయొక్కయు కూడిక 9 నాలవభాగములు అగుననుట స్పష్టము.

$\therefore \frac{8}{4}+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}=2+\frac{1}{4}$ ఇట్లు $\frac{12}{4} - \frac{1}{4} = \frac{11}{4} = 3 - \frac{1}{4}$

దీనింబట్టియు (66 ప్ర) మునుబట్టియు స్థూలభిన్నసంఖ్యను భాగానుబంధముగా మార్చవలసినచో హారముచే లవమును భాగింపనగు లబ్ధమును పూర్ణాంకముగాను శేషమును లవముగాను హారమును హారముగాను వ్రాయవలయునని స్పష్టమగుచున్నది.

స్వాంశానుబంధస్వాంశాపవాహములు.

స్వాంశానుబంధ స్వాంశాపవాహయోః కరణసూత్రం వృత్తం
స్వాంశాధికోనః ఖలు యత్రతత్ర భాగానుబంధేచ లవాపవాహే।
తలస్థహారేణ హారం నిహన్యాత్స్వాంశాధికోనేనతు తేనభాగాన్॥ ౨౯

టీ॥ యత్ర = ఏ, భాగానుబంధే = భాగానుబంధమునం దైనను, లవాపవాహేచ=భాగాపవాహమం దైనను, (పూర్ణాంకముగాని భిన్నసంఖ్యగాని) స్వాంశాధికోనః (కర్తవ్యః) స్వాంశములచే కలుపబడినదిగాని తీసివేయబడినదిగాని చేయవగినదియో, తత్ర = అచట, తలస్థహారేణ = క్రింది భిన్నసంఖ్యయొక్క హారముచే, హారం = పైభిన్నసంఖ్యయొక్క హారమును, నిహన్యాత్ = గుణింపవలయును.

75. ప్ర. స్వాంశానుబంధ స్వాంశాపవాహములను భాగజాతిగ మార్చుట.

ఇచట ఒకసంఖ్యకు క్రిందుగ నొకసంఖ్యను వ్రాయవలయునని శ్రీభాస్కరాచార్యులవారి తాత్పర్యము.

పద్ధతి:—స్వాంశానుబంధమునందును స్వాంశాపవాహమునందును క్రమముగ రెండవభిన్నసంఖ్యయొక్క లవమును ఆసంఖ్యయొక్క హారమునందు కలుపుము. తీసివేయుము, ఆయోగముచేతను అంతరముచేతను మొదటిభిన్నసంఖ్యయొక్క లవమును గుణింపుము. ఇది భాగజాతియొక్క లవము కాగలదు. రెండు భిన్నసంఖ్యలయొక్కయు హారముల గుణనము హారము గాగలదు.

ఉదా:—(1) $\frac{3}{5} + \text{స్వ}\ \frac{4}{7}$ (2) $\frac{3}{5} — \text{స్వ}\ \frac{4}{7}$

ఈస్వాంశానుబంధ స్వాంశాపవాహములను భాగజాతిగ మార్చుము.

$$\frac{3}{5} + \text{స్వ}\ \frac{4}{7} = \frac{3 \times (7 + 4)}{5 \times 7} = \frac{3 \times 11}{5 \times 7} = \frac{33}{35}$$

ఇట్లు $\frac{3}{5} — \text{స్వ}\frac{4}{7} = \frac{3 \times (7 — 4)}{5 \times 7} = \frac{3 \times 3}{5 \times 7} = \frac{9}{35}$

ఉపపత్తి: $\frac{3}{5}$ స్వ $\frac{4}{7}$ అనగా $\frac{3}{5} + (\frac{3}{5}$ లో $\frac{4}{7})$ అగుచున్నది.

ఇట్లు $\frac{3}{5}$ — స్వ $\frac{4}{7}$ అనగా $\frac{3}{5}$ ($\frac{3}{5}$ లో $\frac{4}{7}$) అగుచున్నది.

$\therefore \frac{3}{5} + \text{స్వ}\ \frac{4}{7} = \frac{3}{5} + \frac{3}{5}$ లో $\frac{4}{7}) = \frac{3}{5} + (\frac{3 \times 4}{5 \times 7}) =$ (73 ప్ర చూ)

(71 ప్ర చే) $\frac{3}{5} = \frac{3 \times 7}{5 \times 7} \therefore \frac{3}{5} + \left(\frac{3 \times 5}{5 \times 7}\right) = \frac{3 \times 7}{5 \times 7} + \frac{3 \times 4}{5 \times 7} =$

$$\frac{21}{35} + \frac{12}{35} (1)$$

ఇట్లు $\frac{3}{5} — \text{స్వ}\frac{4}{7} = \frac{3 \times 7}{5 \times 7} — \frac{3 \times 4}{5 \times 7} = \frac{21}{35} — \frac{12}{37} (2)$

పై (1) (2) సంఖ్యలవలన 1 టిని 35 భాగములుచేసి అందలి 21 భాగములకును 1 టిని 35 భాగములుగ చేసి అందలి 12 భాగములకును యోగమున్ను అంతరమున్ను చేయవలయునని స్పష్టమగుచున్నది. కావున 35 భాగములలో 21 భాగములయొక్కయు 12 భాగములయొక్కయు యోగము 21 + 12 అగుచున్నది. అంతరము 21—12 అగుచున్నది (74 ప్ర ఉదా చూ)

కావున $\frac{21}{35} + \frac{12}{35} = \frac{21 + 12}{35}$ ఇట్లు $\frac{21}{35} — \frac{12}{35} = \frac{21 — 12}{35}$

పైని చూపబడిన స్వరూపవిన్యాసముచే

$\frac{3}{5} + \text{స్వ}\frac{4}{7} = \frac{21 + 12}{35} = \frac{(3 \times 7) + (3 \times 4)}{5 \times 7} = \frac{3 \times (7 + 4)}{5 \times 7}$ (18 ప్ర. చూ)

ఇట్లు $\frac{3}{5} — \text{స్వ}\ \frac{4}{7} = \frac{21 — 12}{35} = \frac{(3 \times 7) — (3 \times 4)}{5 \times 7}$

$= \frac{3 \times (7 — 4)}{5 \times 7}$ అగుచున్నది.

ఇందుతుదను సిద్ధించిన స్వరూపములబట్టి పైపద్ధతియొక్క ఉపపత్తి స్పష్టము.

అత్రోద్దేశకః

అంఘ్రిస్స్వత్ర్యంశయుక్త స్సనిజదలయుతః కీదృశః? కీదృశౌ ? ద్వౌ
త్ర్యంశౌ స్వాష్టాంశహీనౌ తదనుచరహితౌ స్వైస్త్రిభి స్సప్తభాగైః
అర్ధంస్వాష్టాంశహీనం నవభిరథయుతం సప్తమాంశై స్స్వకీయైః
కీదృ? క్స్యాద్బ్రూహివేత్సిత్వమిహయదిసఖేంశానుబంధాపవాహౌ॥ ౯

న్యాసః ౧/౪, ౧/౩, ౧/౨ | ౨/౩ · ౧/౮ · ౩/౭ | ౧/౨, ౧/౮, ౯/౭

సవర్ణితే జాతం క్రమేణ

౧/౨, ౧/౩, ౧/౧

ఇతిజాతి చతుష్టయమ్.

తా॥ (1) ఉదా:—నాలవవంతు తనలో మూడవవంతుచే కలుపబడినదై అదితనయొక్క సగభాగముతో కూడినదై ఎంతయగును? (2) ఉదా:— 2 మూడవవంతులు తనయొక్క 8 వ వంతుచే తీసివేయబడినవియైఅవితమయొక్క 3 ఏడవవంతులచే తీసివేయబడి యెంతయగును? (3) ఉదా:—ఒకరాశియొక్క సగభాగము తనయొక్క 8వ భాగముచే తీసివేయబడినదియై తనయొక్క 9 ఏడవ వంతులచే కలుపబడినదియై ఎంతయగును? మిత్రుడా నీవు ఈభాగానుబంధభాగాపవాహములను అనగా స్వాంశానుబంధ స్వాంశాపవాహములను ఎరింగితివేని చెప్పుము.

పూర్వులు ఋణచిహ్నముగ తీసివేయదగినసంఖ్యయందు శిరోభాగమున ఒక చుక్కనుంచెడివారు. అట్లు గ్రంథకర్త్రిన్యాసము చూపబడెను.

(1) ఉదా: $\frac{1}{4}+$ స్వ $\frac{1}{3}+$ స్వ $\frac{1}{2}= \frac{1}{4}\times\frac{3+1}{3}\times\frac{1+2}{2}$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{4}{3}\times\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$

(2) ఉదా: $\frac{2}{3}-$ స్వ $\frac{1}{8}-$ స్వ $\frac{3}{7}= \frac{2}{3}\times\frac{8-1}{8}\times\frac{7-3}{7}$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{7}{8}\times\frac{4}{7}=\frac{1}{3}$$

(3) ఉదా: $\frac{1}{2}-$ స్వ $\frac{1}{8}+$ స్వ $\frac{9}{7}=\frac{1}{2}\times\frac{8-1}{8}\times\frac{9+7}{7}$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{7}{8}\times\frac{16}{7}=\frac{16}{16}=\frac{1}{1}$$

ఇచట హారములకును లవములకును (73 ప్ర) నందలి ఉదాహరణములందు వలె యథాసంభవముగ నపవర్తనముచేసి అపవర్తితసంఖ్యలకు క్రింద గుర్తుగ ఒక చిన్నఅడ్డగీటు కొట్టివేసినట్లు చూపబడెను. అట్లుచేయుటచే గుణించుటయందు స్వల్పాంకములు మాత్రమే శేషించుటచే సౌకర్యము చాలగలదు

ఈ 1 భాగజాతి, 2 ప్రభాగజాతి, 3 భాగానుబంధభాగాపవాహములు, 4 స్వాంశానుబంధ స్వాంశాపవాహములు, జాతిచతుష్టయమని చెప్పబడుచున్నవి.

1. విశేషము:— ఈస్వాంశానుబంధము చక్రవృద్ధి (కాంపౌండువడ్డీ) ని సంబంధించిన ప్రశ్నములందు బాగుగ నుపయోగించును. అందు అసలు (మూలధనము) నకు మొదటిసంవత్సరమునకైన వృద్ధి (వడ్డీ) మూలధనమునందు ఎన్నవవంతు అగుచున్నదో ఆవంతుప్రకారము రెండవసంవత్సరమునందు మొదటిసంవత్సరపుమూలధనమున్ను, వృద్ధియున్ను కలిసిన నగుమూలధనమునకు వృద్ధియగుచున్నది. ఇట్లు ప్రతిసంవత్సరమును నియమితసంవత్సరమువరకు వృద్ధి మూలధనమున చేరుటచే నైన మొత్తపుమూలధనమునకు వృద్ధి అగుచున్నది. కావున నిది స్వాంశానుబంధముచే గణింపదగియున్నది. అందులకు మ. మ. పం. బాపుదేవశాస్త్రిగారి యుదాహరణము.

శ్లో॥ వర్షే శతస్య యది పంచ కలాంతరం స్యా న్మూలం ధనం
యుగసహస్రమితం తదా తు। వర్షేషు పంచసు గతేషు చ
చక్రవృద్ధ్యా కిం స్యాత్కలాంతరయుతం ప్రవదాశు విద్వన్॥

తా॥ సంవత్సరము 1టికి రూ 100టికి వడ్డీ రు 5 లు అగుచున్నది. ఆప్రకారము మూలధనము (అసలు) 4 వేలరూపాయిలు అగుచో 5 సంవత్సరము లగుసరికి చక్రవృద్ధిచే వృద్ధితోగూడిన మూలధన మెంతయగును? విద్వాంసుడా చెప్పుము.

ఇచట రు 100 లకు రు 5 లు వృద్ధిగాన మూలధనమునకు వృద్ధి 20వ వంతు అగుచున్నది అనగా ప్రతిసంవత్సరమున్ను మూలధనమునందు తనలోని $\frac{1}{20}$ వంతు ధనము గలియుచున్నది.

కావున $\frac{4000}{1}$ + స్వ $\frac{1}{20}$ + స్వ $\frac{1}{20}$ + స్వ $\frac{1}{20}$ + స్వ $\frac{1}{20}$ + స్వ $\frac{1}{20}$ అగుచున్నది.

పైసూత్రప్రకారము

$$\frac{4000}{1} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} = 5105\frac{101}{800}$$ అగుచున్నది.

అనగా మూలధనము 4000 అగుటచే 1105 $\frac{101}{800}$ వృద్ధి అయినది.

2. విశేషము:— ఇట్లు స్వాంశాపవాహమునుగూర్చియు ఉదాహరణమును జూపియున్నారు. ఒక పాలకుండయందు 16 శేర్లు పాలుగలవు. ఒక స్త్రీ ఆకుండనుండి శేరుపాలనుతీసుకొని తిరుగ శేరునీటిని ఆకుండయందుపోసెను. పిమ్మట రెండవస్త్రీయున్ను అట్టి నీటితోగలసినపాలనుండి 1 శేరుపాలను తీసికొని తిరుగ శేరుజలమును నందు పోసెను. ఇట్లు 3వ స్త్రీయును 4వ స్త్రీయును చేసిరి. అపుడు ఆకుండయందు నిజమైనపాలు ఎన్నిశేర్లు ఉండును ? ఈప్రశ్నము స్వాంశాపవాహములోనిది.

2,3,4, స్త్రీలు పాలనుతీసినను, అందు నిజమైనపాలు నిలవఉన్నపాలలో 16వ వంతుమాత్రమే గ్రహింపబడిన వని పైప్రశ్నము నాలోచించినచో తెలియగలదు. కావున స్వాంశాపవాహవిధానముచే సవర్ణించినచో పాలయొక్క పరిమితి తెలియగలదు. ఎట్లనగా:

$$\frac{16 \times 15 \times 15 \times 15 \times 15}{1 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16} = \frac{15 \times 15 \times 15 \times 15}{16 \times 16 \times 16} = \frac{50625}{4096} = 12\,\frac{1473}{4096}$$

ఇంత పరిమితమగు పాలు మిగిలినవి అని తెలియుచున్నది.

ప్రశ్నములు.

ఈక్రింది భిన్నసంఖ్యలను భాగజాతిలోనికి మార్పుము.

(1) $\frac{2}{3}$ — స్వ$\frac{1}{3}$ + స్వ $\frac{2}{5}$

(2) $\frac{3}{1}$+స్వ$\frac{1}{2}$+$\frac{1}{3}$ — $\frac{2}{3}$

(3) 10 — స్వ $\frac{9}{11}$+$\frac{1}{7}$—స్వ$\frac{1}{9}$

(4) $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{3}$ — స్వ $\frac{1}{6}$ + స్వ$\frac{1}{3}$

ఇదిజాతిచతుష్టయము.

అథ భిన్నసంకలితవ్యవకలితయోః కరణసూత్రం వృత్తార్థమ్.
యోగో௨న్తరంతుల్యహరాంశకానాంకల్ప్యోహరోరూప మహారరాశేః

టీ॥ తుల్యహరాంశకానాం = సమానహారముగల సంఖ్యలయొక్క లవములకు యోగః = సంకలనమున్ను అంతరం = వ్యవకలనమున్ను (అగును). అహారరాశేః = హారములేనిరాశికి రూపం = ఒకటి హారః = హారముగ కల్ప్యః = కల్పింపదగినది.

భిన్నసంకలన వ్యవకలనములు.

76. ప్ర. పద్ధతి:— అభీష్టసంఖ్యలను (72 ప్ర) చే సమచ్ఛేదములుగ చేయుము. అట్టి సమచ్ఛేదసంఖ్యలయొక్క లవముల యోగమును లవముగను ఆసమచ్ఛేదసంఖ్యలయొక్క సమమైనహారమును హారముగను వ్రాయుము. అది అభీష్టభిన్నసంఖ్యలయొక్క యోగము గాగలదు.

సమచ్ఛేదములైన అభీష్టసంఖ్యలయొక్క లవముల యంతరమును లవముగను సమచ్ఛేదరాసులయొక్క హారమును హారముగను వ్రాయుము. అది అభీష్టభిన్నసంఖ్యల అంతరము గాగలను.

అత్రోద్దేశకః

పంచాంశపాదత్రిలవార్ధషష్ఠా నేకీకృతాన్బ్రూహి సఖేమమైతాన్
ఏభిశ్చభాగై రథవర్జితానాం కింస్యాత్త్రయాణాం కథయాశువిద్వన్॥

న్యాసః $\frac{౧}{౫}$, $\frac{౧}{౪}$, $\frac{౧}{౩}$, $\frac{౧}{౨}$, $\frac{౧}{౬}$ ఐక్యే జాతం $\frac{౨౯}{౨౦}$

అథైతైర్వర్జితానాం త్రయాణాం శేషం $\frac{౩౧}{౨౦}$

తా. 5 వ వంతు 4 వ వంతు 3 వ వంతు సగము 6 వ వంతు వీటిని కలిపి చెప్పుము. వీటిని 3 లో తీసివేసినచో శేషమెంత యగునో చెప్పుము.

ఉదా: $\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$ ఎంత యగును ?

$3 - (\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6})$ ఎంత యగును ?

పైసంకలనోదాహరణమునందు భిన్నసంఖ్యలయొక్క హారములు 5, 4, 3, 2, 6 వీటియొక్క లఘుతమాపవర్త్యమును తెలిసికొని దానింబట్టి భిన్నసంఖ్యలను సమచ్ఛేదములుగ చేయవలయును. కావున హారముల లఘుతమాపవర్త్యము. 60 (65 ప్ర చూ).

దానింబట్టి సమచ్ఛేదములైన భిన్నసంఖ్యలు (72 ప్రి 2 చే)

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$$

$$=\frac{12}{60}+\frac{15}{60}+\frac{20}{60}+\frac{30}{60}+\frac{10}{60}=\frac{87}{60}$$ యోగము.

ఇట్లు $3-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)$

$$=3-\left(\frac{87}{60}\right)=\frac{180}{60}-\frac{87}{60}=\frac{93}{60}$$ అంతరము

ఉపపత్తి:—భిన్నసంఖ్యలను సమచ్ఛేదములుగ చేయుటవలన ఆసంఖ్యలయొక్క అంశములన్నియు సజాతీయములు (ఒకజాతిలోనివి) అగుచున్నవి. ఎట్లనగా $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ ఇచట 1 టి అనగా ఒకరూపాయి అనుకొనుము. అపుడు $\frac{1}{2}$ ఇది అర్ధరూపాయిని బోధించును. $\frac{1}{4}$ ఇది పావలాను బోధించును. ఇపుడీరెండిటికిని యోగము. ఒకఅర్ధరూపాయికిని ఒకపావలాకును యోగము. 2 అని చేయగూడదు. అర్ధరూపాయియును పావలాయును సజాతీయములుగావు కావున సజాతీయములుగ మార్చవలయును. అప్పుడే న్యూనాధికభావమున్ను స్పష్టముగా గలదు. (72 ప్రి 3చూ) కావున సమచ్ఛేదములుగా చేయుచో $\frac{2}{4}+\frac{1}{4}$ అగుచున్నది ఇపుడు $\frac{2}{4}$ అనగా రూపాయిలో 4 వంతులలో రెండువంతులు అనగా రెండుపావలాలు అనియు $\frac{1}{4}$ అనగా ఒకపావలా అనియు తెలియుచున్నది. కావున పావలాయను ఒక జాతిలోనివగుటచే రెండుసంఖ్యలును సజాతీయములగుచున్నవి. అపుడు 2 పావలాలనున్ను 1 పావలానున్ను కలిపినచో 3 పావలాలు అగుచున్నవి. పావలా రూపాయిలో నాలవవంతే యగుచున్నది. కావున పైసంఖ్యలయొక్క యోగమును $\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ అని (67 ప్రి వైపరీత్యముచే) వ్రాయవలయును. ఇది సమచ్ఛేదములుగ చేసి అంశములను కలిపి అంశముగను సమచ్ఛేదాంశములయొక్క హారమును హారముగను వ్రాయుటయే యగుచున్నది. ఈప్రకారము అనేక భిన్నసంఖ్యలయందును గ్రహింపదగియున్నది.

ఇట్లు సంకలనమువలె వ్యవకలనమున్ను సజాతీయములకే గాని విజాతీయములకు కూడదు కావున అంశములయొక్క అంతరము అంశముగను సమమైనహారమును హారముగను వ్రాసినచో అంతరము అగుచున్నది.

విశేషము:— ఉద్దిష్టసంఖ్యలలో అభిన్నసంఖ్యలును భాగానుబంధములున్ను గలిగినచో ఆయా అభిన్నసంఖ్యలనన్నిటినికలిపి భాగజాతిసంఖ్యలనన్నిటిని వేరుగగలిపి ఆరెండిటికిని (భాగానుబంధప్రకారము) యోగముచేసినచో ఉద్దిష్టసంఖ్యల యోగమగుచున్నది.

ఉదా: $2\frac{1}{4}+3\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ వీటియోగమెంత ?

ఇచట అభిన్నసంఖ్యలయోగము $2+3=5$ భాగజాతిసంఖ్యలయోగము $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{13}{12}=1\frac{1}{12}$ ఇపుడీరెండిటియొక్కయు యోగము $6\frac{1}{12}=\frac{73}{12}$ అగుచున్నది.

ప్రశ్నములు.

ఈక్రిందిసంఖ్యలను మొత్తముచేసి చెప్పుము.

(1) $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}$

(2) $\frac{1}{21}+\frac{5}{77}+\frac{4}{35}+\frac{3}{4}$

(3) $3\frac{1}{2}+2\frac{1}{3}-1\frac{1}{4}$

(4) $7\frac{1}{4}-4\frac{1}{5}-2\frac{1}{3}$

(5) $\frac{3}{4}+\frac{4}{5}-\frac{5}{6}+\frac{2}{3}$

(6) $\left(\frac{1}{2}\right.$ లో $\left.\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}\right.$ లో $\left.\frac{4}{5}\right)$

(7) $\dfrac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)-\text{స్వ}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)}{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\text{స్వ}\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{6}\right)}$

(8) $\dfrac{\frac{3}{4}-\text{స్వ}\,\frac{1}{5}+\text{స్వ}\,\frac{3}{7}}{\frac{5}{6}-\text{స్వ}\,\frac{3}{7}+\text{స్వ}\,\frac{2}{5}}$

భిన్నగుణనము.

అథభిన్నగుణనే కరణసూత్రం వృత్తార్ధమ్.

అంశాహతిశ్ఛేదవధేనభక్తా లబ్ధం విభిన్నేగుణనే ఫలం స్యాత్ ॥ ౪౬ ॥

టీ. అంశాహతిః=లవములయొక్క గుణనము, ఛేదవధేన = హారములయొక్క గుణనముచే, భక్తా = భాగింపబడినదగుచో, లబ్ధం =పొందబడినసంఖ్య, విభిన్నే = భిన్నాంకసంబంధమైన, గుణనే = గుణమునందు, ఫలం = గుణనఫలమై, స్యాత్ = అగును.

77. ప్రి. భిన్నగుణనమునందు గుణ్యగుణకరూపసంఖ్యలు రెండైనను అనేకములైనను లవములగుణనఫలము లవమగును. హారములగుణనఫలము హారమగును. అట్టిగుణనఫలమును లఘుతమరూపమునకుమార్చి అది స్థూలభిన్నసంఖ్యయగుచో భాగానుబంధముగ మార్చుము.

లేక ప్రతిభాగజాతియందువలె ఏసంఖ్యలయొక్కగాని హారములకును, లవములకును రెండిటికి అపవర్తనము సంభవించునపుడు అపవర్తించి ఆ అపవర్తితసంఖ్యల యొక్క గుణనమును పైప్రకారము చేయుము.

అత్రోద్దేశకః

సత్ర్యంశరూపద్వితయేన నిఘ్నం ససప్తమాంశద్వితయం భవేత్కిం।
అర్ధం త్రిభాగేన హతంచ విద్ధి దక్షోసి భిన్నే గుణనావిధౌ చేత్॥ ౧౧॥

న్యాసః ౨ ౧/౩, ౨ ౧/౭ సవర్ణితే జాతం ౭/౩ , ౧౫/౭ గుణితే జాతం ౫/౧

న్యాసః ౧/౨ , ౧/౩ గుణితే జాతం ౧/౬

ఇతిభిన్నగుణనం

తా॥ భిన్నగుణనవిధానమునందు సమర్థుడవగుదేని $2\frac{1}{3}$ చే $2\frac{1}{7}$ గుణింపబడినదై యెంతయగును? $\frac{1}{3}$ చే $\frac{1}{2}$ గుణింపబడినదై ఎంతయగును ? చెప్పుము.

(1) ఉదా: $2\frac{1}{3} \times 2\frac{1}{7}$ ఇచట గుణ్యగుణకములు భాగానుబంధములుగనున్నవి గాన సవర్ణించి గుణింపవలయును. సవర్ణింప $\frac{7}{3} \times \frac{15}{7} = \frac{7 \times 15}{3 \times 7} = \frac{105}{21} = \frac{5}{1}$

(2) ఉదా: $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1 \times 1}{2 \times 3} = \frac{1}{6}$ అగుచున్నది.

ఇందు మొదటిఉదాహరణమునందు గుణించి అపవర్తించుటకంటె మొదట నపవర్తించి గుణించుట సులభముగానుండును. అదిఇట్లు చేయవలయును.

$\frac{7 \times 15}{3 \times 7} = \frac{15}{3} = 5$ అగుచున్నది. లేక $\frac{7 \times 15}{3 \times 7} = 5$ అనియు వ్రాయవచ్చును.

మరియొక ఉదాహరణము:—

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{6} \times \frac{9}{10} = \frac{2 \times 9}{6 \times 10} = \frac{3}{2 \times 5} = \frac{3}{10}$$ అగుచున్నది.

ఇచట లవములందుగల యంకెయే హారములందును గలిగినచో నాయంకెలు కొట్టివేయబడినవి. లవములచే హారములుగాని, హారములచే లవములుగాని అపవర్తింపబడుచో ఆఅపవర్తనాంకములు కొట్టివేయబడినవి. హారలవములు రెండును ఒకఅంకెచే నపవర్తింపబడునో అట్లు అపవర్తింపనగులబ్ధములు ఆస్థానములందు వ్రాయబడినవి.

ఉపపత్తి:— గుణ్యము $\frac{5}{6}$ గుణకము $\frac{2}{3}$ అనుకొనుము.

$\frac{2}{3}$ అనగా $2 \div 3$ ఇందు భాజ్యము 2 భాజకము 3 లబ్ధము $\frac{2}{3}$

కావున $\frac{5}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{6} \times 2 \div 3$ (16 ప్రి. 3 అను చూ).

మరియు $\frac{2}{3}$ కంటె 2 మూడురెట్లు అధికమైయున్నది. కావున $\frac{5}{6} \times \frac{2}{3}$ దీనికంటె $\frac{5}{6} \times 2$ ఈసంఖ్య 3 రెట్లు అధికమగుచున్నది. కావున $\frac{5}{6} \times 2$ దీనిని 3చే భాగింప $\frac{5}{6} \times \frac{2}{3}$ దీనితో సమమగుచున్నది $\frac{5}{6}$ ను 2 చే గుణించుటయనగా $\frac{5}{6} \times 2 = \frac{5 \times 2}{6}$ (73 ప్రి 2 అను చూ)

$\frac{5 \times 2}{6}$ దీనిని 3 చే భాగించుట యనగా $\frac{5 \times 2}{6} \div 3 = \frac{5 \times 2}{6 \times 3}$ అగుచున్నది. (73 ప్రి 1 అను చూ).

అనగా $\frac{5}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{5 \times 2}{6 \times 3}$ అయ్యెను. ఇపుడు లవముచే లవమును, హారముచే హారమునున్ను గుణించుటయే అగుచున్నది. ఇట్లు అనేకసంఖ్యలున్నపుడును గ్రహింపవలయును.

విశేషము: $\frac{5}{6} \times 2 = \frac{5 \times 2}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$ లేక $\frac{5 \times 2}{6} = \frac{5 \times 1}{3} = \frac{5}{3}$

(1) అను దీనింబట్టి అభిన్నసంఖ్యచే భిన్నసంఖ్యను గుణింపవలసినపుడు సంభవముగలయపుడు ఆఅభిన్నసంఖ్యచే భిన్నసంఖ్యయొక్క హారము నపవర్తింపవలయునని స్పష్టమగుచున్నది.

ప్రశ్నములు.

ఈక్రిదిసంఖ్యల గుణనఫలమును దెల్పుము.

(1) $\frac{11}{12} \times \frac{7}{9}$ (4) ($\frac{8}{9}$ —స్వ $\frac{5}{14}$) $\times \frac{7}{12}$

(2) $1\frac{1}{5} \times 2\frac{1}{2}$ (5) ($\frac{1}{4}$ లో $\frac{5}{8}$ లో $\frac{3}{10}$) $\times$ ($\frac{1}{2}$ + స్వ $\frac{1}{7}$ — స్వ $\frac{1}{4}$)

(3) ($\frac{3}{7}$ + స్వ $\frac{5}{9}$) $\times \frac{15}{16}$ (6) $\frac{35}{12} \times \frac{42}{9} \times \frac{58}{7} \times \frac{12}{5}$

భిన్నభాగహారము.

అథ భిన్నభాగహారే కరణసూత్రం వృత్తార్ధం

ఛేదంలవంచపరివర్త్యహారస్య శేషఃకార్యోథభాగహారణేగుణనావిధిశ్చ

టీ॥ భాగహారణే = భాగహారమునందు, హారస్య = భాజకముయొక్క, ఛేదం = హారమునున్ను, లవంచ = లవమునున్ను, పరివర్త్య = తలక్రిందుగమార్చి, అథ = పిమ్మట, శేషః = మిగిలిన, గుణనావిధిశ్చ = గుణనవిధానమున్ను, కార్యః = చేయదగినది.

78. ప్ర. భాజకముయొక్క హారలవములను తలక్రిందుగ చేయుము పిమ్మట భాజ్యమును ఆతలక్రిందగు భాజకముచే గుణింపుము. ఆగుణనఫలము లబ్ధముగు చున్నది.

అత్రోద్దేశకః

సత్ర్యంశరూపద్వితయేన పంచ త్ర్యంశేనషష్ఠం వద మే విభజ్య।
దర్భీయగర్భాగ్రసుతీక్ష్ణబుద్ధి శ్చేదస్తి తే భిన్నహృతౌ సమర్థా॥౧౭॥

న్యాసః ౭ $\frac{౧}{౩}$, $\frac{౫}{౧}$ ॥ $\frac{౧}{౩}$, $\frac{౧}{౬}$

యథోక్తకరణేన జాతం $\frac{౧౫}{౭}$, $\frac{౧}{౨}$

ఇతిభిన్నభాగహారః.

తా॥ నీకు భిన్నభాగహారణమునందు సమర్థమైనదియు, దర్భసంబంధమగు గర్భము (నూతనముగా మువ్వలోనుండి బయలుదేరెడిదర్భ) యొక్క అగ్రమువలె తీక్ష్ణమైనదియునగు బుద్ధి గలిగియున్నచో 5 ను $2\frac{1}{3}$ చేతనున్ను $\frac{1}{6}$ ను $\frac{1}{3}$ చేతనున్ను భాగించి నాకు చెప్పుము.

న్యాసము (1) ఉదా: $\frac{5}{1} \div 2\frac{1}{3} = \frac{5}{1} \div \frac{7}{3} = \frac{5}{1} \times \frac{3}{7} = \frac{15}{7} = 2\frac{1}{7}$ ఇదిలబ్ధము

(2) ఉదా: $\frac{1}{6} \div \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \times \frac{3}{1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{2}$ ఇదిలబ్ధము.

ఉపపత్తి: $\frac{3}{5}$ ను $\frac{2}{7}$ చే భాగింపవలయు ననుకొనుము.

$\frac{2}{7}$ అనగా $2 \div 7$ అనిగదా! అనగా 2 ను 7 చే భాగింపగావగు లబ్ధముచే $\frac{3}{5}$ ను భాగింపవలయును అని తెలియుచున్నది. కావున $\frac{3}{5} \div 2$ ఇది, $\frac{3}{5} \div \frac{2}{7}$ దీనికంటె 7 రెట్లు అధికమగుచున్నది.

కావున $\frac{3}{5}$ దీనిని 2 చే భాగించి 7 చే గుణింపవగు గుణనఫలము $\frac{3}{5} \div \frac{2}{7}$ దీనితో సమమగునని తెలియుచున్నది. కాని $\frac{3}{5} \div 2 = \frac{3}{5 \times 2}$ (73 ప్ర 1 అను చూ.) అట్లుగనే $\frac{3}{5 \times 2} \times 7 = \frac{3 \times 7}{5 \times 2}$ (73 ప్ర 2 అను చూ)

$$\therefore \frac{3}{5} \div \frac{2}{7} = \frac{3}{5} \times \frac{7}{2}$$

ఇట్లు భాగహారపద్ధతియొక్క ఉపపత్తిస్పష్టముగ తెలియుచున్నది.

ప్రశ్నములు.

ఈక్రిందిలెక్కలను చేయుము.

(1) $\frac{2}{15} \div \frac{26}{35}$ (4) ($\frac{1}{2}$ లో $\frac{1}{4}$) $\div$ ($\frac{1}{4}$ లో $\frac{1}{8}$)

(2) $\frac{6}{7} \div \frac{}{7}$ (5) ($\frac{1}{2}$ + స్వ $\frac{1}{3}$) $\div$ ($\frac{1}{3}$ — స్వ $\frac{1}{5}$)

(3) $50\frac{1}{3} \div 8\frac{1}{4}$ (6) ($\frac{3}{4} \div \frac{5}{4}$) $\div$ ($\frac{2}{3} \div \frac{4}{3}$)

భిన్నఘాతమూలములు.

అథభిన్నవర్గాదౌ కరణసూత్రం వృత్తార్ధమ్.

వర్గేకృతీ ఘనవిధౌతుఘనౌ విధేయౌ హారాంశయో రథపదేచ పదప్రసిద్ధ్యై॥ ౧౮॥

టీ॥ వర్గే = వర్గముచేయవలసినపుడు, హారాంశయోః = హారలవములకు, కృతీ = వర్గములు, విధేయే = చేయదగినవి, ఘనవిధౌతు = ఘనముచేయవలసినచో, ఘనౌవిధేయౌ = ఘనములుచేయదగినవి. అథ = పిమ్మట, పదప్రసిద్ధ్యైచ = మూలముసిద్ధించుటకొరకును, పదే = మూలములు, విధేయే = చేయదగినవి.

79. ప్రి. (1) భిన్నసంఖ్యలకు వర్గము ఘనము మొదలగు ఘాతములు చేయవలసినచో హారలవములకు ప్రత్యేకముగ ఆయాఘాతములను చేయవలయును అది భిన్నసంఖ్యయొక్క అభీష్టఘాతము గాగలదు

(2) ఘాతమూలము గావలసినచో హారలవములకు ప్రత్యేకము అభీష్టఘాతమూలమును గనుంగొనవలయును. అది భిన్నసంఖ్యకు అభీష్టఘాతమూలము అగును.

అత్రోద్దేశకః

సార్ధత్రయాణాం కథయాశువర్గం వర్గాత్తతో వర్గపదంచమిత్ర।
ఘనంచ మూలంచ ఘనాత్తతోపి జానాసిచేద్వర్గఘనౌవిభిన్నే॥౧౩॥

న్యాసః ౩ $\frac{౧}{౨}$ ఛేదఘ్నరూపేష్వితికృతే జాతం $\frac{౭}{౨}$ అస్యవర్గః $\frac{౪౯}{౪}$

మూలం $\frac{౭}{౨}$, ఘనః $\frac{౩౪౩}{౮}$ అస్యమూలం $\frac{౭}{౨}$

ఇతిభిన్నపరికర్మాష్టకం

తా॥ మిత్రుడా! భిన్నములగు వర్గఘనముల నెరింగితివేని సగముతోగూడిన 3 నకు అనగా $3\frac{1}{2}$ కు శీఘ్రముగవర్గమును ఆవర్గమువలన వర్గమూలమునున్ను చెప్పుము. ఘనమును ఆఘనమువలన ఘనమూలమునున్ను చెప్పుము

(1) ఉదా: $3\frac{1}{2}$ దీనికి వర్గమెంత ? ఘనమెంత ?

(2) ఉదా: ఆవర్గఘనములకు వర్గమూలఘనమూలములెవ్వి ?

$3\frac{1}{2}$ భాగానుబంధముచే $\frac{7}{2}$ దీనికి వర్గము కావలయును.

$$\left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{7^2}{2^2} = \frac{49}{4} \text{ అగుచున్నది.}$$

$$\text{ఇట్లు } \left(\frac{7}{2}\right)^3 = \frac{7^3}{2^3} = \frac{343}{8} \text{ అగుచున్నది.}$$

(2) $\sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{4}} = \frac{7}{2}$ ఇట్లు $\sqrt[3]{\frac{343}{8}} = \frac{\sqrt[3]{343}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{7}{2}$ అగుచున్నది.

ఉపపత్తి: $\frac{7}{2}$ దీనికి వర్గము గావలయును.

$$\left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} = \frac{7 \times 7}{2 \times 2} = \frac{7^2}{2^2}$$ (28 ప్రి. 77 ప. చూ)

$$\text{ఇట్లు } \left(\frac{7}{3}\right)^3 = \frac{7}{3} \times \frac{7}{3} \times \frac{7}{3} = \frac{7 \times 7 \times 7}{3 \times 3 \times 3} = \frac{7^3}{3^3}$$

ఇట్లేఘాతమైనను గ్రహింపవలయును. దీనికి తలక్రిందగుపద్ధతిచే ఘాతమూలానయనమున్ను ఉపపన్నమగుచున్నది.

80 ప్రి. ఈఘాతమూలములను సంబంధించిన సిద్ధాంతములు.

(1) దృఢములైన హారలవములుగల భిన్నసంఖ్యయొక్క వర్గము ఘనము మొదలగు ఏఘాతమైనను భిన్నసంఖ్యగనే యుండును

యుక్తి:— సాధారణాపవర్తాంకముల నెరుంగుటకు మార్గములు చెప్పబడినవి (24 ప్రి. చూ)

అట్లు $\frac{56}{32}$ వీటికి అపవర్తము నెరుంగుచో $\frac{56}{32} = \frac{2 \times 28}{2 \times 16} = \frac{2 \times 2 \times 14}{2 \times 2 \times 8}$

$= \frac{2 \times 2 \times 2 \times 7}{2 \times 2 \times 2 \times 4}$ అనగా 56, 32 ఈసంఖ్యలకు 2, 4, 8 ఈఅంకములు అపవర్తాంకములని తెలియుచున్నది దీనింబట్టి అపవర్తము నెరుంగుటయనగా, అపవర్త్యసంఖ్యలయందు గుణ్యగుణకఖండములను విభజించుట యని స్పష్టమగుచున్నది. అట్లు ఏహారలవములకు అపవర్తము గావలయునో ఆహారలవములు ఒకేగుణకముచే ఒకానొకరెండుసంఖ్యలను గుణింపనగు గుణనఫలములైనపుడే అపవర్తాంకము సంభవించుననియు గ్రహింపదగియున్నది. కావున అట్టిగుణకవిశేషములేనిచో అపవర్తాంకము గలుగదనుట స్పష్టము. అట్టి హారలవములే దృఢములు. హారలవములు పరస్పరము దృఢములైనపుడు ఆభిన్నసంఖ్యను వర్గించినపుడు హారమునకు హారమున్ను లవమునకు లవమున్ను గుణకములగునుగాని రెండిటికిని ఒకేగుణకము

కలుగదు. కావున అపవర్తింపబడవు. కనుకనే దృఢహారలవములుగల భిన్న సంఖ్యయొక్క వర్గఘనాదిఘాతములందు హారముచే లవము నిశ్శేషముగ భాగింపబడదు. అనగా అభిన్నసంఖ్యయొక్క వర్గఘనాదిఘాతము భిన్నముగనే యుండును. అభిన్నము కానేరదు ("భిన్నాంకస్యపరో భిన్నత్వంనజహాతి" కమలాకరుడు.)

(2) అవర్గరాసులకు సరియగు (అంకాత్మక) వర్గమూలము లేదు (27 ప్రి 3 చూ). అనగా వాటియొక్క వర్గమూలము అభిన్నసంఖ్యయుగాదు. భిన్నసంఖ్యయుగాదు.

ఎట్లనగా:—5నకు వర్గమూలము అభిన్నసంఖ్యయు లేదు. భిన్నసంఖ్యయు లేదు. 2 నిరగ్రమూలము అగుచున్నది. (27 ప్రి 3 చూ)

యుక్తి: 4నకు 2 వర్గమూలము 9 కి 3 వర్గమూలము. కావున 4 నకును 9 కిని మధ్యనుండు 5 నకు 2 కును 3 కును మధ్యనుండు ఒకానొకభిన్నసంఖ్య వర్గమూలము కావలసియున్నది. కాని "భిన్నాంకవర్గము భిన్నమేయగు" అను పైసిద్ధాంతమునబట్టి 2 కంటె పెద్దదియును 3 కంటె చిన్నదియును అగు భిన్నసంఖ్యయొక్క వర్గము భిన్నరాశిగనే యుండును గాని అభిన్నమగు 5 గ నుండదు. కావున ఇట్టిరాసులకు సరియగు మూలసంఖ్య లేనే లేదు. కాని ఇట్టి అవర్గరాసులకు—ఏసంఖ్యయొక్క వర్గము అవర్గరాశికి సమీపమున నుండునో ఆసంఖ్య మూలముగ గ్రహింపబడుచున్నది. ఇది ఆసన్నమూలమని చెప్పబడుచున్నది. (అంకాత్మకమగు మూలమైనను వ్యక్తము కాదు కాని అదిగూఢముగగలదని "అవర్గతో మూల మివాస్తిగూఢం" అని ఆత్మపదార్థముతో పోల్చియున్నారు. రేఖాత్మకమగు మూలము వ్యక్తముగనే గలుగుచున్నది.)

ఆసన్నమూలము

81. ప్రి. (1) అవర్గసంఖ్యయగు అభిన్నసంఖ్యకైనను భిన్నసంఖ్యకైనను ఆసన్నమూలము నెరుంగుటకు భాస్కరాచార్యులవారు క్షేత్రవ్యవహారమున (వర్ణే మహత్యేష్టేన...నికటంభవేత్) పద్ధతిని చెప్పియున్నారు. (152 ప్రి చూ.) ఆపద్ధతి యిచట చూపబడుచున్నది.

(2) ఆ అవర్గసంఖ్య భిన్నసంఖ్యయగుచో ఆసంఖ్యయొక్క లవమును హారముచే గుణించి దానిని అభీష్టమగు ఒకానొక పెద్దవర్గసంఖ్యచే గుణించి దానియొక్క మూలమును లవముగను ఆ పెద్దవర్గసంఖ్యయొక్క మూలముచే గుణింపబడిన పూర్వహారమును హారముగను వ్రాయుము. ఇది ఇష్టభిన్నసంఖ్యయొక్క ఆసన్నమూలమగును.

(3) అవర్గసంఖ్య అభిన్నసంఖ్య (పూర్ణసంఖ్య)యగుచో ఆసంఖ్యను ఇష్టమగు ఒకానొక పెద్దవర్గసంఖ్యచే గుణించి దానిమూలమును లవముగను గుణకమగు పెద్దవర్గసంఖ్యయొక్క మూలమును హారముగను వ్రాయును. ఇది అభిన్నవర్గసంఖ్యయొక్క ఆసన్నమూలమగును

(1) ఉదా: $\frac{2}{3}$ దీనియొక్క ఆసన్నమూలము కావలయును.

లవమును హారముచే గుణింప $3 \times 2 = 6$ దీనిని ఒకానొక పెద్దవర్గసంఖ్యచే గుణింపవలయును. అట్టివర్గసంఖ్యను దేనినైనను గ్రహించుటకంటె 100 10000 మొదలగు దశశతాదిసంఖ్యలవర్గములను గ్రహించుటచే విశేషశ్రమయుండదు కావున ఇచట 100 యొక్క వర్గము 10000 గుణకముగ గ్రహింపబడెను. దీనిచే 6 ను గుణింపవలయును $6 \times 10000 = 60000$ దీనియొక్క నిరగ్రమూలము.

```
       ) 60000 ( 244
         4
   44  ) 200 (
         176
   484 ) 2400 (
         1936
శేషము     464
```

ఇచట నిరగ్రమూలము 244 అగుచున్నది శేషము 464 అగుచున్నది. ఇది అప్పటిభాజ్యమునకు స్వల్పాంతరములో సమముగనున్నది. కావున 245 ఆసన్నమూలము అనుకొనవచ్చును. (దీనినిగూర్చి ముందువ్రాయబడును.) ఇపుడు వర్గసంఖ్యయొక్క మూలము 100 చే పూర్వహారమును గుణింప 100×3 హారమగుచున్నది.

∴ $\frac{2}{3}$ యొక్క ఆసన్నమూలము $\frac{245}{300}$ అగుచున్నది.

(2) ఉదా: 5 ఈ అభిన్నసంఖ్యకు ఆసన్నమూలము చూపబడుచున్నది

అభీష్టవర్గసంఖ్య $1000^2 = 1000000$ కనుక 5×1000000

```
      ) 5000000 ( 2236
         4
 42 )   100 (
         84
443 )   1600 (
        1329
4466 )  27100 (
        26796
శేషము    304
```

ఇచట వర్గమూలము 2236 అగుచున్నది. శేషము 304 వచ్చినది. ఈ శేషమును విడచుటచే మూలము ఆసన్నమూలముగాగలదు. కాని ఈ మూలసంఖ్య 2236 కల్పితవర్గసంఖ్యయొక్క మూలమగు. 1000 సహస్రముచే భాగింపవలయును. అట్లు భాగింప 5 యొక్క ఆసన్న మూలమగును

$\therefore$ 5 నకు $\frac{2236}{1000} = 2\frac{236}{1000}$ ఆసన్నమూలమగుచున్నది.

ఉపపత్తి: $\frac{2}{3}$ దీనికి ఆసన్నవర్గమూలము కావలయును.

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 3}{3 \times 3} = \frac{2 \times 3 \times 100^2}{3^2 \times 100^2} = \frac{60000}{3^2 \times 100^2} \text{ (70 పు చూ)}$$

$$\therefore \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{60000}{3^2 \times 100^2}} = \frac{\sqrt{60000}}{\sqrt{3^2 \times 100^2}} = \frac{\sqrt{60000}}{3 \times 100} = \frac{244}{300} \text{ శేషము } 464$$

పద్ధతి పైప్రకారము ముపపన్నమగుచున్నది. శేషమును విడిచిపెట్టుటచే ఆసన్నమూలమగుచున్నది. ఎట్లనగా శేషము 464 ను విడిచిపెట్టగా మిగిలిన సంఖ్య $\frac{244}{300}$. దీనియొక్క వర్గము $\frac{59536}{90000}$ దీనిని వర్గసంఖ్యయగు $\frac{2}{3}$ లో తీసివేయగా అంతరము అతిస్వల్పముగ మిగులుచున్నది. ఎట్లనగా :—

$$\frac{2}{3} - \frac{59536}{90000} = \frac{60000 - 59536}{90000} = \frac{464}{90000} = \frac{29}{5625} \text{ ఇది తేడా వచ్చుచున్నది.}$$

అనగా 1టిని 5625 భాగములు చేయగానగు భాగములలో 29 భాగములు ఎంతయగునో అంత తేడావచ్చుచున్నది గాన ఇది స్వల్పాంతరమగుటచే ఆసన్నమగు మూలమని చెప్పబడినది.

(3) ఈ $\frac{2}{3}$ నకు ఇదివరలో 100 యొక్క వర్గము గ్రహించి ఉదాహరణము చూపబడెను. ఆప్రకారము 1000 వేయియొక్క వర్గమును గ్రహించి ఆసన్నమూలమును గనుగొనుచో —

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6000000}}{3 \times 1000} = \frac{2449}{3000} \text{ శేషము 2399 అగుచున్నది } \quad \text{అనగా}$$

$$\frac{2}{3} - \left(\frac{2449}{3000}\right)^2 = \frac{2}{3} - \frac{5997601}{9000000} = \frac{2399}{9000000} \text{ ఇది తేడావచ్చుచున్నది. శతము}$$

100 యొక్క వర్గము గ్రహించినయెడల $\frac{29}{5625}$ వచ్చుచున్నది. సహస్రవర్గము గ్రహించుటచే $\frac{2399}{9000000}$ తేడావచ్చుచున్నది. ఈరెండిటిలోను $\frac{2399}{9000000}$ ఈ సంఖ్యయే చిన్నదియగుచున్నది. సమచ్ఛేదములుగ చేసినచో నీయంతరము బాగుగ స్పష్టముగాగలదు

$$\frac{29}{5625} > \frac{2399}{9000000} = \frac{46400}{9000000} > \frac{2399}{9000000}$$

(4) కావున గుణకము పెద్దసంఖ్యయైనకొలదియు మూలము సూక్ష్మమగుచున్నది.

(5) $\frac{2}{3}$ ఈసంఖ్యయొక్క ఆసన్నమూలానయనమందు 100 యొక్క వర్గమును గ్రహించినపుడు శేషము 464 మిగిలినది. ఇది అప్పటిభాజ్యము 484 నకు ఇంచుమించుగ సరిపడియున్నది. కావున దానిని విడచుటకంటె మూలమునందు ఈశేషమునిమిత్తము 1 టి కలుపుకొన్నచో సూక్ష్మముగ నుండును. అనగా అసవరకు లభించిన మూలము 244 ఇందు 1 టిని కలుప 245. దీనిని మూలాంకమును కొనుటచే మూలము అత్యాసన్నమగును. ఎట్లనగా:—

$$\frac{2}{3} - \left(\frac{244}{300}\right)^2 = 464 \text{ శేషము. ఇట్లు } \frac{2}{3} - \left(\frac{245}{300}\right)^2 = \frac{60000}{90000} - \frac{60025}{90000}$$

మనము లబ్ధమును అధికముగా గ్రహించితిమిగాన తీసివేయబడదు.

ఆకారణముచే వ్యతిరేకముగా (తలక్రిందుగ) తీసివేయగా $\frac{25}{90000}$ అంతర మగుచు న్నది ఇందు $\frac{464}{90000}$ ఈసంఖ్యను విడచుటకంటె $\frac{25}{90000}$ ఈసంఖ్యను అధికముగా గ్రహించుట యుక్తము గావున శేషము తత్కాలభాజ్యములోని సగముకంటె అధికముగనున్నచో లబ్ధమునందు 1 టి అధికముగా గ్రహించుటయు సగముకంటె తక్కువయున్నచో విడచుటయు చేయదగియున్నది. (దీనినే గణితమునందు "అర్ధాధికే రూపగ్రహణం" అని వాడుచున్నారు).

(6) ఇట్లు ఆసన్నమూలమును గనుంగొనునపుడు శతసహస్రాదిసంఖ్యల యొక్క వర్గములచే గుణించి మూలమును గనుగొని ఆమూలమును శతసహస్రాది సంఖ్యలచే భాగించుటకుమారుగ ఆ అవర్గసంఖ్యకు నిరగ్రమూలమును గనుగొని ఆ శేషమునకు రెండేసిసున్నలను కుడిప్రక్కను వ్రాయుచు అభీష్టములగు మూలాంకములు లభించువరకు క్రియను చేసి తుదను ఆమూలసంఖ్యకు హారమును వ్రాయునపుడు మూలానయనమందు ఎన్నిసున్నలు వ్రాయబడినవో అందు సగము సున్నలను 1 టికి కుడిప్రక్కనువ్రాసి దానిని హారముగ గ్రహించినను ఆ ఆసన్నమూలమే అగును

5 (2236
4
42) 100
84
443) 1600 (
1329
4466) 27100
26796
శేషము 304

ఎట్లనగా పూర్వమందుచూపిన 2 వ ఉదాహరణమునందు 5 యొక్క ఆసన్నమూలానయనమునే చూతము. మూడుపర్యాయములు రెండేసిసున్నలను అనగా 6 సున్నలను వ్రాసి మూలమును గనుగొంటిమి గాన ఇందలిమూలసంఖ్యకు 1000 హారముగ వ్రాయవలయును అని స్పష్టముగ తెలియుచున్నది అట్లు చేయగా $\frac{2236}{1000} = 2\frac{236}{1000}$ పూర్వమూలమే లభించినది. ఇట్లెన్నిసార్లు చేసినను నిశ్శేషముగాక కొంతవరకు చేసినప్పటినుండియు పూర్వమందు లభించిన అంకములు ఆక్రమముగనే తిరుగతిరుగ లబ్ధముగ రాగలవు. కావుననే ఇది ఆసన్నమూలమే యగును

(7) ఇట్లు హారమును వ్రాయుటమాని హారమునందు ఎన్నిసున్నలుగలవో అన్నిఅంకెలకు పూర్వమందు మూలాంకసంఖ్యయందు ఒకబిందుగుర్తును వ్రాసినను ఆఅర్థము బోధింపబడుచున్నది. ఎట్లనగా పైమూలసంఖ్య $\frac{2236}{1000}$ దీనిని 2·236 ఇట్లు వ్రాయవచ్చును. 2 దీనికి తరువాత బిందువును వ్రాయుటచే బిందువునకు ఎడమప్రక్కగలసంఖ్య 2 పూర్ణసంఖ్య అనియు కుడిప్రక్క వ్రాయబడిన సంఖ్యయందెన్ని అంకములుగలవో అన్నిసున్నలు 1టికి కుడిప్రక్కను వ్రాయగా నైనసంఖ్య హారముగాగల భిన్నసంఖ్యయనియు తెలియదగియున్నది. అనగా బిందువునకు తరువాత 3 అంకెలుగల సంఖ్యగాన దానికి హారము 1000 సహస్రము అగుచున్నది. ఇట్లు మూలమునుగనుగొనునపుడే ఏసంఖ్యకు ఆసన్నమూలము కావలయునో ఆసంఖ్యయందలి అంకములన్నియు ముగించునప్పటికి లభించిన మూలసంఖ్యకు కుడిప్రక్కను బిందువునువ్రాసి దానికి కుడిప్రక్కను శేషముతో సున్నలను చేర్చుటచే లభించు మూలాంకములవ్రాసి పైప్రకారము అర్థమును గ్రహింపవచ్చును. పైఉదాహరణమునందు ఇది 5 వర్గమూలముకావలసినసంఖ్య దీనికి 2 మూలము గ్రహించుటతోడనే మూలసంఖ్యయందలి అంకములు ముగించినవి. గావున రెండునకుతరువాత బిందువును వ్రాసి దానికి కుడిప్రక్కను సున్నలనుచేర్చుటచే లభించిన అంకములు వ్రాయవచ్చును ఈబిందువే దశాంశచిహ్నమని చెప్పబడుచున్నది. ఇది ముందువివరింపబడును.

(8) ఇట్లు అభిన్నసంఖ్యలయొక్క ఆసన్నమూలమునందు శతసహస్రాది సంఖ్యలు హారములగుటచే బిందువునువ్రాసి ఆఅర్థమును బోధింపవచ్చును. కాని భిన్నసంఖ్యయొక్క ఆసన్నమూలమునందు పూర్వహారముచే గుణింపబడిన శతసహస్రాది సంఖ్యలు హారములగుటచే బిందువును వ్రాసి హారమును విడచి ఆఅర్థమును తెలియచేయుటకు వీలులేదు. కావున ఆహారలవములను పూర్వహారముచే నపవర్తింప కేవల శతసహస్రాదిసంఖ్యలే హారములు గాగలవు. అపుడు బిందువును వ్రాయవచ్చును. ఎట్లనగా $\frac{2}{3}$ యొక్క ఆసన్నమూలము $\frac{245}{300}$ లేక $\frac{2449}{3000}$ ఈసంఖ్యలను పూర్వహారమగు 3 చే నపవర్తింప $\frac{245}{300} = \frac{82}{100} = .82$ లేక

$\frac{2449}{3000} = \frac{816}{1000} = .816$ ఇచట అపవర్తించుటలో స్వల్పాంతరము విడువబడెను.

పైన చూపినట్లు $\frac{2449}{3000}$కి మారుగ $\frac{245}{300}$ గ్రహించినట్లు 3 చే హారలవము లను భాగించుటలో హారము నిశ్శేషమగునట్లు లవము నిశ్శేషము కాకపోవుటచే అర్ధాధిక శేషమునుబట్టి లబ్ధమున 1 టి అధికముగ గ్రహింపబడెను అర్ధాల్పశేషము విడువబడెను.

(9) అట్లు హారలవములను పూర్వహారముచే నపవర్తించునపుడు శేషము మిగులుచున్నది. గావున హారలవములు రెండిటిని దశశతసహస్రాదిసంఖ్యలలో అభీష్టమగు ఒకేసంఖ్యచే గుణించి అపవర్తించినను శేషము మిగులును. కాని ఆలబ్ధము పూర్వలబ్ధముకంటె సూక్ష్మమై యుండగలదు $\frac{245}{300}$ దీనిని 3 చే నపవర్తింప 81 లబ్ధము, 2 శేషము. కావున హారలవముల రెండిటిని సహస్రముచే గుణింప $\frac{245000}{300000}$ దీనిని 3 చే నపవర్తింప .81666 వచ్చుచున్నది. ఇట్లు ఎంతసంఖ్యచే గుణించి అపవర్తించినను ఆఅంకమే తిరిగితిరిగి (ఆవృత్తిగ) వచ్చుచున్నది. కాని ఇది 81 కంటెను .82 కంటెను ఆసన్నమగుసంఖ్య అగుచున్నది. (ఇది యావర్త దశాంశములోనిది)

ఆసన్న మానములు—వితతభిన్న సంఖ్య.

82. ప్ర. (1) పైయుదాహరణములందు $\frac{2449}{3000}$ లేక $\frac{245}{300}$ ఇట్లు చూపబడినది.

అనగా $\frac{2449}{3000}$ దీనికి $\frac{245}{300}$ ఈసంఖ్య ఆసన్నముగా నున్నదని చెప్పబడినది. అట్లు హారలవములు రెండును ఒకేసంఖ్యచే నపవర్తింపబడనియపుడు విశేషస్థానముల నాక్రమించిన హారలవములుగల సంఖ్యకుమారుగ దానికి ఆసన్నమగు స్వల్పస్థానముల నాక్రమించిన హారలవములుగల సంఖ్యను గ్రహించినచో గణితశ్రమ తగ్గుచున్నది. అట్లు అభీష్టభిన్నసంఖ్యకు ఆసన్నమగుసంఖ్యలు అనేకములగుచున్నవి.

అవియన్నియు 'ఆసన్నమానములు' అని చెప్పబడును. అందు ఒకదానికంటె నొకటి ఆసన్నతరమగునట్లు ఆసన్నమానముల నెఱుంగుటకుపద్ధతి చెప్పబడుచున్నది.

(2) అందులకై తొలుత భిన్నసంఖ్యను వితతము చేయవలయును. (వితతము = విప్పబడినది)

వితతము చేయుట:—ఆభాగజాతిసంఖ్య సూక్ష్మభిన్నమగుచో హారలవముల రెండిటిని లవసంఖ్యచే భాగింపుము. స్థూలభిన్నమగుచో మొదటిదానిని భాగానుబంధముగ మార్చి పిమ్మట అందలిభిన్నసంఖ్యయొక్క హారలవములను లవసంఖ్యచే భాగింపుము. అపుడు లవస్థానమున 1 టి యుండును. హారస్థానమున స్థూలభిన్నసంఖ్యయుండును. తిరుగ ఆస్థూలభిన్నసంఖ్యను భాగానుబంధముగమార్చి అందలిభిన్నసంఖ్యయొక్క హారలవములను లవముచే భాగింపుము. ఇట్లుహారస్థానమున అభిన్నసంఖ్యయుండువరకును తిరుగతిరుగ చేయుము. ఇట్లుచేయుటలో భాగానుబంధమునందు పూర్ణసంఖ్యకును భిన్నసంఖ్యకును మధ్యనొందు ధనచిహ్నమును వ్రాయుము. ఇట్లు చేయగావచ్చిన భిన్నసంఖ్యాసమూహము వితతభిన్నమని చెప్పబడుచున్నది.

(3) అందు రెండు మూడు మొదలగు లబ్ధములను గ్రహించుచేనగు వితతభిన్నసఖ్యలను క్రిందినుండి వేర్వేరుగ సవర్ణించుటచేనైన భిన్నసఖ్యలు అభీష్టభిన్నసంఖ్యకు ఆసన్నమానములు అగుచున్నవి.

(1) ఉదా: $\frac{69}{151}$ దీనికి వితతభిన్నసంఖ్య? ఆసన్నమానములు?

$$\frac{69}{151}=\frac{1}{\frac{151}{69}}=\frac{1}{2+\frac{13}{69}}=\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{69}{13}}}=\frac{1}{2+\frac{1}{5+\frac{4}{13}}}$$

$$=\frac{1}{2+\frac{1}{5+\frac{1}{\frac{13}{4}}}}=\frac{1}{2+\frac{1}{5+\frac{1}{3+\frac{1}{4}}}}$$

ఈ తుదిరూపమే వితతభిన్నసంఖ్య.

దీనిని ఒకపంక్తియందును వ్రాయవచ్చును.

$\frac{1}{2+}\frac{1}{5+}\frac{1}{3+}\frac{1}{4}$ ఇట్లు వ్రాయుటయు వాడుకలోనున్నది

ఇందు మొదటిలబ్ధము $\frac{1}{2}$ ఇది యొక ఆసన్నమానము. ఇట్లు రెండవలబ్ధము

వరకును $\frac{1}{2+}\frac{1}{5}$ గ్రహించి సవర్ణింపగా $\frac{1}{2+}\frac{1}{5}=\frac{1}{\frac{11}{5}}=\frac{5}{11}$ ఇది రెండవ ఆసన్నమానము.

ఇట్లు $\frac{1}{2+}\frac{1}{5+}\frac{1}{3}=\frac{1}{2+}\frac{3}{16}=\frac{16}{35}=$ ఇది మూడవ ఆసన్నమానము

ఇట్లు $\frac{1}{2+}\frac{1}{5+}\frac{1}{3+}\frac{1}{4}=\frac{1}{2+}\frac{1}{5+}\frac{4}{13}=\frac{1}{2+}\frac{13}{69}=\frac{69}{151}$ నాలవ మానము.

(2) ఉదా: $\frac{138}{137}$ దీనియొక్క వితతరూపము. ఆసన్నమానములు.

ఇందు మొదటభాగానుబంధముగా మార్చుటచే పూర్ణాంకము వచ్చుచున్నది. పిమ్మట పూర్వోదాహరణప్రకారమే చేయవలెను. అట్లుచేయగా వితతరూప పంక్తి $1+\frac{1}{3+}\frac{1}{2+}\frac{1}{4+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2}$ ఇందు మొదటిలబ్ధము 1, రెండవ లబ్ధము 3, దానిచే వితతభిన్నసంఖ్య $1+\frac{1}{3}$ మూడవలబ్ధము 2, దానిచే వితత భిన్నసంఖ్య $1+\frac{1}{3+}\frac{1}{2}$ ఇట్లు 6వితతభిన్నసంఖ్యలగుచున్నవి. వీటిని వేర్వేరుగ సవర్ణింపగా క్రమముగ ఆసన్నమానములు. $1, \frac{4}{3}, \frac{9}{7}, \frac{40}{31}, \frac{49}{38}, \frac{138}{107}$

ఇందు మొదటిసంఖ్య 1 టి. ఇది ఉద్దిష్టసంఖ్య $\frac{138}{107}$ కంటె తక్కువగనున్నది. 2వ సంఖ్య $\frac{4}{3}$ ఇది ఉద్దిష్టసంఖ్యకంటె అధికముగానున్నది ఇట్లు చూడగా 1, 3, 5 ఇత్యాది బేసిసంఖ్యలు ఉద్దిష్టసంఖ్యకంటె చిన్నవియును 2, 4, 6 ఇత్యాది సరిసంఖ్యలు ఉద్దిష్టసంఖ్యకంటె పెద్దవియును కాగలవు అనియు తెలియుచున్నది.

83. ప్ర. ఆసన్నమానానయనమునుగూర్చి సులభమగు సామాన్యపద్ధతి.

అభీష్టభాగజాతి భిన్నసంఖ్యయొక్క హారలవములను పరస్పరము భాగింపగా (మహత్తమాపవర్తనమందువలె) వచ్చు లబ్ధములు. వితతరూపమునందు భాగానుబంధ సంబంధమగు పూర్ణాంకములగును. వాటిచే వితతరూపమును తెలియవచ్చును ఈపరస్పరభజనముచే సూక్ష్మభిన్నమునందు తొలుత సున్నవచ్చును. ఆలబ్ధములచే వితతరూపములను క్రమముగ సవర్ణించుటచేనగు ఆసన్నమానముల నెరుంగవచ్చును. ఎట్లనగా:—ఆలబ్ధములను ఒకపంక్తిగ వ్రాయుము. మొదటి లబ్ధము మొదటి ఆసన్నమానము. కావున దానికి హారముగ 1 టిని కల్పించి మొదటిలబ్ధము క్రిందుగ వ్రాయుము. రెండవలబ్ధముచే మొదటిఆసన్నమానము యొక్క లవమును గుణించి అందు ఒకటినికలిపి దీనిని లవముగను రెండవలబ్ధమును హారముగను వ్రాయుము. ఇది రెండవఆసన్నమానము. దీనిని రెండవలబ్ధము క్రిందుగ వ్రాయుము. పిమ్మట ఆయాలబ్ధములచే క్రమముగా దానికి పూర్వమందున్న ఆసన్నమానముయొక్క హారలవముల గుణించి అందు అంతకుపూర్వమందున్న ఆసన్నమానముయొక్క హారలవములను గలుపుము. వీటిని ఆయాలబ్ధములకు క్రిందుగ వ్రాయుచుండుము. ఇట్లు తుదవరకును చేయుము. క్రమముగ నివి ఆసన్నమానములగును. తుదను తుదిలబ్ధముక్రింద వ్రాయబడినసంఖ్యగ అభీష్టసంఖ్యయే యుండును.

```
107 ) 138 ( 1
      107
      ---
       31 ) 107 ( 3
             93
            ---
             14 ) 31 ( 2
                  28
                  --
                   3 ) 14 ( 4
                       12
                       --
                        2 ) 3 ( 1
                            2
                            -
                            1 ) 2 ( 2
                                2
                                -
                                .
```

పైనచూపబడిన (2)ఉదాహరణము $\frac{138}{107}$ వీటిని పరస్పరము భాగింప లబ్ధములు 1, 3, 2, 4, 1, 2 వీటిచేవితతరూపము $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}$ ఇట్లు లబ్ధములచే నాసన్నమానములు. లబ్ధములు 1, 3, 2, 4, 1, 2 ఆసన్నమానములు $\frac{1}{1}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{9}{7}$, $\frac{40}{31}$, $\frac{49}{38}$, $\frac{138}{107}$ ఇందు మొదటిలబ్ధము 1గాన $\frac{1}{1}$ ఇదియే మొదటి ఆసన్నమానము. రెండవలబ్ధము 3 చే మొదటి ఆసన్నమానముయొక్క హారలవములను గుణించి అందులవమునందు 1 టిని కలుపగా $\frac{4}{3}$ రెండవఆసన్నమానము. మూడవలబ్ధము 2 చే రెండవఆసన్నమానము $\frac{4}{3}$ నందలి హారలవములను గుణింప $\frac{8}{6}$ ఇందు మొదటిహారలవములగలుప $\frac{9}{7}$ ఇది మూడవ ఆసన్నమానము. ఇట్లు నాలవలబ్ధము 4 చే 3 వ ఆసన్నమాన హారలవములను గుణింప $\frac{36}{28}$ ఇందు అంతకుపూర్వమందున్న 2 వ ఆసన్నమానహారలవములను కలుప $\frac{36+4}{28+3}=\frac{40}{31}$

ఇట్లు ఆసన్నమానములు క్రమముగ చూపబడినవి. ఇట్లు $\frac{69}{151}$ దీనియొక్క పరస్పర భజనమువలన లబ్ధములు 0, 2, 5, 3, 4

ఆసన్నమానములు $\frac{0}{1}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{5}{11}$ $\frac{16}{35}$ $\frac{69}{15}$

84. ప్రి. (1) ఇట్లు అవర్గసంఖ్యకు ఆసన్నమూలమును కనుగొనకుండగనే దానియొక్క వర్గమూలమును వితతభిన్నసంఖ్యగ మార్చవచ్చును. దానిచేనైనఆసన్నమానములు ఆ అవర్గసంఖ్యయొక్క బహువిధాసన్న మూలములగుచున్నవి. అదియు కొంత ఇచట చూపబడుచున్నది.

(2) ఉద్దిష్టమగు అవర్గసంఖ్య ప్రకృతియని చెప్పబడుచున్నది. దానియొక్క నిరగ్రమూలము మొదటిలబ్ధము.

(3) ప్రకృతియొక్క వర్గమూలమునకును నిరగ్రమూలమునకును ఐన అంతరమును ప్రకృతిమూలముయొక్కయు నిరగ్రమూలముయొక్కయు యోగముచే గుణింపుము. ఆయోగముచేతనే భాగింపుము. ఇట్లు గుణనభజనములచే సిద్ధించిన సంఖ్యయొక్క హారలవములను లవముచే భాగింపుము. లవస్థానమున 1 టి యుండును. హారస్థానమున భిన్నసంఖ్య యుండును. ఈభిన్నసంఖ్యను భాగానుబంధముగ మార్చుము. ఇపు డిందలి పూర్ణసంఖ్య రెండవలబ్ధ మగును.

(4) ఆభాగానుబంధమందలి భిన్నసంఖ్యయందు ప్రకృతివర్గమూలముయొక్కయు మరియొకసంఖ్యయొక్కయు అంతరము లవముగ నుండును. హారస్థానమున వేరుసంఖ్యయుండును. ఈభిన్నసంఖ్యను ప్రకృతివర్గమూలముయొక్కయు లవస్థానమునందలి మరియొక అంకెయొక్కయు యోగముచే గుణింపుము. దానిచేతనే భాగింపుము. పిమ్మట సిద్ధించిన హారలవములను లవస్థానాంకముచే భాగింపుము. పూర్వప్రకారము హారస్థానమునందలి భిన్నసంఖ్యను భాగానుబంధముగ మార్చుము. ఇందలి పూర్ణాంకము మూడవలబ్ధము. ఇట్లు ఈక్రియను కొంతవరకు (ఇష్టమువచ్చినంతవరకు) చేయుము. ఆలబ్ధములచే వితతభిన్నసంఖ్యయు ఆసన్నమానములును తెలియగలవు

(వాస్తవముచే ప్రకృతికి అంకాత్మకవర్గమూలము లభింపదుగావున ప్రకృతి వర్గమూలముతో చేయవలసిన యోగాదులను ఆయాగుర్తులనువ్రాసి ఉపాయాంతరముచే చేయుము)

(1) ఉదా: 28 యొక్క వర్గమూలమునకువితతభిన్నసంఖ్య కావలయును.

28. ప్రకృతి. దీని నిరగ్రమూలము 5. ఇది మొదటి లబ్ధము.

$$\sqrt{28}-5=\frac{\sqrt{28}-5}{1}=\frac{(\sqrt{28}-5)\times(\sqrt{28}+5)}{\sqrt{28}+5}=\text{(7 ప్ర 7 సి చూ)}$$

$$=\frac{\sqrt{28}^2-5^2}{\sqrt{28}+5}\text{(33 ప్రి 2 అను చూ)}=\frac{28-25}{\sqrt{28}+5}=\frac{3}{\sqrt{28}+5}=\frac{1}{\frac{\sqrt{28}+5}{3}}$$

ఈ $\frac{\sqrt{28}+5}{3}$ సంఖ్యను భాగానుబంధముగ మార్చవలయును. 28 యొక్క నిరగ్రమూలము 5 నందు 5 ను గలుప 10 అగుచున్నది. దీనిని 3 చే భాగించినచో లబ్ధము 3 రాగలదు. అట్లు లబ్ధమును గమనించి ఈక్రిందిప్రకారము యోగ వియోగముల చేయవలయును.

$$\frac{\sqrt{28}+5}{3}=3+\frac{\sqrt{28}+5}{3}-3=3+\frac{\sqrt{28}+5-9}{3}=3+\frac{\sqrt{28}-4}{3}$$

ఇచట 3 రెండవలబ్ధము అగుచున్నది. పిమ్మట తిరుగ పైప్రకారము

$$\frac{\sqrt{28}-4}{3}=\frac{(\sqrt{28}-4)\times(\sqrt{28}+4)}{3\times(\sqrt{28}+4)}=\frac{28-16}{3\times(\sqrt{28}-4}=\frac{4}{\sqrt{28}+4}$$

$=\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{28}+4}{4}}$ ఇచట 28 యొక్క నిరగ్రమూలము 5 నందు 4 ను కలిపి 4 చే భాగింప 2 లబ్ధము రాగలదు.

కావున $\frac{\sqrt{28}+4}{4}=2+\frac{\sqrt{28}+4-8}{4}=2+\frac{\sqrt{28}-4}{4}$ ∴ 2 మూడవలబ్ధము.

ఇట్లు $\frac{\sqrt{28}-4}{4}=\frac{(\sqrt{28}-4)\times(\sqrt{28}+4)}{4\times(\sqrt{28}+4}=\frac{28-16}{4\times(\sqrt{28}-4}=\frac{3}{\sqrt{28}+4}$

$=\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{28}+4}{3}}$ ఇందు $\frac{\sqrt{28}+4}{3}=3+\frac{\sqrt{28}+4-9}{3}=3+\frac{\sqrt{28}-5}{3}$ కావున 3 నాలవలబ్ధము.

ఇట్లు $\frac{\sqrt{28}-5}{3}=\frac{(\sqrt{28}-5)\times(\sqrt{28}+5)}{3\times(\sqrt{28}+5)}=\frac{28-25}{3\times(\sqrt{28}+5)}$

$\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{28}+5}{1}}$ ఇచట $\frac{\sqrt{28}+5}{1}=10+\frac{\sqrt{28}+5-10}{1}=10+\frac{\sqrt{28}-5}{1}$ అగుచున్నది. ఇందు 10 ఐదవలబ్ధము.

ఇందు $\frac{\sqrt{28}-5}{1}$ ఈసంఖ్య తొలుతటిసంఖ్యయైనది కావున ఇట్టిస్వరూపము నుండి వచ్చిన రెండవలబ్ధము మొదలగు లబ్ధములే తిరిగి క్రమముగ రాగలవు. వాటినే వితతరూపము.

$$\sqrt{28}=5+\frac{1}{3+}\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\frac{1}{10+}\frac{1}{3+}\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\frac{1}{10}$$ ఇత్యా.

కావున లబ్ధములు 5 3 2 10 3 2 ఇత్యా.

ఆసన్నమానములు $\frac{5}{1}$, $\frac{16}{3}$, $\frac{37}{7}$, $\frac{127}{24}$, $\frac{1307}{247}$. $\frac{4048}{765}$ ఇత్యా.

ఉద్దిష్టసంఖ్య అవర్గసంఖ్య కావున దానికి ఆసన్నమూలమేకానిఅంకాత్మక మగు వాస్తవమూలములేకుండుటచే ఎంతవరకు గణితముచేసినను లబ్ధములకు సమాప్తి యుండదు. అట్లు వితతరూపమునకును సమాప్తియుండదు. ఇట్టి వితతభిన్నము ఆవర్తవితతభిన్నమని చెప్పబడును. అందు ఏలబ్ధములు తిరుగతిరుగ వచ్చునో ఆలబ్ధముల సముదాయము ఆవర్తనమని చెప్పబడును.

85. ప్ర) ఇట్లు అవర్గరాశియగు భిన్నసంఖ్యను వితతరూప ఆసన్నమానముల నెరుంగుటకై లబ్ధముల నెరుంగవచ్చును

అందు హారలవములను హారముచే గుణించి లవమును గుణింపగానగు సంఖ్య ప్రకృతిగను, హారమును హారముచే గుణింపగానగు సంఖ్యయొక్క మూలము (హారము) భాజకముగను భావించి క్రియను పూర్వప్రకారమే చేయవలయును.

ఎట్లనగా: $\sqrt{\frac{5}{3}}$ దీనికి ఆసన్నమానమునకై లబ్ధము లెవ్వియగును?

$\frac{5}{3}=\frac{5\times3}{3\times3}$ కావున $\sqrt{\frac{5}{3}}=\frac{\sqrt{15}}{3}$ (70 ప్ర. 79 ప్ర 2 చూ)

పై (84 ప్ర) పద్ధతిప్రకారము

$$\sqrt{\tfrac{5}{3}}=\frac{\sqrt{15}}{3}=\frac{3+\sqrt{15}-3}{3}=1+\frac{\sqrt{15}-3}{3}=1+\frac{6}{3\sqrt{15}+3}$$

$$=1+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{15}+3}{2}}$$

ఇందు $\frac{\sqrt{15}+3}{2}=3+\frac{\sqrt{15}-3}{2}=3+\frac{6}{2(\sqrt{15}+3)}=3+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{15}+3}{3}}$

అట్లుగనే అందలి $\frac{\sqrt{15}+3}{3}=2+\frac{\sqrt{15}-3}{3}=2+\frac{6}{(\sqrt{15}+3)3}$

$=2+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{15}+3}{2}}$ ఇత్యాది

దీనిహారమందలి భిన్నసంఖ్య పైమొదటిపంక్తియందలి తుదిరూపమునందలి హారమగుచున్నది. గాన తిరుగతిరుగ క్రమముగ రెండుమూడు పంక్తులయందలి 3, 2 ఈలబ్ధములే ఆవృత్తిగ రాగలవు. కావున లబ్ధములు 1, 3, 2, 3, 2 ఇత్యా.

$$\sqrt{\tfrac{5}{3}} = 1 + \frac{1}{3+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{2}$$ ఇత్యా

ఆసన్నమానములు $\frac{1}{1}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{9}{7}$, $\frac{31}{24}$, $\frac{71}{55}$ ఇత్యా...

దశాంశగణితము.

86. ప్ర. (1) ఇదివరలో (81 ప్ర. 7, 8, 9 చూ.) దశ శత సహస్రాది సంఖ్యలు హారముగాగల భిన్నసంఖ్యలను హారమునువిడచి పూర్ణాంకముయొక్కయు లవముయొక్కయు నడుమ బిందుగుర్తును వ్రాయుటచే ఆఅర్థమే వచ్చునని చెప్పబడినది. దానిచే $2\frac{236}{1000} = 2.236$ ఇట్లు $\frac{816}{1000} = .816$ ఇట్లు $\frac{82}{100} = .82$ అగుచున్నది.

ఇట్లు వ్రాయబడిన సంఖ్యలలో బిందువు దశాంశచిహ్నమని చెప్పబడును. ఈదశాంశచిహ్నముచే వ్రాయబడిన సంఖ్యలు దశాంశసంఖ్యలు. వాటింగూర్చియు కొంచెము వ్రాయబడుచున్నది.

(2) దీనింబట్టి దశాంశసంఖ్యలను భిన్నసంఖ్యగ మార్చవలసినచో దశాంశచిహ్నమునకు కుడివైపున ఎన్నిస్థానములందంకెలుగలవో అన్నిస్థానములందు 1టియొక్క కుడివైపున సున్నలను వ్రాసి, ఆసంఖ్యను హారముగా చేయవలయుననుట స్పష్టమగుచున్నది.

ఉదా. 2.236, .816, ·047, .009 వీటిని భిన్నసంఖ్యగా మార్చినచో

$2.236 = 2\frac{236}{1000}$, $.816 = \frac{816}{1000}$, $.047 = \frac{47}{1000}$, $.009 = \frac{9}{1000}$ అగుచున్నవి.

(3) సంఖ్యానీకమునందు ప్రతిఅంకెయు తనకు ఎడమవైపుననున్నయంకెకు దశాంశమున్ను కుడివైపుననున్నయంకెకు దశగుణితమున్ను అయిన స్థానమును బోధించుచున్నదిగదా! అట్లు దశాంశచిహ్నమునకు కుడివైపుననున్న సంఖ్యలో ఎడమవైపునుండి మొదటియంకె 1 టి లోని దశమాంశములను బోధించును. 2వ యంకె మొదటిస్థానముయొక్క దశాంశములను (అనగా శతాంశములను) బోధించును. ఇట్లు ఉత్తరోత్తరవృద్ధిగ దశశతసహస్రాది అంశములను బిందువునుండి కుడివైపున 1, 2, 3 మొదలగు స్థానములందలి యంకెలు బోధించును.

(4) ఈకారణముచే బిందువునకు కుడివైపుననున్న సంఖ్యకు తుదను కొన్ని సున్నలను వ్రాసినను పరిమాణము మారదు. ఎట్లనగా:—

7 = .70 = .700 ఇచట 7 ఇది దశాంశములనే బోధించును. శతసహస్రాద్యంశములులేవు కావుననే ఆఅంశములను బోధించు అంకములులేవు. కావుననే ఆశతసహస్రాద్యంశస్థానములందు సున్నలను వ్రాసినను ఆఅంశములు లేవనియే అర్థము వచ్చుచున్నది. అనగా పైప్రకారము $\frac{7}{10} = \frac{70}{100} = \frac{700}{1000}$ అగుచున్నది.

87. ప్ర. (1) అభీష్టభిన్నసంఖ్యను దశాంశసంఖ్యగ మార్చుట.

మొదట ఉద్దిష్టభిన్నసంఖ్యను లఘుతమరూపమునకు మార్చుము. పిమ్మట, భాగానుబంధములోనికి మార్చి అందలి భిన్నసంఖ్యకు కుడివైపున ఒక్కొకసున్నను వ్రాయుచు హారముచే భాగించుచుండుము. ఆలబ్ధసంఖ్యను భాగానుబంధములోని పూర్ణాంకమునకు కుడివైపున బిందువును వ్రాసి దానికి కుడివైపున వ్రాయుము ఇది దశాంశసంఖ్య అగును. ఉద్దిష్టసంఖ్య సూక్ష్మభిన్నమగుచో కేవలబిందువునకు కుడివైపున లబ్ధసంఖ్యను వ్రాయుము. అట్లు సున్నలనువ్రాసి హారముచే లవమును భాగించుటలో కొన్నిసున్నలు వ్రాయువరకు లబ్ధము (అంకెలు) లభింపనిచో ఎన్నిసున్నలు వ్రాయువరకు లబ్ధములు లభింపలేదో అంతవరకు అన్నిసున్నలను బిందువునకు కుడిప్రక్కను వ్రాసి, లభించినప్పటినుండి లభించిన లబ్ధమునున్ను వ్రాయుము.

(2) కాని అట్లు భాగించునపుడు కొన్నిసంఖ్యలకు శేషము మిగులకుండుట సంభవింపదు. వచ్చినలబ్ధములే తిరుగతిరుగ వచ్చుచుండును. అట్టి దశాంశసంఖ్య ఆవర్తదశాంశమని చెప్పబడును. అందు భిన్నభాగమునందలి ప్రథమాంకము మొదలుకొని కల సంఖ్య ఆవర్తింపబడుచో శుద్ధావర్తమనియు, కొంతసంఖ్యకాకతక్కిన సంఖ్య ఆవర్తింపబడుచో మిశ్రావర్తమనియు చెప్పబడును. అందు ఆవర్తింపబడు సంఖ్య పరివర్తిభాగము లేక ఆవర్తము ఆవృత్తిలేకయుండుసంఖ్య అపరివర్తి లేక అనావర్తము అనిచెప్పబడును.

(1) ఉదా: $\frac{22}{5}$ దీనిని దశాంశసంఖ్యగ మార్పవలయును.

5) 22 (4.4
20
20
20

కావున $\frac{22}{5} = 4.4$ అగుచున్నది.

ఇది సాంతదశాంశసంఖ్య అనిచెప్పబడును.

(2) ఉదా: ² దీనిదశాంశరూపము.

5) 2 (0.4
20
20

$\therefore \frac{2}{5} = .4$ అగుచున్నది.

(3) ఉదా: $\frac{8}{125}$ దీనియొక్క దశాంశరూపము.

125) 8 (0·064
0
80
800
750
500
500
...

$\therefore \frac{8}{125} = 0.064$ అగుచున్నది.

ఇచట సున్నలను వ్రాయక పూర్వము లబ్ధము అనుకొనిన సున్న దశాంశచిహ్నమునకు నెడమవైపునను సున్న వ్రాసిన పిమ్మట లభించిన సున్న మొదలగు లబ్ధములు బిందువునకు కుడివైపునను వ్రాయబడినవి.

యుక్తి: $\frac{8}{125} = \frac{8000}{125000} = \frac{64}{1000} =$ ·064 అగుచున్నది.

ఇందు సున్నలనన్నియు ఒకమారువ్రాసియు భాగింపవచ్చును. అపుడు సున్నలనుండి వచ్చులబ్ధములనుమాత్రము గుర్తింపవలయును.

(4) ఉదా: $\frac{6}{7}$ దీనికి దశాంశరూపము

7) 600·0 000 00
0·857 142 85 ఇత్యాది...

= ·857142

ఇది ఆవర్తదశాంశము. 857142 ఈసంఖ్య తిరిగితిరుగ వచ్చుచుండుటచే నిది పరివర్తి లేక ఆవర్తనము. ఇందు మొదటియంకెనుండి ఆవర్తనమగుటచే నిది

శుద్ధావర్తము. ఆపరివర్తిసంఖ్యయందు మొదటియంకెను తుదియంకెను శిరోభాగమందు బిందువును గుర్తించుటచే ఆసంఖ్యయే పరివర్తింపబడును అని సూచింపబడుచున్నది.

(5) ఉదా: $\frac{5}{6}$ దీనికి దశాంశరూపము.

6) 500 00 00
83 33 33

ఇచట 3 ఇదిపరివర్తి 8 ఇది అపరివర్తి కావున నిది మిశ్రావర్తము.

దీనిని ·83 ఇట్లు వ్రాయవలయును.

(6) ఉదా: $\frac{2}{3}$ దీనికి దశాంశరూపము.

3) 2 00 00 00
·66 66 66

$\frac{2}{3} =$ ·666666 ఇత్యాది... లేక ·6 అగుచున్నది.

(3) అట్లు దశాంశసంఖ్యగ మార్చునపుడు లబ్ధములు అనంతముగా వచ్చును గాన ఇష్టమైనంతవరకు గ్రహించి మిగిలినసంఖ్యలను విడచి గణితముచేయుట ఆసన్నముగ నుండును. అందు మిగిలినసంఖ్యను విడచునపుడు విడువబడుసంఖ్యలోని మొదటియంకె 5 కంటె పెద్దదియగుచో దానికి వెనుకనున్న అంకెయందు 1 టిని కలిపియుంచి విడువదలచినసంఖ్యను విడువవలయును. అది అంతకంటె ఆసన్నమగును. పై (6) ఉదాహరణమునందు

$\frac{2}{3} = \frac{666}{1000}$ అనుచో ఈరెండుసంఖ్యలకును స్వల్పాంతరమేగలుగుచున్నది

ఎట్లనగా: $\frac{2}{3} - \frac{666}{1000} = \frac{2000}{3000} - \frac{1998}{3000} = \frac{2}{3000}$

ఇచట మూడువేలలో రెండువంతులు విడచుట గణింపదగినది గాదు.

అట్లు $\frac{2}{3} = \frac{667}{1000}$ అనుచో $\frac{667}{1000} - \frac{2}{3} = \frac{2001}{3000} - \frac{2000}{3000} = \frac{1}{3000}$

మూడువేలవంతులలో రెండువంతులను విడచినసంఖ్యకంటె ఒకవంతు అధనముగా గ్రహింపబడినసంఖ్య $\frac{2}{3}$ నకు ఆసన్నము అనుట స్పష్టమగుచున్నది.

87. ప్రి. అట్టిదశాంశసంఖ్యలను హారములను వ్రాయకుండగనే సంకలనాదికమును చేయవచ్చును. కావున నిందు సమచ్ఛేదీకరణ ప్రయాసముండదు. అట్టి దశాంశపరికర్మలును సంగ్రహముగ తెలియజేయబడుచున్నవి.

దశాంశసంకలనము.

దశాంశసంఖ్యలను సంకలనమునందు ఒకదాని దశాంశచిహ్నముక్రిందుగ మరియొకదాని దశాంశచిహ్న ముండునట్లు వ్రాసి అభిన్నసంఖ్యలకువలెనే సంకలనముచేయుము. యోగమునందు పైదశాంశచిహ్నమునకు క్రిందుగ దశాంశచిహ్నమును వ్రాయుము.

ఉదా: 457.339, 545.97, 50.8 .987 వీటియోగ మెంత ?

457. 339
545 97
50· 8
. 987
యోగము 1055 .096

అన్ని సంఖ్యలయొక్కయు బిందువులు ఒక నిలువుపంక్తిగ (వాలుగ) నుండుటవలన అభిన్నసంఖ్యలయొక్క ఏకాదిస్థానాంకములును ఒకనిలువుపంక్తిగ వ్రాయబడినవియే యగుచున్నవి. దశాంశ చిహ్నమునకు కుడివైపున నున్న సంఖ్యలును దశశతసహస్రాద్యంశములను బోధించు సజాతీయాంకములొకదానిక్రింద నొకటి వ్రాయబడినవి యగుచున్నవి. యోగవియోగములు సజాతీయములకే చేయదగినవి గావున సజాతీయాంకములే ఒకనిలువుపంక్తిలో నుండునట్లు వ్రాయబడినవి. ఈవిషయమును గమనించినచో దీనియుపపత్తి స్పష్టము గాగలదు.

మరియు (86 ప్రి 4 చే) .97 = 970 అట్లు .8 = .800 కావున

$$\left.\begin{array}{r} .339 \\ .970 \\ .800 \\ .987 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} .339 \\ .97 \\ .8 \\ .987 \end{array}\right.$$

$$3{\cdot}096 = 3{\cdot}096$$

ఇట్లు దశశతాద్యంశబోధకసంఖ్యలు నిలువుగనుండునట్లు వ్రాసి కలుపుట సమహారములు చేసి కలుపుటయే యగుచున్నది. అట్టి భిన్నసంఖ్యలను కలిపి భాగానుబంధముగమార్చి పూర్ణాంకమును అభిన్నసంఖ్యలతో గలుపుటయు నగుచున్నది.

దశాంశ వ్యవకలనము.

88. ప్రి. అంతరముచేయదగిన దశాంశసంఖ్యలలో పెద్దసంఖ్యక్రింద చిన్నసంఖ్యను వ్రాయుము. (ఏసంఖ్యయందు అభిన్నభాగమందలి అనగా బిందువునకు ఎడమవైపుననున్నట్టిసంఖ్య పెద్దదియో ఆసంఖ్య పెద్దసంఖ్య. అభిన్నభాగమందలిసంఖ్య చిన్నదియగుచో ఆసంఖ్య చిన్నసంఖ్య యని స్మరింపుము) వియోజ్య వియోజకములలో దేనియందైనను భిన్నభాగమందు మరియొకదానికంటె తక్కువస్థానములందు సంఖ్యగలిగియున్నచో ఆతక్కువస్థానములను సున్నలచే నింపించి పైసంఖ్యయొక్క దశాంశచిహ్నముకు క్రిందసంఖ్యయొక్క దశాంశచిహ్నముండునట్లు వ్రాసి అభిన్నసంఖ్యలకువలెనే వ్యవకలనము చేయుము.

(1) ఉదా: 34·43 — 22.397 ఎంతయగును

వియోజ్యము 34.430
వియోజకము 22 397
అంతరము 12·033

(2) ఉదా: 9876, 32.03 వీటియంతర మెంత ?

32.0300
.9876
31.0424 అంతరము.

దీని యుపపత్తి సంకలనమునందువలె గమనింపదగియున్నది.

దశాంశగుణనము.

89. ప్రి. దశాంశసంఖ్యలను అభిన్నసంఖ్యలుగ భావించి గుణనముచేయుము పిమ్మట గుణ్యముయొక్కయు గుణకముయొక్కయు భిన్నభాగమందు ఎన్నెన్నిస్థానములు గలవో ఆస్థానముల రెండిటియొక్కయు యోగముతో సమమైన స్థానములను కుడివైపునుండి విడచి ఆస్థానములకు వెనుక గుణనఫలమునందు దశాంశచిహ్నము నుంపవలయును. అన్నిస్థానములయందంకెలు లేనిచో ఆసంఖ్యకు ఎడమవైపున ఎన్ని తక్కువయున్నవో అన్నిస్థానములందు సున్నలనువ్రాసి వాటికి ఎడమవైపున బిందువును వ్రాయుము.

(1) ఉదా: 34.356 దీనిని 2.25 చే గుణింపుము.

గుణ్యము 34.356 ఇచట గుణ్యమునందు 3 ను గుణకమునందు 2 ను దశాంశస్థానములు గలవు కావున గుణనఫలమునందు 5 స్థానములకు వెనుక దశాంశచిహ్నమునుంపవలయును. అట్లుగనే దశాంశచిహ్నము వ్రాయబడినది.

```
గుణకము      2.25
          171780
           68712
          68712
గుణనఫలము 77.30100
```

(2) ఉదా: ·273 × .024 ఎంతయగును ?

ఇచట గుణ్యగుణకస్థానయోగము 6 కాని గుణనఫలమునందు 6 స్థానములు లేవు. 4 స్థానములే గలవు కావున 2 సున్నలను ఎడమవైపున వ్రాసి దశాంశచిహ్నము ఉంపబడెను.

```
   ·273
   ·024
   1092
   546
·006552
```

(3) ఉదా: ·375 × ·64 ఎంతయగును ?

ఇచట గుణనఫలమునందు తుదను 3 సున్నలుగలవు. కాని దశాంశసంఖ్యలందు తుదను నున్నసున్నను తీసివేసినను పరిమాణము మారదు. కావున ·24 అనియు వ్రాయవచ్చును.

```
 ·375
 ·64
·24000
```

(4) ఉదా: 43·397 × 1000 ఎంతయగును ?

43·397 × 1000 = 43397·000 = 43397 (చూ॥ పై॥ 3 ఉదా)

ఇట్లు 43·397 × 100 = 4339·7

43.397 × 10 = 433·97

43·397 × 10000 = 433970

దీనింబట్టి దశాంశసంఖ్యను 10, 100, 1000 మొదలగు 10 యొక్క ఒకానొకఘాతము అగుసంఖ్యలచే గుణింపవలసినయెడల ఆగుణకమునందు ఎన్నిసున్నలు గలవో అన్నిస్థానములను గుణ్యమైన దశాంశసంఖ్యయొక్క భిన్నభాగమందు ఎడమవైపునుండి జరిపి దశాంశబిందువును వ్రాయవలయును. స్థానములు తక్కువయైనచో ఎన్నితక్కువయో అన్నిసున్నలను సంఖ్యకు కుడివైపున వ్రాసి దానిని పూర్ణసంఖ్యగా తెలియవలెను అని స్పష్టమగుచున్నది.

ఈపద్ధతికి ఉపపత్తి: (1) ఉదాహరణము చూ॥

$$34{\cdot}356 \times 2{\cdot}25 = \frac{34556}{1000} \times \frac{225}{100} =$$

$$\frac{34356 \times 225}{1000 \times 100} = \frac{7730100}{10^3 \times 10^2} = \frac{7730100}{10^5} = \frac{7730100}{100000} \text{ (28 ప్ర 2 సి)}$$

= 77·30100 గుణనఫలమగుచున్నది. ఇట్లు ఉపపత్తి స్పష్టమగుచున్నది.

దశాంశభాగహారము.

90. ప్ర. అభిన్నసంఖ్యలకువలెనే భాగహారము చేయవలయును.

(1) భాజ్యభాజకములు రెండిటియందును భిన్నభాగమందు సమానస్థానములందు సంఖ్యయున్నచో లబ్ధము పూర్ణాంకమే యగును.

(2) భాజకముకంటె భాజ్యమునందు భిన్నభాగమందు అధికస్థానములున్నచో ఎన్నిస్థానములధికమో అన్నిదశాంశస్థానములు లబ్ధమందుండును.

లబ్ధమునందన్నిస్థానములు లేనిచో ఆలబ్ధసంఖ్యయొక్క ఎడమవైపున తక్కువస్థానములందు సున్నలను వ్రాసి అన్నిస్థానములకు వెనుక దశాంశచిహ్నమును వ్రాయుము.

(3) భాజకమునందలి దశాంశస్థానసంఖ్యకంటె భాజ్యమందలి దశాంశస్థానసంఖ్య చిన్నదియగుచో ఎంతతక్కువయై యున్నదో అన్నిస్థానములందు లబ్ధమునకు కుడివైపున సున్నలను వ్రాసి ఆసంఖ్యను అభిన్నలబ్ధమని తెలియుము.

(4) పైపద్ధతి భాగించునపుడు శేషములేనిచో గ్రహింపదగియున్నది. శేషమున్నచో శేషమునకు కుడివైపున సున్నలను చేర్చుచు నిశ్శేషమగువరకుగాని ఒకసారిమిగిలిన శేషము తిరుగ మిగులువరకుగాని భాగించి లబ్ధమును గనుగొనవలయును. అపుడు ఆయాశేషములతో నెన్నిసున్నలు చేర్చబడినవియో అన్ని సున్నలను భాజ్యమునకు కుడివైపుననున్నట్లు గ్రహించి ఆభాజ్యమువలనను భాజకమువలనను పైప్రకారము లబ్ధమునందు దశాంశసంఖ్యను తెలుసుకొనవలయును.

(1) ఉదా: 15·625 ÷ 2·5 లబ్ధమెంత ?

```
2·5 ) 15·625
       6·25
```

ఇచట భాజ్యమున 3 దశాంశస్థానములు, భాజకమునందు 1 దశాంశస్థానము. కావున 3 — 1=2 లబ్ధమున దశాంశస్థానము లుండును.

(2) ఉదా: ·15625 ÷ 2·5 లబ్ధమెంత ?

పైఉదాహరణమునందును ఈఉదాహరణమునందును అంకెలు ఒకవిధముగ నున్నను దశాంశచిహ్నభేదముచే సంఖ్యలు భేదించుచున్నవి. కావున లబ్ధమున ఆ అంకములే రాగలవు. కాన దశాంశచిహ్నము 5 — 1 = 4 అగుటచే నాలుగంకములకు వెనుకనుండును. కాని 3 అంకములే ఉండుటచే ఒకసున్న వ్రాసి దానికి ఎడమవైపున దశాంశచిహ్నమును వ్రాయఁగా అది లబ్ధమగును.

కావున ·0625 లబ్ధమగుచున్నది.

అట్లు 155. 5 ÷ 2·5 అగుచో లబ్ధము 62·5 అగుచున్నది.

అట్లు 1562. 5 ÷ 2·5 అగుచో లబ్ధము 625 అగుచున్నది.

అట్లు 15625 ÷ 2·5 అగుచో లబ్ధము 6250 అగుచున్నది.

(3) ఉదా: 19994·14 ÷ 5762 = లబ్ధమెంత ?

ఈరెండుసంఖ్యలకును అభిన్నాంకములకువలె భాగహారము చేయఁగా "347" ఈయంకములు లభించుచున్నవి. కాని భాజకముకంటె భాజ్యమునందలి దశాంశసంఖ్యయందు రెండుస్థానములు తక్కువగుటచే కుడివైపున రెండుసున్నలతో గూడిన 34700 లబ్ధమగుచున్నది.

(4) ఉదా: 37·5 ÷ 7·68 లబ్ధము ఎంత ?

```
7 68 ) 37·50 ( 4·8328125
       30 72
        6 780
        6 144
          6360
          6144
           2160
           1536
            6240
            6144
             960
             768
             1920
             1536
              3840
              3840
```

ఇచట భాజ్యశేషములతో క్రమముగ 8 సున్నలు చేర్చబడినవి. కావున భాజ్యమునందు దశాంశస్థానములు 9, భాజకమునందు రెండు. 9 - 2 = 7 లబ్ధమునందు దశాంశస్థానములు. కావున కుడివైపునుండి 7 అంకెలకు పూర్వము దశాంశచిహ్నము ఉంచబడినది.

(5) ఉదా: 12.2 ÷ 1.3 లబ్ధమెంత ?

```
1.3 ) 12.2 ( 9.384615
      117
        50
        39
        110
        104
          60
          52
           80
           78
            20
            13
             70
             65
శేషము =       5
```

తొలుతవచ్చిన 5 శేషముగ వచ్చువరకును భాగహారమునందు లబ్ధములు గనుగొనబడినవి. అనగా ఇటనుండి 3 మొదలుకొని ఉన్న ఆలబ్ధములే క్రమముగ ఆవృత్తిగ వచ్చును. ఇంతవరకు చేర్చబడిన సున్నలు 6 కావున, భాజ్యమందు దశాంశస్థానములు 7, భాజకమందు 1టి లబ్ధమునందు 7 — 1 = 6 దశాంశస్థానములు కలవని తెలియదగియున్నది.

6 ఉదా: 2.32 ÷ 100 లబ్ధమెంత ?

ఇచట భాజ్యముయొక్క శేషములతో రెండుసున్నలను చేర్చగా 232 ఈఅంకములు లబ్ధముగ వచ్చుచున్నవి. కావున భాజ్యమందలి దశాంశస్థానములు 4 భాజకమున దశాంశస్థానములులేవు. కావున .0232 లబ్ధమగుచున్నది.

(1) అను:—దీనింబట్టి 10యొక్క ఒకానొకఘాతమగు 10,100,1000 మొదలగు సంఖ్యలచే దశాంశసంఖ్యను భాగింపవలసినచో భాజకమునం దెన్నిసున్నలుగలవో దశాంశచిహ్నమునకు నెడమవైపున అన్నిస్థానములకుపూర్వమందు దశాంశచిహ్నమును మార్చి వ్రాయవలయును అన్నిస్థానములం దంకెలు లేనిచో తక్కువస్థానములందు సున్నలనువ్రాసి దశాంశచిహ్నము నుంపవలయును. అది లబ్ధముగాగలదు.

(2) అను:—ఇట్లు తుదను సున్నలుగల ఒకానొక పూర్ణసంఖ్యచే దశాంశ సంఖ్యను భాగింపవలసినచో తొలుత పైప్రకారము భాజకమందలి

సున్నలబట్టి భాజ్యమునందు దశాంశచిహ్నమునుమార్చి భాజకమందలి సున్నలను తీసివేసి ఆభాజకభాజ్యములచే పైప్రక్రియపద్ధతిచే లబ్ధమును గ్రహింపవలయును ఆలబ్ధము ఉద్దిష్టభాజక భాజ్యముల లబ్ధము గాగలదు.

ఎట్లనగా: $854.88 \div 2400$

భాజకమునందు రెండుసున్నలున్నవి గావున

$854.88 \div 2400 = 8.6488 \div 24 = .3562$ అగుచున్నది.

ఇట్లంతటను గ్రహింపవలయును.

పద్ధతియొక్క ఉపపత్తి:— $15.625 \div 2.5$ అగునపుడు

$$\frac{15625}{1000} \div \frac{25}{10} = \frac{15625}{10^3} \div \frac{25}{10^1} = \frac{15625}{10^3} \times \frac{10^1}{25} = \frac{15625}{25} \times \frac{10^1}{10^3}$$

$$\frac{15625}{25 \times 10^3 \div 10^1} = \frac{15625}{25 \times 10^{3-1}} = \frac{15625}{25 \times 10^2} = \frac{625}{10^2} = \frac{625}{100} = 6.25$$

ఇట్లు భాజకముకంటె భాజ్యమునందు దశాంశస్థానము లెక్కువ యున్నపుడు పైస్వరూపవిన్యాసముచే ఉపపత్తి స్పష్టమగుచున్నది.

$1999.14 \div .5762$ ఇట్లు భాజ్యదశాంశస్థానములు తక్కువయగుచో,

పైప్రకారము $\frac{199914}{100} \div \frac{5762}{10000} = \frac{199914}{5762} \times \frac{10^4}{10^2} = 347 \times 10^{4-2}$

$$= 347 \times 10^2 = 347 \times 100 = 34700$$

దీనిచే అన్ని ఉదాహరణములందును ఉపపత్తి గ్రహింపవలయును.

దశాంశఘాతము (వర్గఘనాదికము)

91. ప్ర. దశాంశసంఖ్యలకు ఏఘాతమును చేయవలసినను అభిన్నసంఖ్యలకు వలెనే ఆయాఘాతములచేసి ఆమూలసంఖ్యయందుగల దశాంశస్థానసంఖ్యను ఆఘాతమాపకాంకముచే గుణించిన నెంతయగునో అన్నిస్థానములకు (నెడమవైపున) వెనుక దశాంశచిహ్నమును వ్రాయవలయును.

(1) ఉదా:— 2.5 దీనికి ఘన మెంతయగును ?

$(2.5)^3 = 15625$ ఇచట ఘాతమాపకాంకము 3 చే దశాంశస్థానసంఖ్య 1ను గుణించినచో 3 అన్నిస్థానములు ఘనమునందు దశాంశస్థానములు. కావున 15.625 ఘనమగుచున్నది.

దశాంశగుణనప్రకారముచే దీని యుపపత్తి స్పష్టమగుచున్నది.

దశాంశమూలములు

92. ప్ర. (1) దశాంశసంఖ్యయందలి అభిన్నభాగసంఖ్యయందు ఏకస్థానాంకము కుడివైపునుండి మొదటియంకెగా గుర్తించిదశాంశసంఖ్యనంతనుఅభిన్నసంఖ్యగ భావించి వర్గమూలమును ఘనమూలమును మొత్తముసంఖ్యకు గనుగొనుము. అభిన్నభాగమందలి సంఖ్యవలన లభించిన యంకములు మూలమునందభిన్నభాగములోనివి యగును. భిన్నభాగమందలి యంకములను శేషములతో చేర్చునప్పటినుండియు లభించిన యంకములు దశాంశస్థానములోనివి. కావున దశాంశచిహ్నమునకు కుడివైపునందలి యంకెలవలన లభించు అంకములను లబ్ధమునందు వ్రాయవలసినపుడు లబ్ధమునందు తొలుత దశాంశచిహ్నమును వ్రాసి ఆలబ్ధాంకములను వ్రాయుము.

(2) ఉద్దిష్టసంఖ్యయందు తుదను వర్గమూలమునందు రెండురెండు అంకెలను దించుటలో 1 అంకెయే మిగిలినను, ఘనమూలమునందు 3 దేసి అంకెలను దించుటలో 1, 2 అంకెలే మిగిలినను లేక శేషముమిగిలినను వలసినన్ని సున్నలను చేర్చుకొని గణితమును చేయుము.

వాస్తవముచే ఘాతపద్ధతినిబట్టి ఘాతమాపకాంకముచే మూలమునందలి దశాంశస్థానసంఖ్యను గుణింప నెంతయగునో అన్నిదశాంశస్థానములు ఘాతమునందుండును. కావున ఘాతమునందలి దశాంశస్థానసంఖ్యను ఘాతమూలాంకముచే భాగింప నెంతయగునో అన్నిదశాంశస్థానములు ఆయాఘాతమూలమునందుండును. ఈప్రకారము అభిన్నసంఖ్యగ దశాంశసంఖ్యను భావించి మూలమును గనుగొని దశాంశచిహ్నమును వ్రాయవచ్చును. ఐనను ఆసన్నమగుటచే కొన్ని దశాంశసంఖ్యలను కుడివైపున విడచినచో ఘాతమునందలి దశాంశస్థానసంఖ్య ఘాతమూలాంకముచే నిశ్శేషముగ భాగింపబడునట్లు తక్కువయగు స్థానములందు

నున్నలను వ్రాయవలసియుండును. అట్లు వ్రాసినపిమ్మట అభిన్నసంఖ్యలకువలె మూలమును గనుగొని దశాంశస్థానసంఖ్యను మూలమాపకాంకముచే భాగించిన నెంత యగునో అన్ని దశాంశస్థానములకు వెనుక దశాంశచిహ్నము నుంపవచ్చును. ఈశ్రమ లేకుండుటకై పైప్రకారము పద్ధతి చెప్పబడినది.

(1) ఉదా: 6·25 దీనికి వర్గమూలమెంత ?

```
    ) 6·25 ( 2·5
      4
 45 ) 225 (
      225
      ...
```

ఇందు అభిన్నభాగమందలి 6 వలన లభించిన వర్గమూలము 2 నకు పిమ్మట దశాంశచిహ్నము వ్రాయబడెను. వర్గసంఖ్యయందు దశాంశసంఖ్య 25 నుండి దించుటచే లభించిన 5 మూలమందు దశాంశసంఖ్య లోనిది.

లేక 625 నకు వర్గమూలము 25 వర్గసంఖ్యయందు దశాంశసంఖ్య 2 ను వర్గమనగా ద్విఘాతముగాన వర్గమూలమునందు మూలమాపకము 2 కావున 2 చే భాగింప 1 టి మూలమునందు 1 దశాంశసంఖ్యయుండును అని తెలియుచున్నది

(2) ఉదా. 42.31 దీనియొక్క వర్గమూలమెంత ?

```
         ) 42·31 ( 6.5046
           36
    125  ) 631
           625
  13004  ) 60000 (
           52016
 130086  ) 798400
           780516
 శేషము     17884
```

అభిన్నభాగమందలి 42 వలన మూలము 6 లభించినది. అటనుండి భిన్నభాగమందలి అంకములను శేషముతో చేర్చితిమి. కావున అభిన్నభాగసంబంధిమూలమునకు తరువాత దశాంశచిహ్నము వ్రాసి, భిన్నభాగసంబంధి మూలాంకములు వ్రాయబడినవి. ఈవర్గసంఖ్యయందు ఆసన్నమానమగుటచే 42·3దీనివర్గమూలమెంత? అని ప్రశ్నించినను పైప్రకారమే వర్గమూలమును గనుగొనవలయును.

ఈదిశాంశగణితమునుగూర్చియు అందలి ఆవర్తసంఖ్యలగూర్చియు వ్రాయదగినది చాలగలదు. ఐనను ఇది ఈగ్రంథమునందు ప్రసంగమునలన వ్రాయబడినదగుటచే సంగ్రహముగ వ్రాసి విరమించడమైనది.

ఇది భిన్నపరికర్మాష్టకము

4 ప్రకరణము.

శూన్యపరికర్మాష్టకము.

అథశూన్య పరికర్మసుకరిణసూత్రమార్యాద్వయం

యోగేఖంక్షేపసమం వర్గాదౌఖం ఖభాజితోరాశిః।
ఖహారస్స్యాత్ఖగుణఃఖం ఖగుణశ్చింత్యశ్చ శేషవిధౌ॥ ౨౮

శూన్యేగుణకేజాతే ఖంహారశ్చేత్పునస్తదారాశిః।
అవికృతఏవజ్ఞేయ స్తథైవఖే నోనితశ్చయుతః॥ ౨౯

టీ॥ యోగే = సంకలనమందు, ఖం = సున్న, క్షేపసమమ్ = యోజ్యముతోసమను (అగుచున్నది) ఖం = సున్న, వర్గాదౌ = వర్గవర్గమూల ఘనఘనమూలాదులందు, ఖం = సున్న (యేయగును) ఖభాజితః = సున్నచే భాగింపబడిన, రాశిః = రాశి, ఖహారః = సున్నహారముగా గలదియై స్యాత్ = అగును ఖగుణః = శూన్యగుణకముగాగల రాశి (సున్నచే గుణింపబడినరాశి) ఖం = సున్నయేయగును. ఖగుణః = సున్నచే గుణింపబడినరాశి శేషవిధౌ = మిగిలిన గణితము (చేయదగినపుడు) చింత్యశ్చ = ఆలోచింపదగినదియు నగుచున్నది. (ఎట్లనగా) శూన్యే = సున్న, గుణకేజాతే = గుణకమైయగుచుండగా, ఖంహారశ్చేత్ = సున్న హారమైనదగుచో, తదాపునః = అపుడుమాత్రము, రాశిః = రాశి, అవికృతఏవ = యథాస్థితమైనదిగనే, జ్ఞేయః = తెలియదగినది, తథైవ = అట్లుగనే, ఖే = సున్నచే, ఊనితశ్చ = తీసివేయబడినదియును, యుతశ్చ = కలుపబడినదియును అను (రాశిః అవికృత ఏవజ్ఞేయః = రాశియథాస్థితముగనే తెలియదగినది) దీనితాత్పర్యము క్రమముగ పరికర్మలచే వివరింపబడుచున్నది.

శూన్యసంకలనము.

93. ప్ర. సున్నను మరియొకసంఖ్యతో కలిపినను సున్నతో మరియొక సంఖ్యను కలిపినను అనగా సున్న యోజ్యమైనను యోజకమైనను యోగము మరి

యొకసంఖ్యతో సమమగుచున్నది. (ఈవిషయము అభిన్నసంకలనోదాహరణమునందు సూచింపబడినది)

యోజ్యము	4	లేక యోజ్యము	0	అనగా $4 + 0 = 4$	
యోజకము	0	యోజకము	4	$0 + 4 = 4$	
యోగము	4	యోగము	4	అగుచున్నది.	

యుక్తి:—సున్న అభావమును అనగా ఏసంఖ్యయొక్కయు లేకపోవుటను సూచించుచున్నది. కావున సున్నలో ఇతరసంఖ్యలను కలుపుట అనగా ఏమియులేనిచోట ఇతరసంఖ్యను చేర్చుట. ఇతరసంఖ్యతో సున్నను కలుపుట యనగా దేనినిన్ని చేర్పకపోవుట. కావున ఇతరసంఖ్యయే యోగమగును.

వివరణము:—సున్నయనగా ఏమియులేకపోవుట కావున అట్టి అభావమునకు యోగాయోగాదిక మసంభవముగా కన్పట్టుచున్నది. ఐనను ఏసంఖ్యకైనను కుడివైపున సున్నలనుచేర్చినను ఒకానొకసంఖ్యకు మధ్యయందు సున్నలుండుటవలనను అర్థవిశేషము గలుగుచున్నది. (అట్లు దశాంశసంఖ్యలందు దశాంశచిహ్నమునకును అంకములకును మధ్యను సున్నలున్నచో అర్థభేదము గలుగుచున్నది) కావున అట్టి సున్నలుగలసంఖ్యలకును సున్నలుగలసంఖ్యలను సున్నలులేనిసంఖ్యలకును యోగాదికము చేయవలసినయెడల మార్గములు ఆయాప్రకరణములందు చెప్పబడినవి. ఐనను స్పష్టముగ తెలియుటకై వేరుగచెప్పుట ఆవశ్యకమగుచున్నది. అదిగాక శూన్యభాగహారాదులందు ఫలవ్యత్యయముగలదు. కావున శూన్యపరికర్మాష్టకము ఆరంభింపబడినది.

శూన్యవ్యవకలనము

94. ప్ర. (1) ఒకానొకసంఖ్యావలన సున్నను వ్యవకలించినచో ఆసంఖ్యయే శేషమగును

(2) వ్యవకలనమనగా వియోజ్యమువలన వియోజకతుల్యమగు ఖండమును విడదీయుట. ఇది రెండిటియొక్కయు నంతరమును తెలిసికొనుటయే యగుచున్నదియని అభిన్నపరికర్మాష్టకమునందు నిరూపింపబడినది. దానిఁబట్టి సాధారణముగ చూచినచో వియోజ్యముకంటె వియోజకము చిన్నదిగనే యుండును.

పెద్దది గానేరదు. కాని ఒకనికద్దనిల్వగా రు 5 లు ఉండెను. వానికి కుటుంబము నిమిత్తము రూ 8 లు వ్యయమయ్యెను. వానికి ఏమి యున్నది ? ఇట్టి ప్రశ్నములందు నిల్వయున్నధనమువలన వ్యయమైన ధనమును తీసివేయుట న్యాయమగుటచే ఇచట 5వలన 8ని తీసివేయవలసి వచ్చుచున్నది. కాని ఇచటనైనను అంతరమే గనుగొనవలసియున్నది కావున వ్యయమైన రూ 8 లలో అదివరకు నిల్వయున్న రూ 5 లను తీసివేసి రూ 3 లు అధికముగ వ్యయమైనవి అనవచ్చును. కాని అంతకంటె రు 5 లలో రూ 8 లను తీసివేయగా రు 3 లు ఋణముఅనుట లాఘవము (సులువు) దీనింబట్టి అల్పసంఖ్యవలన అధికసంఖ్యను వ్యవకలింపవలసినచో ఆ అధికసంఖ్యయందలి అధికఖండమును ఋణమనుట యుక్తియుక్తమని తేలినది. కావున 5—8 = — 3 ఇట్లు ఋణమగు మూడు అని అగుచున్నది. † ఇట్లు ధనము ఋణము అయినసంఖ్యలకు సంకలనాదికము సేయుట ధనర్ణపరి

---

† (1) యోజ్యయోజకములు రెండును ధనములగుచో యోగము ధనము. రెండును ఋణములగుచో యోగము ఋణము. ఒకటిధనము మరియొకటి ఋణము అగుచో అంతరమే యోగము. అది పెద్దసంఖ్యనుబట్టి ధనముగాని ఋణముగాని అగును.

$$(+5) + (+3) = +8 \quad \text{ఇట్లు} \quad (-5) + (-3) = -8$$
$$(+5) + (-3) = +2 \quad \text{ఇట్లు} \quad (-5) + (+3) = -2$$

(2) వ్యవకలనమునందు తీసివేయబడదగినసంఖ్య ధనమగుచో ఋణముగను ఋణమగుచో ధనముగను మార్చి పైప్రకారము యోగము చేసినచో యోగఫలమే అంతరమగును.

$$(+8)-(+5) = (+8)+(-5) = +3$$
$$(+8)-(-5) = (+8)+(+5) = +13$$
$$(-8)-(-5) = (-8)+(+5) = -3$$
$$(-8)-(+5) = (-8)+(-5) = -13$$
$$(+5)-(+8) = (+5)+(-8) = -3$$
$$(+5)-(-8) = (+5)+(+8) = +13$$
$$(-5)-(+8) = (-5)+(-8) = -13$$
$$(-5)-(-8) = (-5)+(+8) = +3$$

ఇట్లు చిహ్నవ్యత్యాసమును చేసి యోగమును చేయుటయే వ్యవకలనము.

కర్మాష్టకము. (ఇది బీజగణితమున చెప్పబడినది) అట్లుగనే సున్నవలనను ధనసంఖ్యను వ్యవకలింప ఋణమగును. ఋణసంఖ్యను వ్యవకలింప ధనమగును. ఆసంఖ్యయే ధనము ఋణముగను, ఋణము ధనముగను, అంతర మగుచున్నది.

ఎట్లనగా: $0 - 5 = -5$ ఇది అంతరము.

శూన్యగుణనము.

95. ప్రి. సున్న గుణ్యమైనను, గుణకమైనను గుణనఫలము సున్నయే అగును.

---

(3) గుణ్యగుణకములు రెండును ధనములైనను రెండును ఋణములైనను గుణనఫలము ధనమగును. ఒకటి ధనము మరియొకటి ఋణము అగుచో గుణనఫలము ఋణము.

$$\left.\begin{array}{l}(+5)\times(+3)=+15\ ,,\ (-5)\times(-3)=+15\\ (+5)\times(-3)=-15\ ,,\ (-5)\times(+3)=-15\end{array}\right\}$$ అగుచున్నది.

(4) భాగహారమునందు లబ్ధము గుణనమునందు గుణనఫలమువలె ధనము, ఋణము, అగును.

$$(+15)\div(+3)=+5\ ,,\ (-15)\div(-3)=+5$$

$$(-15)\div(+3)=-5\ ,,\ (+15)\div(-3)=-5$$

(5) ధనముయొక్కయు ఋణముయొక్కయు వర్గము ధనమగును, $(+5)^2=+25$ అట్లు $(-5)^2=+25$ ఇట్లు ఇతరఘాతములందు పై గుణనపద్ధతినిబట్టి ధనర్ణత్వముల నెరుంగవలయును.

(6) ధనసంఖ్యకు వర్గమూలము ధనముగాని ఋణముగాని అగును. ఋణసంఖ్యకు వర్గమూలము ఉండదు ఋణసంఖ్యకు ఘనమూలము ఋణమగును. ధనసంఖ్యాఘనమూలము ధనమే యగును. ఇట్లితర ఘాతమూలములందును ఆ మూలమాపకాంకము విషమ(బేసి)మగుచో మూలము ఘాతమును బోలియుండును. సమమగుచో మూలము ధనముగాని ఋణముగాని యగును.

ఉదా: $-0\times 4=0$ లేక $4\times 0=0$ ఇట్లు $0\times 0=0$ అగుచున్నది.

గుణనమనగా ఆవృత్తికావున సున్నను ఆవృత్తిచేసినను సున్నపర్యాయములుఆవృత్తిచేసినను (అనగాగ్రహింపకపోయినను) గుణనఫలము సున్నయగును.

96. ప్రి. సున్న భాజకమై ఒకానొకసంఖ్య భాజ్యమగుచో సున్నహారముగా గలరాశి (ఖహరము) లబ్ధ మగును.

(1) ఉదా: 5 భాజ్యము 0 భాజకము లబ్ధమెద్ది ?

$\frac{5}{0}$ ఈఖహరరాశి లబ్ధమగుచున్నది.

ఈఖహరరాశి అనంతమైనది అనగా లబ్ధము అనంతమగును. అని భాస్కరాచార్యులు బీజగణితమున దీనింగూర్చి యిట్లు చెప్పిరి.

అస్మిన్వికారః ఖహరే నరాశా వపి ప్రవిష్టే ష్వపి నిస్సృతేషు
బహు ష్వపి స్యా ల్లయసృష్టికా లే నంతే చ్యుతే భూతగణేషు యద్వత్॥

తనవలన ననేకభూతజాతము సృష్టికాలమున సృజింపబడినను, లయకాలమందు తనయందు లీనమైనను, ఆత్మపదార్థము మార్పుచెందనట్లు ఈఖహరరాశియు ఇతరసంఖ్యలను కలిపినను తీసివేసినను మార్పుచెందదు. (అని తా)

అనంతమనుటకు ∞ ఇది సంజ్ఞ (సంకేతము = గుర్తు) $\therefore \frac{5}{0}=\infty$

ఉపపత్తి:—భాజకము భాజ్యముతో సమమగుచో లబ్ధము 1టి అగుచున్నది. భాజకము భాజ్యముకంటె తక్కువయైనకొలదిని లబ్ధము అధికమగుచున్నది. కావున భాజకము శూన్యము అగుచో లబ్ధము అనంత మగుచున్నది.

ఎట్లనగా: $5\div 5=1$ ఇట్లు $5\div\frac{1}{2}=10$ ఇట్లు $5\div\frac{1}{4}=20$

ఇట్లు భాజకము ఎంతతగ్గిన లబ్ధమంత యధికమగుచున్నది. ఆకారణముచేభాజకము శూన్యమగుచో లబ్ధమనంతము. ఈఖహరరాశియందు ఇతరసంఖ్యను కలిపినను తీసివేసినను మార్పులేదు. ఎట్లనగా $\frac{5}{0}+\frac{3}{1}$ ఇపుడు సమచ్ఛేదములుగ చేయవలయును. (72 ప్రి. చే) $\frac{5\times 1}{0\times 1}+\frac{0\times 3}{0\times 1}=\frac{5}{0}+\frac{0}{0}$ అగుచున్నది.

ఇట్లే వ్యవకలనమునందును అగుచున్నది. కావున ఖహరరాశి మార్పు చెందదు.

కాని ఖహరరాశియందు భిన్నసంఖ్యను సంకలనవ్యవకలనముల చేయుచో పరస్పరహారములచే పరస్పరముయొక్కయు హారలవముల గుణింప (72 ప్ర 1) భిన్నసంఖ్యాహారముచే ఖహరరాశిలవము గుణింపబడినది యగుచున్నది. కాని ఆమార్పు గణన చేయబడదు.

ఎట్లనగా: $\frac{5}{0} \pm \frac{2}{3} = \frac{5\times3}{0\times3} \pm \frac{2\times0}{3\times0} = \frac{15}{0} \pm \frac{0}{0} = \frac{15}{0}$

ఇందు (70, 71 ప్ర. చే) $\frac{5}{0}=\frac{15}{0}$ అగుచున్నది. సున్నచే 5ను భాగింప ఒకలబ్ధమున్న 15ను భాగింప మరియొక లబ్ధమున్నరాదు. కావున ఈరెండును అనంతములే యగుచున్నవి. యని కృష్ణ దైవజ్ఞులు బీజాంకురవ్యాఖ్యానమున వ్రాసియున్నారు.

భాస్కరాచార్యోక్త విశేషము: ఏదేని యొకసంఖ్యకు సున్నగుణకమైనను భాజకమైనను ముందు గణితముచేయవలసియున్నచో ఫలమునుగూర్చి ఆలోచింపవలసియున్నది. అనగా తొలుత సున్నగుణకమై ముందుముందు సున్న భాజకమైనను, సున్న భాజకమై ముందుముందు సున్న గుణకమైనను, ఆగుణకభాజకములు రెండును పరస్పరము కొట్టబడుటచే ఆరెండిటిని విడచి మిగిలినగణితము చేయదగియున్నది. ఎట్లనగా $5\div0+3-2\times0$ దీనినిట్లు వ్రాయవచ్చును.

$\frac{5}{0}+3-2\times0$ లేక $5\times0+3-2\div0=\frac{5\times0+3-2}{0}$ ఈ రెండు ఉదాహరణములందును గుణకభాజకములగు శూన్యములను తీసివేసినచో $5+3-2=6$ అగుచున్నది. లేక $\frac{5\times0}{0}=5$ అగుచున్నది అనియున్నది. (98 ప్ర యుక్తిచే దీనిని నవీనులు అనిశ్చిత సమీకరణమని చెప్పుచున్నారు.)

97. ప్ర. భాజ్యము సున్న. భాజకము ఒకానొకసంఖ్య. అపుడు లబ్ధము సున్నయగుచున్నది. ఉదా $0\div5=0$

98. ప్ర. భాజ్యభాజకములు రెండును సున్నలేయగుచో లబ్ధము ఏసంఖ్య కావలసిన ఆసంఖ్య అగును. (దీనింగూర్చి బీజగణితమున విస్తరము గలదు.)

ఎట్లనగా: గుణ్యము4, గుణకము0, అనుకొనుము.

ఇపుడు గుణనఫలము $4\times0=0$ అగుచున్నది. $\therefore \frac{0}{0}=4$

ఇట్లు $0\times0=0 \therefore \frac{0}{0}=0$ అగుచున్నది.

యుక్తి:- సున్నచే ఏసంఖ్యనుగుణించినను గుణనఫలము '0' అగును. గుణనఫలము భాజ్యము, గుణకము భాజకము, గుణ్యము లబ్ధము అగుటచే ఏసంఖ్యను లబ్ధమనుకొనిన అదియే లబ్ధము కాగలదు.

ఘాతమూలములు.

99. ప్ర. సున్నయొక్క ఏఘాతమైనను ఏఘాతమూలమైనను సున్నయే యగును.

$$0^2=0,\ 0^3=0 \quad \sqrt{0}=0 \quad \sqrt[3]{0}=0$$

అత్రోద్దేశకః

ఖంపంచయుగ్భవతికిం వదఖస్యవర్గం మూలం
ఘనంఘనపదంఖగుణాశ్చపంచ।ఖేనోద్ధృతాదశచ
కఃఖగుణోనిజార్ధయుక్తస్త్రిభిశ్చగుణితఃఖహృత్త్రిషష్టిః౧౪

న్యాసః। ౦ ఏతత్పంచయుతంజాతం ౫ ఖస్యవర్గః ౦ మూలమ్ ౦ ఘనః ౦ ఘనమూలమ్ ౦ ౫ ఏతేఖేనగుణితాజాతాః ౦ ౧౦ ఏతేఖభక్తాః ౧౦/౦

అజ్ఞాతోరాశిస్తస్యగుణః ౦ స్వార్ధంక్షేపః ౧/౨ గుణః 3 హారః ౧ దృష్టమ్ ౬౩ తతోవక్ష్యమాణేనవిలోమవిధినా ఇష్టకర్మణావా లబ్ధోరాశిః ౧౪ అస్యగణితస్య గ్రహగణితే మహానుపయోగః

ఇతిశూన్యపరికర్మాష్టకమ్

తా॥ సున్న ఐదుచే కలుపబడి యెంతయగును చెప్పుము. సున్నయొక్క వర్గమును సున్నయొక్క వర్గమూలమును ఘనమును ఘనమూలమును చెప్పుము. 5ను సున్నచే గుణించిన నెంతయగును? సున్నచే 10ని భాగింప నెంతయగును?

ఒకానొకసంఖ్యను సున్నచే గుణించి స్వాంశమగు సగమునుకలిపి 3 చే గుణించి సున్నచే భాగించినచో 63 అగుచున్నది ఆసంఖ్యయెద్ది?

ఉదా: $0+5=5$, $0^2=0$, $\sqrt{0}=0$, $0^3=0$, $\sqrt[3]{0}=0$

$5\times 0=0$, $\frac{10}{0}=\infty$. ఒకానొకసంఖ్య యా అనుకొందము.

అప్పుడు $\frac{\text{యా}\times 0+\text{స్వ}\ \frac{1}{2}\times 3}{0}=63$ అగుచో యా ?

ఇచట సున్నచే గుణకమైనను మందుభాజకమున్ను సున్న అగుటచే సున్న గుణింపబడిన 'యా' సున్న గాదు ఆగుణకభాజకములు రెండును పరస్పరముకొట్టబడును.

కావున యా + స్వ $\frac{1}{2}\times 3=63$ అగుచున్నది. ఇదివరలో (51 ప్ర) సూచింపబడిన రీతిని ఉద్దిష్టసంఖ్యకు (యా) ప్రమాణమును గనుగొనవలయును. కాని అచట సంగ్రహముగ చెప్పబడెను. ఈప్రశ్నము చెప్పబోవు (100 ప్ర 2) పద్ధతిచే సమాధానము చెప్పదగియున్నది.

ఇది శూన్యపరికర్మాష్టకము.

---

5 ప్రకరణము.

వ్యస్తవిధి

వ్యస్తవిధౌ కరణసూత్రం వృత్తద్వయం
ఛేదంగుణంగుణంఛేదం వర్గంమూలంపదంకృతిం
ఋణంస్వంస్వమృణం కుర్యాద్దృశ్యే రాశి ప్రసిద్ధయే॥ ౨౯॥
అథస్వాంశాధికోనేతు లవాఢ్యోనోహరోహరః।
అంశస్త్వవికృతస్తత్ర విలోమే శేషముక్తవత్॥ ౩౦॥

టీ॥ (1) రాశిప్రసిద్ధయే = రాశిజ్ఞానముకొరకు, దృశ్యే = దృశ్యసంఖ్యయందు, ఛేదం = భాజకమును, గుణం = గుణకముగాను, గుణం = గుణకమును ఛేదం = భాజకముగాను, వర్గం = వర్గమును, మూలం = మూలముగాను, పదం = మూలమును, కృతిం = వర్గమునుగాను, ఋణం = ఋణమును, స్వం = ధనముగాను, స్వం = ధనమును, ఋణం = ఋణమునుగాను, కుర్యాత్ = చేయవలయును.

(2) అథ = పిమ్మట (గాశా) స్వాంశాధికోనేతు = రాశిస్వాంశములచే కలుపబడినదిగాని తీసివేయబడినదిగాని యగుచో తత్ర = అచట లవాఢ్యోనః = లవముచే కలుపబడినదిగాని తీసివేయబడినదిగాని యగు హరః = హారము హరః హారముగ చేయదగినది అంశస్తు = లవమైతే అవికృతః = మార్పులేకనే యుంచదగినది. శేషం = మిగిలినగణితము ఉక్తవత్ = పూర్వోక్తప్రకారము చేయదగినది.

100. ప్ర. (1) అభిన్నపరికర్మాష్టకమున (51 ప్ర) విలోమవిధి సూచింపబడెను. అది ఇచట గ్రంథకర్తచే విపులముగ చెప్పబడెను. ఈప్రకారము ఎట్టిసంఖ్యలకైనను వ్యస్తవిధి చేయవచ్చును. పద్ధతి:—ఒకానొకసంఖ్యను భాజకముచే భాగించి గుణకముచే గుణించి యిట్లు కొన్నిక్రియలను చేయగా తుదకా సిద్ధించినసంఖ్య దృశ్యరాశి. ఆఒకానొక సంఖ్యను భాగించినసంఖ్య భాజకము, గుణించినసంఖ్య గుణకము. ఇత్యాది. ఆఒకానొకసంఖ్య తెలియక భాజకగుణకాదులును దృశ్యరాశియు తెలియబడినచో దృశ్యరాశినిబట్టియు ఆభాజకగుణకాదులంబట్టియు ఆఒకానొకసంఖ్యనెరుంగుట వ్యస్తవిధి. ఆఒకానొకసంఖ్యయందు భాజకమును గుణకమనుకొనుము, గుణకమును భాజకమనుకొనుము, వర్గమును మూలమనుకొనుము, మూలమును వర్గమనుకొనుము, ఋణమును ధనమనుకొనుము, ధనమును ఋణమనుకొనుము. ఒకానొకసంఖ్యయందు చేసిన క్రియలకు తలక్రిందుగ విపరీతక్రియలుగా దృశ్యరాశియందు చేయుము. తుదకాసిద్ధించినసంఖ్య అభీష్టరాశిగాగలదు (దీని ఉపపత్తి 51 ప్ర. చే తెలియగలదు)

ఉదా:—ఒకానొకసంఖ్యను 5 చే గుణించి 9 ని కలిపి దానిమూలము నుండి రెండును వ్యవకలించి పిమ్మట వర్గించి దానిలోనుండి 1 టిని వ్యవకలించి 8 చే భాగింపగా 3 లబ్ధమైనది. ఆఒకానొకసంఖ్యయెద్ది ?

దీనిని ఇట్లును వ్రాయవచ్చును: ఇష్టసంఖ్యయందు గుణకము 5 ధనము 9 మూలము. ఋణము 2, వర్గము. ఋణము 1 భాజకము 8 దృశ్యము 3 దీనిని తలక్రిందుగ ఇట్లు మొదట వ్రాయవలయును. దృశ్యము 3 గుణకము 8 ధనము 1 మూలము. ధనము 2 వర్గము ఋణము 9 భాజకము 5 ఈప్రకారము చేయగా ఇష్టసంఖ్యవచ్చును. అనగా:—ఒకానొకసంఖ్య యా అనుకొనుము అప్పుడు

$\frac{(\sqrt{\text{యా}\times 5+9}-2)^2-1}{8}=3$ దృశ్యరాశి. దీనికితలక్రిందగునిట్లువ్రాయగా

$$\frac{(\sqrt{\text{దృ}\times 8+1}+2)^2-9}{5}=\text{యా}\quad\therefore\quad\frac{(\sqrt{3\times 8+1}+2)^2-9}{5}$$

$$=\frac{(\sqrt{25}+2)^2-9}{5}=\frac{(5+2)^2-9}{5}=\frac{7^2-9}{5}=\frac{49-9}{5}=\frac{40}{5}$$

$=8=$ యా అగుచున్నది.

(2) ఇట్టిప్రశ్నములలో అభీష్టసంఖ్యయందు స్వాంశానుబంధముగాని, స్వాంశాపవాహముగాని చేయబడినయెడల ఆస్వాంశరూపమగు భిన్నసంఖ్యయందు తొలుత స్వాంశానుబంధమైనచో హారలవములయోగమును హారముగను స్వాంశాపవాహమైనచో హారలవములయంతరము (హార-లవ) హారముగను చేసి పూర్వ్వలవములనే లవముగనుంచి ఈసంఖ్యను దృశ్యమునందు స్వాంశానుబంధ స్వాంశాపవాహపద్ధతి(75 ప్ర) చేసంకలనమునకు వ్యవకలనము వ్యవకలనమునకు సంకలనము చేసి తక్కినదంతయు పూర్వ్వప్రకారమే చేయవలయును.

(1) ఉదా:—ఒకానొకసంఖ్యయందు స్వ $\frac{3}{5}$ కలిపినచో 24 అగును ఆసంఖ్యయెద్ది ?

$\text{యా}+\text{స్వ}\ \frac{3}{5}=24$ అగుచో $\text{దృ}-\text{స్వ}\ \frac{3}{5+3}=\text{యా}$ అగుచున్నది.

$$\therefore\ 24-\text{స్వ}\frac{3}{5+3}=24-\text{స్వ}\frac{3}{8}=\frac{24}{1}\times\frac{(8-3)}{8}=\frac{24\times 15}{8}$$

$=15$ ఇష్టరాశి

ఉపపత్తి: $15+9=24$ ఇదియే ఉదాహరణముగ నిర్ణయింపబడినది ఇచట 15 లో 9 స్వాంశ $\frac{3}{5}$ అగుచున్నది. అట్లు 15 లో 15 ను 5 చే భాగింపగా భాగములు 5 గలవు. కావున 15 లో $15=\text{స్వ}\ \frac{5}{5}$ అనవచ్చును. ఇపుడు

$\frac{15}{1}+\text{స్వ}\ \frac{3}{5}=15$ లో $\frac{5+3}{5}=15$ లో $\frac{8}{5}=24$ అగుచున్నది. దీనింబట్టి 24 నందు 15 లో 5 వ వంతులు 8 గలవని స్పష్టమగుచున్నది. అనగా

15లో 5వ వంతు, 24లో 8వ వంతు అగుచున్నది అనిస్పష్టము. అనగా 15లో $\frac{3}{5}=24$లో $\frac{3}{5+3}$కావున 24లో స్వ $\frac{3}{5+3}$ తీసివేయగా 15 గాగలదు.

ఇట్లు దీనికి తలక్రిందుగ 24లో స్వ $\frac{3}{8}=15$లో $\frac{3}{8-3}$ కావున 15లో స్వ $\frac{3}{8-3}$కలుపగా 24 అగుచున్నది. దీనింబట్టి ఇష్టసంఖ్యయందు స్వాంశానుబంధము అయినపుడు ఆస్వాంశసంఖ్యయందలి హారలవముల యోగమును హారముగను, స్వాంశాపవాహమైనపుడు హారలవాంతరమును హారముగను, చేసి దృశ్యసంఖ్యయందు వ్యస్తముగ చేసినచో ఇష్టసంఖ్య గాగలదు. అని స్పష్టమగుచున్నది.

(2) ఉదా: $\text{యా}+\text{స్వ}\ \frac{1}{2}\times 3=63$ (పూర్వోదాహరణము శూన్యపరికర్మ చూ).

పద్ధతిప్రకారము $\text{దృ}\div 3-\text{స్వ}\ \frac{1}{2+1}=\text{యా}=\frac{63}{3}-\text{స్వ}\frac{1}{2+1}$

$=\frac{21}{1}\times\frac{2}{3}=14$ కావున 14 ఇష్టరాశియగుచున్నది.

రుజువు $\frac{14}{1}+\text{స్వ}\ \frac{1}{2}\times 3=\frac{14}{1}\times\frac{3}{2}\times 3=21\times 3=63$ అగుచున్నది.

అత్రోద్దేశకః

యస్త్రిఘ్నస్త్రిభిరన్వితస్స్వచరణై ర్భక్తస్తత స్సప్తభి
స్స్వత్ర్యంశేన వివర్జిత స్స్వగుణితో హీనోద్విపంచాశతా।
తన్మూలేష్టయుతే హృతేచదశభి ర్జాతంద్వయం బ్రూహితం
రాశిం వేత్సిహిచంచలాక్షి విమలాం బాలే.విలోమక్రియాం॥౧౩॥

న్యాసః. గుణః౩, క్షేపః $\frac{౩}{౪}$, భాజకః౭, ఋణమ్ $\frac{౧}{౩}$, వర్గః, ఋణం౫౨, మూలమ్, క్షేపః౮, హారః౧౦, దృశ్యం౨, యథోక్తకరణేన జాతోరాశిః ౨౮

ఇతి వ్యస్తవిధిః

తా॥ ఓచంచలాక్షీ ! బాలా ! నీవుచక్కని వ్యస్తవిధి నెరుంగుదువేని ఏరాశిని 3చే గుణించి అందు స్వ$\frac{3}{4}$ కలిపి 7చే భాగించి దానివలన స్వ $\frac{1}{3}$ తీసివేసి దానిని వర్గించి దానివలన 52ను వ్యవకలించి దానియొక్క మూలమునందు 8ని కలిపి 10చే భాగింప 2 లబ్ధము వచ్చుచున్నదో ఆరాశిని చెప్పుము.

ఇచట గుణక3, ధన స్వ$\frac{3}{4}$, భాజక7, ఋణ స్వ$\frac{1}{3}$, వర్గ, ఋణ52, మూల, ధన8, భాజక10, దృశ్యము2, మొదటిరాశి యెద్ది? అని ప్రశ్నము. కావున

$$\sqrt{\left\{(\text{య} \times 3 + \text{స్వ}\tfrac{3}{4}) \div 7 - \text{స్వ}\tfrac{1}{3}\right\}^{2} - 52} + 8 \div 10 = 2$$

దీనికి తలక్రిందుగ

$$\sqrt{(2 \times 10 - 8)^{2} + 52} + \text{స్వ}\tfrac{1}{2} \times 7 - \text{స్వ}\ \tfrac{3}{7} \div 3 =$$

$$\sqrt{144 + 52} + \text{స్వ}\tfrac{1}{2} \times 7 - \text{స్వ}\ \tfrac{3}{7} \div 3$$

$= \frac{14}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{7}{1} \times \frac{4}{7} \times \frac{1}{3} = 14 \times 2 = 28$ ఇది అభీష్టరాశి యగుచున్నది.

స్వాంశానుబంధ స్వాంశాపవాహములందు నైపద్ధతి యనుసరింపబడినది.

ఇది వ్యస్తవిధి 5వ ప్రకరణము.

---

6 ప్రకరణము. ఇష్టకర్మ.

అథ ఇష్టకర్మను కరణసూత్రం వృత్తమ్

ఉద్దేశకాలాపవదిష్టరాశిః క్షుణ్ణోహృతోంశై రహితోయుతోవా।
ఇష్టాహతందృష్టమనేనభక్తం రాశిర్భవేత్ప్రోక్తమితీష్టకర్మ॥౩౧॥

టీ॥ ఇష్టరాశిః = అభీష్టసంఖ్య, ఉద్దేశకాలాపవత్ = ప్రశ్నించువాని వాక్యమునను సరించి, క్షుణ్ణః = గుణింపబడినదిగాని, హృతః = భాగింపబడినదిగాని, అంశైః = భాగములచే, రహితః = తీసివేయబడినదిగాని, యుతోవా = కలుపబడినదిగాని (చేయదగినది) ఇష్టాహతం = ఇష్టసంఖ్యచే గుణింపబడిన, దృష్టం = దృష్టసంఖ్య, అనేన = ప్రశ్నించువాని వాక్యమునను సరించి చేయగానైన సంఖ్యచే. భక్తం = భాగింపబడినదై, రాశిః = రాశి, భవేత్ = అగును ఇతి ఇష్టకర్మప్రోక్తం = ఇట్లు ఇష్టకర్మ చెప్పబడినది.

101. ప్ర. ప్రశ్నించువాని ప్రశ్నను బట్టి ఇష్టసంఖ్యయందు సంకలన వ్యవకలనగుణన భజనాదికమును చేసి దానిచే ప్రశ్నకు ఉత్తరమును చెప్పుట ఇష్టకర్మ. ఒకానొకరాశిని గుణించుట, భాగించుట, కలుపుట, తీసివేయుట మొదలగుక్రియల చేయుటచే తుదకు సిద్ధించినసంఖ్యనుబట్టి ఆఒకానొకరాశి నెరుంగవలసినచో ఒకఇష్టసంఖ్యనుకల్పించి దానియందు ప్రశ్నోక్తప్రకారము గుణనభజనాదికృత్యములచేయుము. అట్లుచేయగా తుదకు సిద్ధించినసంఖ్యచే దృష్టసంఖ్యను ఇష్టాంకముచేగుణించి భాగింపుము. ఆలబ్ధము ఆఒకానొక రాశియగును. ఈపద్ధతి ఉదాహరణమునందు స్పష్టముగాగలదు.

అత్రోద్దేశకః

పంచఘ్నస్స్వత్రిభాగోనో దశభక్తస్సమన్వితః
రాశిత్ర్యంశార్ధపాదైస్స్యాత్కో రాశిర్ద్వ్యూనసప్తతిః॥౯౬॥

న్యాసః, గుణః ౫, ఊనః $\frac{౧}{౩}$, హారః ౧౦ రాశ్యంశాః $\frac{౧}{౩}$, $\frac{౧}{౨}$, $\frac{౧}{౪}$, దృశ్యం ౬౮ అత్రకిలకల్పితరాశిః ౩ పంచఘ్నః ౧౫ స్వత్రిభాగోనః ౧౦ దశభక్తః ౧ కల్పితరాశే ౩ స్త్ర్యంశార్ధపాదైః $\frac{౩}{౩}$, $\frac{౩}{౨}$, $\frac{౩}{౪}$, సమన్వితః హారోజాతః $\frac{౧౭}{౪}$ అథదృష్టం ౬౮ ఇష్టేన ౩ గుణితం ౨౦౪ హారేణ $\frac{౧౭}{౪}$ భక్తంజాతోరాశిః ౪౮

తా॥ $\text{రా} \times 5 - \text{స్వ}\ \frac{1}{3} \div 10 + \frac{\text{రా}}{3} + \frac{\text{రా}}{2} + \frac{\text{రా}}{4} = 68$, రాశియెంత?

రా = రాశి ఇచట రాశిమానమునకు మారుగ ఇష్టసంఖ్యగ 3 ను కల్పించి అందు ప్రశ్నోక్తప్రకారముగణితముచేయగా $3 \times 5 - \text{స్వ}\ \frac{1}{3} \div 10 + \frac{3}{3} + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{10} + \frac{3}{3} + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{3}{2} + \frac{3}{4}$ $= \frac{4+4+6+3}{4} = \frac{17}{4}$ అగుచున్నది. ఇపుడు దృశ్యరాశి 68 ని ఇష్టము 3 చే గుణించి $\frac{17}{4}$ చే భాగింపగా రాశియగును.

$$\therefore 68 \times 3 \div \frac{17}{4} = \frac{68 \times 3 \times 4}{17} = 4 \times 3 \times 4 = 48 \text{ రాశి.}$$

రుజువు:— రాశి 48 గావున $48 \times 5 = 240$ ఇందు స్వ $\frac{1}{3}$ ను తీసివేయ 160 దీనిని 10 చే భాగింప 16 ఇందు రాశిత్ర్యంశము 16 అర్ధము 24 నాలవవంతు 12 కలుప 68 అగుచున్నది.

ఇట్లు 1 టి ఇష్టాంకమనుకొనుచో

$$1 \times 5 - \text{స్వ } \tfrac{1}{3} \div 10 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{5}{1} \times \tfrac{2}{3} \times \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}$$

$$= \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = \frac{4+4+6+3}{2} = \frac{17}{12}$$ దీనిచే దృశ్యమును ఇష్టముచే

గుణించి భాగింప $\frac{68}{1} \times \frac{1}{1} \times \frac{12}{17} = 48$ రాశి.

ఇట్లు ఏ అష్టాంకము కల్పించినను రాశిమానమగుచున్నది.

ఉపపత్తి:— ఒకసంఖ్యావలన అందలి మూడినవంతును తీసివేయాగా 12 మిగిలినది. ఆసంఖ్యఎంత ? ఈప్రశ్నమునందు అందలిమూడవవంతును తీసివేయాగా అందలి 2 మూడవవంతులు మిగిలినవి యనియు అది 12 అగుచున్నదియనియు స్పష్టము. రాశిలో $\frac{2}{3} = 12$ అగుచో రాశియెంతయని ప్రశ్నము సిద్ధించినది. రెండువంతుల మొత్తము 12 అగుటచే 1 వంతు ప్రమాణము 6 అనియు తెలియుచున్నది. దీనిచే రాశిమానము 18 యని చెప్పవలయును. ఇందు రాశి=1 అనుకొని సాధించితిమి.

ఇట్లు రాశి $= 2$ అనుకొనుచో $\frac{2}{1}$ — స్వ $\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ అగుచున్నది. ఇపుడు $\frac{4}{3} = 12$ అగును. ఇట్లు రాశి $= 3$ అనుకొనుచో ... ... $\frac{6}{3} = 12$ అగును. దీనింబట్టి ఇష్టసంఖ్య వృద్ధియైనకొలదిని దానియందుక్రియాను చేయగా తుదకు సిద్ధించుసంఖ్యయు వృద్ధినొందును అనియు, తగ్గినచో తగ్గుననియు తేలుచున్నది. ఇట్లు ఒకరాశినిబట్టి మరియొకరాశి వృద్ధిక్షయముల నొందినపుడు అనుపాతము చేయదగియున్నది (త్రైరాశికము చూ) కావున రాశి 1టి అనుకొనిన ప్పటిసంఖ్య $\frac{2}{3}$ ఇది దృశ్యము 12 తో సమమగుచో 1 టి యెంత ?

ఇట్లు 2 ఇష్టమగుచో $\frac{4}{3}$ ఇది దృశ్యము 12 తో సమమగుచో 2 యొక్క ప్రమాణమెంత ? ఇట్లు త్రైరాశికముచే దీనియుపపత్తి స్పష్టమగుచున్నది. అనగా

ఇష్టసంఖ్యకును, ఇష్టసంఖ్యాసంబంధిదృష్టమునకుగల సంబంధమే రాశికిని రాశిసంబంధిదృష్టసంఖ్యకును అగుటచే త్రైరాశిక (అనుపాత)ము చేయబడినది. ఎట్లనగా:-

$$\text{ఇ} : \text{ఇదృ} : : \text{రా} : \text{దృ} \quad \therefore \frac{\text{ఇ}}{\text{ఇదృ}} = \frac{\text{రా}}{\text{దృ}} \quad \therefore \text{రా} = \frac{\text{ఇ} \times \text{దృ}}{\text{ఇదృ}}$$

ఏవంసర్వత్రోదాహరణేరాశిః కేనచిద్గుణితోభక్తోవా రాశ్యంశేనరహితోయుతోవా దృష్టస్తత్రేష్టంరాశింప్రకల్ప్య తస్మిన్నుద్దేశకాలాపవత్కర్మణికృతే యన్నిష్పద్యతే తేనభజేద్దృష్టమిష్టగుణం ఫలంరాశిస్స్యాత్ ॥

ఇట్లు అన్ని ఉదాహరణములందును రాశిఒకానొకసంఖ్యచే గుణింపబడినదైనను భాగింపబడినదైనను లేక రాశ్యంశములచే తీసివేయబడినదైనను కలుపబడినదైనను దృష్టసంఖ్యగనున్నచో అచటఇష్టరాశినికల్పించి దానియందు ప్రశ్నకునియొక్క వాక్యమునననుసరించి గణితమును చేయగా తుదయందు ఏసంఖ్యలు గలుగుచున్నదో ఆసంఖ్యచే దృష్టసంఖ్యను ఇష్టాంకముచే గుణించిభాగించినచో లబ్ధము రాశియగును.

అపరోదాహరణమ్.

అమలకమలరాశే స్త్ర్యంశపంచాంశషష్ఠైః త్రినయనహరిసూర్యాయేనతుర్యేణచార్యా। గురుపదమథషడ్భిఃపూజితం శేషపద్మైస్సకలకమలసంఖ్యాం క్షిప్రమాఖ్యాహితస్య॥ ౧౭॥

న్యాసః $\frac{౧}{౩}, \frac{౧}{౫}, \frac{౧}{౬}, \frac{౧}{౪}$ దృశ్యమ్౬. అత్రేష్టమేకం రాశింపరికల్ప్యప్రాగ్వజ్జాతోరాశిః ౧౨౦

తా॥ ఒకడుమంచితామరపూవులసముదాయమునుండి ఆరాశియొక్క 3వవంతుచే శివుని, 5వవంతుచే విష్ణుని, 6వ వంతుచేసూర్యుని, 4వ వంతుచేపార్వతిని పూజించెను, ఇట్లుపూజింపగామిగిలిన 6 పూవులచే గురుపాదమును పూజించెను. ఆతామర పూవులసంఖ్యయెంత ?

ఇచట 1టిఇష్టముగాకల్పించి దానివలన రాశిభాగములతీసివేసి ఆశేషముచే ఇష్టగుణితదృశ్యమును భాగింప రాశియగును. కావున

$$\frac{1}{1} - \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{1} - \left(\frac{20+12+10+15}{60}\right)$$

$$= \frac{60}{60} - \frac{57}{60} = \frac{3}{60}$$ శేషము.

6 దృశ్యము 1 ఇష్టము ∴ $\frac{6}{1}\times\frac{1}{1}\div\frac{3}{60} = \frac{6}{1}\times\frac{60}{3}$ =120పద్మసంఖ్య

రుజువు:- పద్మములలో 3 వ వంతు 40, 5 వ వంతు 24, 6 వ వంతు 20, 4 వ వంతు 30 మొత్తము 114 ను తీసివేయ 6 దృశ్యమగుచున్నది.

లేక రాశిభాగముల యోగము $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{57}{60}=\frac{19}{20}$ అనగా ఒక రాశివలన $\frac{19}{20}$ ని తీసివేయగా 6 శేషము మిగిలినది. ఈ ప్రశ్నయందు $\frac{19}{20}$ రాశియొక్క స్వాంశముగుచున్నది. కావున (100 ప్ర 2) చే 6 నందు $\frac{19}{20}$ ని కలుపవలయును. అనగా రాశి — స్వ $\frac{19}{20}$ = 6 ∴ $\frac{6}{1}+$స్వ$\frac{-19}{1}$ $=\frac{6}{1}\times\frac{20}{1}$ = 120 అగుచున్నది. ఇట్లు వ్యస్తవిధిచేతనున్ను చేయవచ్చును.

శేషజాత్యుదాహరణం.

స్వార్థం ప్రాదాత్ప్రయాగే నవలవయుగళం యోప శేషాచ్చ కాశ్యాం
శేషాంఘ్రిం శుల్కహేతోః పథిదశమలవాన్షట్చ శేషాద్గయాయాం।
శిష్టానిష్కత్రిషష్టిర్నిజగృహమనయాత్తీర్థపాంథః ప్రయాత
స్తస్యద్రవ్యప్రమాణం వద యదిభవతా శేషజాతిశ్శ్రుతాస్తి॥ ౧౮

న్యాసః $\frac{౧}{౨}$ $\frac{౨}{౯}$ $\frac{౧}{౪}$ $\frac{౬}{౧౦}$ దృశ్యం ౬౩ అత్రరూపం ౧ రాశిం ప్రకల్ప్య భాగాన్ శేషాచ్ఛేషాదపాస్య జాతం $\frac{౭}{౬౦}$ అథవా భాగాపవాహ (స్వాంశాపవాహ) విధినా సవర్ణితే జాతం $\frac{౭}{౬౦}$ అనేన దృశ్యే ౬౩ ఇష్టగుణితే భక్తే జాతం ద్రవ్యప్రమాణం ౫౪౦ ఇదం విలోమసూత్రేణాపి సిద్ధ్యతి.

తా॥ ఒకయాత్రికుడు ప్రయాగయందు తనవద్దనున్న ధనములో $\frac{1}{2}$ ను వ్యయముచేసెను. మిగిలిన సొమ్ములో $\frac{2}{9}$ ను కాశియందు వ్యయపరచెను. మిగిలినసొమ్ములో $\frac{1}{4}$ ను మార్గమందు శుల్కముకొరకు (ఆయాస్థలములందు యాత్రికులియ్యవలసినపన్ను) వ్యయపరిచెను. మిగిలినసొమ్ములో $\frac{6}{10}$ ను గయయందు వ్యయము చేసెను. ఇట్లు వ్యయముచేయగా వానివద్ద రూ 63 నిష్కములు మిగిలెను ఆధనముతో ఆయాత్రికుడు ఇల్లుచేరెను నీవు శేషజాతిని ఎరిగితివేని ఆయాత్రికుడు మొదటతీసుకొని వెళ్ళినద్రవ్యమెంత ?

ఇట్లు శేషించినద్రవ్యమునుండి తిరుగతిరుగ స్వాంశములుతీసివేయుచు రాగా తుదకు శేషించినద్రవ్యము దృష్టసంఖ్యగానున్నపుడు ఆప్రశ్నము శేషజాతిలోనిది.

(1) ఇచటఇష్టము 1 టి కల్పింపబడెను. ప్రశ్నానుసారము ఆయాభాగములను స్వాంశాపవాహవిధిచే ఆయాశేషములనుండి తీసివేయవలెను. ఎట్లనగా 1 — స్వ $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$. తిరుగా $\frac{1}{2}$ — స్వ $\frac{2}{9}$ = $\frac{7}{18}$ తిరుగ $\frac{7}{18}$ — స్వ $\frac{1}{4}$ = $\frac{7}{18}\times\frac{3}{4} = \frac{7}{24}$ దీనివలన $\frac{7}{24}$ — స్వ $\frac{6}{10}$ = $\frac{7}{24}\times\frac{4}{10} = \frac{7}{60}$ తుదిశేషము.

∴ $63 \times 1 \div \frac{7}{60} = \frac{63 \times 60}{7} = 540$ రాశి

(2) స్వాంశాపవాహవిధిచె (75 ప్ర) ఒకమారుగనైనను సవర్ణింపవచ్చును.

$\frac{1}{2}$ — స్వ $\frac{2}{9}$ — స్వ $\frac{1}{4}$ — స్వ $\frac{6}{10}$ = $\frac{1}{2}\times\frac{7}{9}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{10}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{7}{3}\times\frac{1}{1}\times\frac{1}{10}=\frac{7}{60}$ ఇది తుదిశేషము. దీనిచే పూర్వప్రకారము $63\times\frac{60}{7}$ = 540 రాశి యగుచున్నది. పై 1 ప్రకారమునందు ఆయాశేషములవలన వేర్వేరుగ భాగములు తీసివేయబడినవి. ఆగణితము 2 ప్రకారమునందు ఒకమారు చేయబడినది. అంతకంటె భేదములేదు. ఈరెండవప్రకారమునుసరించి ఒక పూర్వగణకసూత్రము చూపబడుచున్నది.

(3) "భిన్నాత్తభక్తేన లవోనహారఘాతేన భాజ్యః ప్రకటాఖ్యరాశిః।
రాశిర్భవేచ్ఛేషలవే తథేదం విలోమసూత్రాదపిసిద్ధమేతి॥"

ఇట్టిశేషజాతి ప్రశ్నములందు ఆయాహారములవలన ఆయాలవములను తీసివేసి వాటిపరస్పరగుణనమును, హారములపరస్పరగుణనముచే భాగించి ఆలబ్ధముచే దృశ్యరాశినిభాగింప రాశిప్రమాణము అగుచున్నది. ఇది వ్యస్తవిధిచేతనైనను సిద్ధించును.

ఎట్లనగా $\frac{1}{2}, \frac{2}{9}, \frac{1}{4}, \frac{6}{10}$ ఇందులవోనహారముల గుణనము $(2 - 1) \times (9 - 2) \times (4 - 1) \times (10 - 6) = 1 \times 7 \times 3 \times 4$ దీనిని హారముల గుణనము $2 \times 9 \times 4 \times 10$ చే భాగింప $\frac{1 \times 7 \times 3 \times 4}{2 \times 9 \times 4 \times 10} = \frac{7}{60}$ లబ్ధమగుచున్నది దీనిచే దృశ్యరాశిని భాగింప $\frac{63}{1} \div \frac{7}{60} = 63 \times \frac{.60}{7} = 9 \times 60 = 540$ రాశియైనది.

(4) వ్యస్తవిధి (100 ప్రి 2) చే దృశ్యరాశియందు ఈభాగములగలిపినను రాశియగును. ఎట్లనగా $\frac{63}{1}$ + స్వ $\frac{6}{4}$ + స్వ $\frac{1}{3}$ + స్వ $\frac{2}{7}$ + స్వ $\frac{1}{1}$ $= \frac{63}{1} \times \frac{60}{4} \times \frac{4}{3} \times \frac{9}{7} \times \frac{2}{1} = \frac{63}{1} \times \frac{10}{1} \times \frac{1}{1} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{1} = 9 \times 10 \times 3 \times 2 = 540$ రాశియగుచున్నది.

విశ్లేషజాత్యుదాహరణమ్

పంచాంశోలికులాత్కదంబమగమత్త్ర్యంశశ్శిలీంధ్రం
తయోర్విశ్లేషస్త్రిగుణో మృగాక్షి కుటజం దోలాయమానోఽపరః।
కాన్తే కేతకమాలతీపరిమలప్రాప్తైకకాలప్రియా-
దూతాహూత ఇతస్తతో భ్రమతి ఖే భృంగోఽలిసంఖ్యాం వద॥ ౧౮॥

న్యాసః $\frac{౧}{౫}, \frac{౧}{౩}, \frac{౨}{౫}$ దృశ్యమ్ ౧ జాతమలికులమానమ్ ౧౫ ఏవమన్యత్రాపి దర్శనీయమ్. ఇతీష్టకర్మ.

తా॥ ఒకఉద్యానవనమునందు తుమ్మెదలగుంపు గలదు మృగాక్షీ! అందు 5 వ భాగము కడిమిచెట్టును పొందెను. ఆమొత్తముయొక్క 3 వ వంతు నేలతాడిని పొందెను. ఆ 5 వ వంతుయొక్కయు ఆ 3 వ వంతుయొక్కయు అంతరమును 3 చే గుణింపనగు సంఖ్యగల తుమ్మెదలు గిరిమల్లిక నొందెనవి కాంతా! ఒకతుమ్మెద కేతకపరిమళము మాలతీపరిమళము అనెడు ఒకేసమయమందు వచ్చిన ఇద్దరు ప్రియురాండ్రయొక్క దూతలచే పిలువబడినదియై (ఇరువైపులనుండియు వేరువేరుపరిమళవాయువులు వీచుటచే) ఆకసమున నిటునటు తిరుగులాడుచున్నది. తుమ్మెదలెన్ని? చెప్పుము

ఉద:—ఇష్టసంఖ్య 1 టి $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{5}$ వీటియంతరము $\frac{5}{15} - \frac{3}{15} = \frac{2}{15}$. దీనిని 3 చే గుణింప $\frac{2}{15} \times 3 = \frac{2}{5}$ కనుకభాగములు $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}$ దృశ్యము 1 టి భాగముల

మొత్తము $\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{3+5+6}{15} = \frac{14}{15} \therefore \frac{1}{1} - \frac{14}{15} = 1 = \frac{1}{15}$

కావున రాశిమానము $1 \times 1 \div \frac{1}{15} = 15$ అగుచున్నది.

ఋజువు:- రాశి 15 లో, 5 వ వంతు 3, మూడవవంతు 5, వీటియంతరమును, 3 చే గుణింప 6, వీటియోగము 14, రాశిలో తీసివేయ 1, దృశ్యమైనది.

102. ప్రి (1) ఒకరాశిసంబంధమైన కొన్నిసంఖ్య దృష్టమైనపుడు ఒక ఇష్టసంఖ్యనుకల్పించి దానిచే రాశినిగనుగొనునట్లు రెండురాసులసంబంధములైన రెండుసంఖ్యలు దృష్టములగునపుడు రెండుఇష్టసంఖ్యలను గల్పించుకొని వాటిచే ఆరెండురాసులను గనుంగొనుట ద్విష్టకర్మ *

(2) తొలుతనొక యిష్టసంఖ్యను కల్పించి ఆఇష్టసంఖ్యయందు ప్రశ్నోక్త ప్రకారము పైపద్ధతిచే గుణనభజనాదికమును చేసి రెండుపక్షములను సాధింపుము. ఆరెండిటికిని అంతరమును చేయుము. ఆఅంతరము మొదటిపక్షసంఖ్య పెద్దదియగుచో ధనము. రెండవపక్షసంఖ్య పెద్దదియగుచో ఋణము.

(3) ఇట్లు రెండవయిష్టసంఖ్యనుకల్పించి దానివలన రెండుపక్షములను సాధించి పైప్రకారము అంతరమును గనుగొనుము

(4) ఆఅంతరములను పరస్పరసంబంధమగు ఇష్టసంఖ్యలచేగుణించి ఈగుణనఫలముల అంతరమును ఆఅంతరముల అంతరముచే భాగింప లబ్ధమిష్టరాశి యగును. ఇట్లు అంతరములు రెండును ధనమైనను రెండునుఋణమైనను చేయవలయును.

(5) ఒకఅంతరముధనము, ఒకఅంతరము ఋణము అయినచో ఆగుణనఫలములయోగమును అంతరముల యోగముచే భాగింపవలయును. లబ్ధమిష్టరాశి. దీనిచే రెండురాసులును తెలియబడును.

---

* మ. మ. పం. సుధాకరులవారి శ్లోకములు.
ఉద్దేశకాలాపవదిష్టరాశిః క్షుణ్ణో హృతో భాగయుతోనితో వా।
స్వదృష్టహీనా పరికల్ప్య శేషౌ క్రమేణ చాన్యోన్యతదిష్టనిఘ్నౌ॥ 1
తదంతరం శేషవియోగభక్తం రాశిర్భవేచ్ఛేషమితీ ధనర్ణే।
చేత్తద్యుతిశ్శేషజయోగభక్తా రాశిస్తథా ద్వీష్టజకర్మణా స్యాత్॥ 2

(1) ఉదా:— బీజగణితమందు భాస్కరాచార్యుల యుదాహరణములు.

ఒకనివద్ద 6 గుఱ్ఱములును రు 300 లును గలవు. రెండవవానివద్ద 10 గుఱ్ఱములు గలవు వానికి రు 100 లు ఋణముండెను. గుఱ్ఱముల వెల సమానము వారిద్దరి వద్దను ఆస్తిసమాన మగుచున్నది. గుఱ్ఱము వెల యెంత ?

మొదటిఇష్టసంఖ్య10 రెండవ ఇష్టసంఖ్య 20 కల్పింపబడెను. ఈఇష్టసంఖ్య అశ్వమూల్యముగ కల్పింపబడినది. దానింబట్టి మొదటఇష్టసంఖ్యచే మొదటివానిధనము $6 \times 10 + 300$ ఇట్లు రెండవవానిధనము $10 \times 10 - 100$ అగుచున్నది. ఈరెండుపక్షములయొక్కయు అంతరము (1) $360 - 0 = +360$ ఇట్లు రెండవఇష్టసంఖ్యచే మొదటివానిధనము $\times 20 + 300 = 120 + 300 = 420$ రెండవవానిధనము $10 \times 20 - 100 = 200 - 100 = 100$, ఈరెండు పక్షములయొక్కయు అంతరము (2) $420 - 100 = +320$ ఇందు (1) ఇష్టము 10 (2) ఇష్టము 20 కావున $\frac{360 \times 20 - 320 \times 10}{360 - 320} = \frac{7200 - 3200}{40}$

$= \frac{400}{4} = 100$ ఇది అశ్వమూల్యము అగుచున్నది. కావున మొదటివానిధనము $6 \times 100 + 300 = 900$. రెండవవానిధనము $10 \times 100 - 100 = 900$ లును అగుచున్నది.

(2) ఉదా:— పైప్రశ్నమునందువలె అశ్వములును ధనఋణములును గలవు. అశ్వమూల్యము సమానమేకాని మొదటివానిధనమును సగముచేసి అందు 2 ను కలుపనెంతయగునో అంత రెండవవాని ధనమగుచున్నది. అపుడశ్వమూల్యమెంత ? (1) ఇష్టము 50 (2) ఇష్టము 80 ప్రశ్నానుసారము మొదటిఇష్టముచే మొదటివానిధనము 600 అగుచో (1) రెండవవానిధనము 302 అగుచున్నది. అట్లు రెండవపక్షమున మొదటియిష్టముచే (2) $50 \times 10 - 100 = 400$ అగుచున్నది. రెండిటియొక్కయు (1) అంతరము -98 ఈఅంతరము ఋణము.

ఇట్లు రెండవఇష్టము 80 చే మొదటివానిధనము 780 దీనింబట్టి (1) రెండవవానిధనము 392 అట్లు (2) రెండవవానిధనము 700 రెండిటియొక్కయు (2)అంతరము $392 - 700 = -308$ ఇదియును ఋణమగుచున్నది.

$$\therefore \frac{308 \times 50 - 80 \times 98}{308 - 98} = \frac{15400 - 7840}{210} = \frac{7560}{21} = 36 \text{ అశ్వమూల్యము.}$$

(3) ఉదా:—ఇద్దరు ధనికులుగలరు. రెండవవాడు రు 100 లను మొదటివానికిచ్చినచో అపుడు మొదటివానివద్ద రెండవవానిధనమునకు రెట్టింపుధనముండును. లేక మొదటివాడు రు 10 లను రెండవవానికిచ్చినచో రెండవవానివద్ద మొదటివానిధనమునకు 6 రెట్లుండును. వారివద్ద తొలుతనున్న ధనమెంత ?

ఇచట ఎట్లైనచో ప్రశ్నములోని ఒకభాగము సరిపడునో అట్లు రెండు ఇష్టసంఖ్యలను ఇద్దరిధనములుగను కల్పింపవలయును. కావున మొదటివాని ధనము 60. రెండవవానిధనము 180 కల్పింపబడెను. ఇచట రెండవవానిధనములో రు 100 లను మొదటివానికిచ్చినచో అపుడు మొదటివానిధనము రెట్టింపగును. ఇట్లు మొదటిప్రశ్నభాగము సరిపడుచున్నది. రెండవప్రశ్నభాగమునందు మొదటివానిధనము 60 వలన 10 తీసివేయ 50 దీనిని 6 చే గుణింప 300 ఇది రెండవవానిధనము 180 లో 10 ని కలుప 190 తో సరిపడుటలేదు. కావున ఈరెండుపక్షములయొక్కయు (1) అంతరము $300 - 190 = 110$ అగుచున్నది. ఇట్లు తిరుగ రెండుఇష్టసంఖ్యలు (1) 20 (2) 160 కల్పింపబడినవి. ఇందును మొదటిప్రశ్నభాగము సరిపడుచున్నది. ఇందును రెండవప్రశ్నభాగమునందు మొదటివానిధనము 20 నుండి 10 ని తీసివేసి 6 చే గుణింప 60 యగుచున్నది. ఇది రెండవవానిధనము 160లో 10 ని కలుప 170 తో సరిపడుటలేదు. కావున ఈరెండుపక్షములయొక్కయు (2) అంతరము $60 - 170 = -110$ ఇది ఋణమగుచున్నది. ఇందు (1) ఇష్టము 60 (2) ఇష్టము 20 (1) అంతరము $+110$ (2) అంతరము -110.

$$\therefore \frac{110 \times 60 + 110 \times 20}{110 + 110} = \frac{8800}{220} = 40 \text{ మొదటివానిధనము.}$$

దీనింబట్టి రెండవవానిధనము 170 అగుచున్నది.

ఈపద్ధతియొక్క ఉపపత్తి బీజప్రక్రియచే (1 ఉదా. చూ.)

$6 \times$ యా $+ 300 = 10 \times$ యా $- 100$ ఇందు యా $=$ అశ్వమూల్యము. కల్పనచే క $\times$ యా $+$ ర $=$ గ $\times$ యా $-$ వ

$\therefore$ క $\times$ యా $+$ ర $-$ (గ $\times$ యా $-$ వ) $= 0$

$=$ (క $-$ గ) యా $+$ ర $+$ వ $= 0$

ఇచట తెలియవలసినది (అవ్యక్తము) యామానము. కావున రెండు ఇష్ట సంఖ్యలను వేరువేరుగ యామానముగ కల్పించి వాటివాటియంతరములచే రెండు తుల్యపక్షముల సాధించి ఆసమీకరణముచే యామానము నెరుంగవలెను. మొదటి ఇష్టము = ఇ రెండవఇష్టము = ఇ' (దీనిని స్వరవిశిష్ట ఇకారమనెదరు) యామానముచేనైన పక్షమునకును ఇష్టముచేనైనపక్షమునకును అంతరము = అం, ఇట్లు రెండవ ఇష్టముచేనైన అంతరము = అం' అనుకొనుము.

ఇపుడు అవ్యక్తము 'యా' అనుచో (1) పక్షము (క — గ) యా + ర + వ = 0

,, ఇ అగుచో (2) పక్షము (క — గ) ఇ + ర + వ = శే

ఈరెండుపక్షములకును అంతరము, (క — గ) ఇ — (క — గ) యా = అం

ఇట్లు రెండవఇష్టము 'ఇ'' చే (2) పక్షము (క — గ) ఇ' + ర + వ = శే' ఈపక్షమునకు యాకారముచేనైన (1) పక్షమునకును అంతరము, (క — గ) ఇ' — (క — గ) యా = అం' ఇపుడు రెండుఅంతరములకును భాగహారమును చేయగా

అం ÷ అం' = {(క — గ) ఇ — (క — గ) యా} ÷ {(క — గ) ఇ' — (క — గ) యా}

= అం ÷ అం' = (క — గ) (ఇ — యా) ÷ (క — గ) (ఇ' — యా)

∴ అం / అం' = (క — గ) (ఇ — యా) / (క — గ) (ఇ' — యా) సమచ్ఛేదములుగ చేయగా

అం × (క — గ) × (ఇ' — యా) / అం' × (క — గ) × (ఇ — యా) = అం' × (క — గ) × (ఇ — యా) / అం' × (క — గ) × (ఇ — యా)

∴ అం × (క — గ) × (ఇ' — యా) = అం' × (క — గ) × (ఇ — యా) కావున

అం × (ఇ' — యా) = అం' × (ఇ — యా) = అం × ఇ' — అం × యా

= అం' × ఇ — అం' × యా = అం × ఇ' — అం × యా సమశోధనాధికముచే

అం × యా — అం' × యా = అం × ఇ' — అం' × ఇ

∴ యా = (అం × ఇ' — అం' × ఇ) / (అం — అం') అగుచున్నది.

ఇచట ఒకఅంతరము ధనము మరియొకఅంతరము ఋణము అగుచో ధనర్ణ వ్యవకలనముచే 'సంశోధ్యమాన మృణంధనంభవతి' ఇత్యాది బీజసూత్రముచే గుణన ఫలములకును అంతరములకును యోగము చేయవలయును. ఇట్లు ద్వీష్టకర్మపద్ధతి ఉపపన్నమగుచున్నది.

ఇది 6 ప్రకరణము ఇష్టకర్మ

---

7 వ ప్రకరణము.

సంక్రమణము.

సంక్రమణేసూత్రం వృత్తార్ధమ్

యోగోంతరేణోనయుతోర్ధితస్తౌరాశీస్మృతం సంక్రమణాఖ్యమేతత్

టీ॥ యోగః = రాశియోగము, అంతరేణ = రాశ్యంతరముచే, ఊనయుతః = తీసివేయబడినదిగను కలుపబడినదిగను, అర్ధితః = అర్ధింపబడినదిగను (చేయుదగినది) తౌ = ఆఅర్ధములు, రాశీ = రాసులు, ఏతత్ సంక్రమణాఖ్యం స్మృతం = ఇది సంక్రమణమని చెప్పబడినది.

103. ప్ర. రెండురాసులయొక్క యోగమున్ను అంతరమున్ను తెలియబడినపుడు ఒకచోట ఆయోగమునందు అంతరమును కలుపుము, మరియొకచో యోగమువలన అంతరమును వ్యవకలింపుము. ఈరెండిటిని వేర్వేర 2 చే భాగింపుము. ఆలబ్ధములు రాసులగుచున్నవి. (ఇది సంక్రమణమని చెప్పబడును.)

అత్రోద్దేశకః

యయోర్యోగశ్శతంసైకం యోగఃపంచవింశతిః।

తౌరాశీవదమేవత్స వేత్సిసంక్రమణంయది॥ ౧౯॥

న్యాసః. యోగః ౧౦౧ అంతరం ౪౯ జాతౌ రాశీ ౭౫,౨౬.

తా॥ వత్సా! నీవు సంక్రమణము నెరుంగుదువేని రెండుసంఖ్యలయోగము 101 అంతరము 25 అగుచో ఆసంఖ్యలెవ్వి ? చెప్పుము.

సూత్రప్రకారము $\frac{101+25}{2} = 63$, $\frac{101-25}{2} = 38$

(1) 63 (2) 38 రాసులు అగుచున్నవి.

ఉపపత్తి: యా = పెద్దరాశి కా = చిన్నరాశి

యా + కా = యోగ యా — కా = అంతర అనుకొందము.

$\text{యోగ} + \text{అంతర} = (\text{యా} + \text{కా}) + (\text{యా} - \text{కా}) = 2\ \text{యా}$

$\text{యోగ} - \text{అంతర} = (\text{యా} + \text{కా}) - (\text{యా} - \text{కా}) = 2\ \text{కా}$

$$\therefore \frac{(\text{యా}+\text{కా})+(\text{యా}-\text{కా})}{2} = \frac{\text{యో}+\text{అం}}{2} = \text{యా}$$

$$\frac{(\text{యా}+\text{కా})-(\text{యా}-\text{క})}{2} = \frac{\text{యో}-\text{అం}}{2} = \text{కా}$$

వర్గసంక్రమణే కరణసూత్రం వృత్తార్ధం

వర్గాంతరం రాశివియోగభక్తం యోగస్తతఃప్రోక్తవదేవ రాశీ॥ 3౨॥

టీ॥ వర్గాంతరం = వర్గాంతరము, రాశివియోగభక్తం = రాశ్యంతరముచే భాగింపబడినదై, యోగః = రాశియోగము (అగును) తతః = పిమ్మట, ప్రోక్తవదేవ = చెప్పబడినరీతిగనే, రాశీ = రాసులు (సాధింపదగినవి).

104. ప్ర. రెండురాసులయొక్క వర్గాంతరము రాశ్యంతరము తెలిసినచో వర్గాంతరమును రాశ్యంతరముచే భాగింప రాశియోగమగును రాశియోగ రాశ్యంతరములచే (103 ప్ర) రాసులు తెలియబడును.

అత్రోద్దేశకః

రాశ్యోర్యయోర్వియోగోష్టౌ తత్కృత్యోశ్చచతుశ్శతీ।
వివరంవదతౌరాశీ శీఘ్రం గణితకోవిద॥ ౨౦॥

న్యాసః రాశ్యంతరం ౮ కృత్యంతరం ౪౦౦ జాతౌరాశీ ౨౯, ౨౧

రెండురాసులఅంతరము 8 వాటివర్గాంతరము 400 ఓగణితవిద్వాంసుడా ! శీఘ్రముగ ఆరాసులను చెప్పుము.

ఉదా:—వర్గాంతరం 400 రాశ్యంతరం 8

పద్ధతిప్రకారము $400 \div 8 = 50$ రాశియోగము

పిమ్మట (103 ప్ర) $\frac{50+8}{2} = 29$ ఇట్లు $\frac{50-8}{2} = 21$ రాసులైనవి.

ఉపపత్తి:— యా, కా రెండురాసులగుచో

$(\text{యా} + \text{క}) \times (\text{యా} - \text{కా}) = \text{యా}^2 - \text{కా}^2$ అగుచున్నది

$$\therefore \frac{\text{యా}^2 - \text{కా}^2}{\text{యా} - \text{కా}} = \text{యా} + \text{కా} \text{ ఇట్లు } \frac{\text{యా}^2 - \text{కా}^2}{\text{యా} + \text{కా}} = \text{యా} - \text{కా}$$

(1)అను:—కావున వర్గాంతరమును రాశియోగముచే భాగించినరాశ్యంతరముఅగును. ఇదియే "వర్గాంతరస్య యోగాంతరఘాతసమత్వం" అనుసిద్ధాంతము. ఇట్లు బీజక్రియచే అనేకసిద్ధాంతములు బయల్వెడలినవి. అవికొన్ని యీదిగువ చూపబడుచున్నవి.

105. ప్ర. వర్గయోగమున్ను రాశియోగమున్ను తెలిసినచో వర్గయోగమును 2 చే గుణించి దానివలన యోగవర్గమును వ్యవకలింపుము. శేషము రాశ్యంతరవర్గమగును. దానిమూలము రాశ్యంతరము (103 ప్ర) రాశియోగ రాశ్యంతరములచే రాసులు తెలియబడును.

ఉదా:—వర్గయోగము 58 రాశియోగము 10 రాసులెవ్వి ?

$58 \times 2 \div 10^2 = 116 - 100 = 16$ దీనిమూలము $\sqrt{16} = 4$ రాశ్యంతరము. దీనిచే 7, 3 రాసులగుచున్నవి.

ఉపపత్తి: య, క రెండురాసులు. $(\text{య}+\text{క})$, $(\text{య}^2+\text{క}^2)$ తెలియబడెను. $(\text{య}+\text{క})^2 = \text{య}^2+\text{క}^2+2\,\text{యక}$ కావున

$(\text{య}+\text{క})^2-(\text{య}^2+\text{క}^2) = 2\,\text{య}\,\text{క}$ ఇట్లు $\text{య}^2+\text{క}^2-2\,\text{య}\,\text{క} = (\text{య}-\text{క})^2$

$\therefore (\text{య}-\text{క})^2 = \text{య}^2+\text{క}^2 - \{(\text{య}+\text{క})^2-(\text{య}^2+\text{క}^2)\}$ కోష్ఠముల విప్పగా $\therefore (\text{య}-\text{క})^2 = \text{య}^2+\text{క}^2+\text{య}^2+\text{క}^2-(\text{య}+\text{క})^2$

$= (\text{య}^2+\text{క}^2)\,2 - (\text{య}+\text{క})^2$ ఇట్లుపపన్నమగుచున్నది.

దానింబట్టి $2(\text{య}^2+\text{క}^2)=(\text{య}+\text{క})^2+(\text{య}-\text{క})^2$ అని తెలియుచున్నది.

(1) అను:—కావున ద్విగుణితవర్గయోగమువలన అంతరవర్గమును వ్యవకలింపగా యోగవర్గమగును. దానియొక్క మూలము యోగము కావున రాశివర్గయోగ రాశ్యంతరములవలన రాశియోగమును తెలిసికొని రాసుల నెరుంగవచ్చును.

ఉదా: రాశివర్గయోగము 58 రాశ్యంతరము 4

$58\times 2-4^2=116-16=100$ రాశియోగవర్గము. దీనిమూలము 10 రాశియోగము. దానిచే 7, 3 రాసులు.

106. ప్ర. రాశిగుణనఫలము వర్గయోగము తెలిసినచో

వర్గయోగమువలన ద్విగుణితరాశిగుణనమును తీసివేయుము. శేషము రాశ్యంతరవర్గమగును. పిమ్మట (105 ప్ర అను) రాశియోగమువలన రాసులు తెలియును.

ఉదా: రాశివర్గయోగము 58 రాశిగుణనము 21 రాసులెవ్వి ?

$58-(21\times 2)=58-42=16$ రాశ్యంతరవర్గము. దీనిని ద్విగుణ వర్గయోగము $58\times 2=116$ వలన తీసివేయుగా 100 రాశియోగవర్గము. (105 ప్ర అను చూ)

ఉపపత్తి: య, క రెండు రాసులు.

$(\text{య}-\text{క})^2=\text{య}^2+\text{క}^2-2\,\text{యక}$ ఇందు స్పష్టముగనున్నది.

107. ప్ర. వర్గయోగము వర్గాంతరము తెలిసినచో సంక్రమణసూత్రప్రకారము (103 ప్ర) చేసినచో వర్గములగును. వాటిమూలములు రాసులగును.

ఉదా:—వర్గయోగము 106 వర్గాంతరము 56 రాసులెవ్వి ?

$\frac{106+56}{2}=81$ ఇట్లు $\frac{106-56}{2}=25$ వీటిమూలములు 9, 5

ఉపపత్తి: వర్గయోగమును రాశియోగముగను వర్గాంతరమును రాశ్యంతరముగను భావించి (103 ప్ర) నందువలె చేసినచో వర్గములు రాగలవు. దానిచే స్పష్టమగును.

$(\text{య}^2+\text{క}^2)+(\text{య}^2-\text{క}^2)=2\text{య}^2$. ఇట్లు $(\text{య}^2+\text{క}^2)-(\text{య}^2-\text{క}^2)=2\text{క}^2$

108. ప్ర. రాశిద్వయయోగము రాశిద్వయగుణనము తెలిసినచో

రాశిగుణనమును 4 చే గుణించి యోగవర్గమువలన వ్యవకలింప రాశ్యంతరవర్గమగును

ఉదా: రాశియోగము 14 రాశిగుణనము 45

$14^2-45\times 4=196-180=16$ రాశ్యంతరవర్గము. మూలము 4 రాశ్యంతరము.

ఉపపత్తి: $(\text{య}+\text{క})^2-(\text{య}-\text{క})^2$

$=(\text{య}^2+\text{క}^2+2\,\text{య}\,\text{క})-(\text{య}^2+\text{క}^2-2\,\text{య}\,\text{క})=4\,\text{య}\,\text{క}$

$\therefore(\text{య}+\text{క})^2-4\,\text{య}\,\text{క}=(\text{య}-\text{క})^2$ అగుచున్నది.

(1) అను: $(\text{య}+\text{క})^2=(\text{య}-\text{క})^2+4\,\text{య}\,\text{క}$ కావున

రాశ్యంతరవర్గమునందు చతుర్గుణరాశిఘాతము గలిపినచో రాశియోగవర్గము అగునని తెలియుచున్నది.

(2) అను. వర్గయోగము, రాశిఘాతము, తెలిసినచో $\text{య}^2\times\text{క}^2=(\text{య}\times\text{క})^2$ కావున వర్గయోగమును రాశియోగముగను రాశిఘాతవర్గమును రాశిఘాతముగను భావించి ఈపద్ధతిచే చేసినచో రాశివర్గములగును. వాటిమూలములు రాసులు.

(3) అను. వర్గాంతరము రాశిఘాతము తెలిసినచో వర్గాంతరమును రాశ్యంతరముగను రాశిఘాతవర్గమును రాశిఘాతముగను భావించి (1 అను చే) చేయుము. రాశివర్గములగును.

109. ప్ర. (1) రెండు రాసులఘనాంతరమున్ను రాశ్యంతరమున్ను తెలిసినచో ఘనాంతరమును రాశ్యంతరముచే భాగించి అందు రాశ్యంతరవర్గమును వ్యవకలించి దానిని 3 చే భాగించిన రాశిఘాతమగును (108 ప్ర 1 అను)చే రాశియోగము తెలిసికొని రాసుల నెరుంగుము.

ఉదా:—రాశ్యంతరం 2 ఘనాంతరం 98 రాసులెవ్వి.

$98\div 2-2^2\div 3=45\div 3=15$ ఇది రాశిఘాతము. (108 ప్ర 1 అను చే) చతుర్గుణరాశిఘాతము $15\times 4=60$ నందు రాశ్యంతరవర్గము 4 ను కలుపగా 64 రాశియోగవర్గము. దీనిమూలము 8 రాశియోగము ఇందులకు మ. మ. పం. సుధాకరులవారిశ్లోకము.

"ఘనాంతరం రాశివియోగభక్తం వియోగకృత్యా రహితం త్రిభక్తం।
చతుర్గుణం రాశివియోగకృత్యా యుక్తం పదం యోగమితి స్ఫుటం స్యాత్॥"

ఉపపత్తి: $\text{య}^3 - \text{క}^3$, $\text{య} - \text{క}$ తెలిసినవి.

గుణ్యగుణకవిభాగముచే $\text{య}^3 - \text{క}^3 = (\text{య} - \text{క}) \times (\text{య}^2 + \text{క}^2 + \text{అక})$

ఈరెండుపక్షములను $(\text{య} - \text{క})$చే భాగింప $\dfrac{\text{య}^3 - \text{క}^3}{\text{య} - \text{క}} = \text{య}^2 + \text{క}^2 + \text{అ క}$

ఈరెండుపక్షములనుండియు రాశ్యంతరవర్గము $(\text{య} - \text{క})^2$ ను వ్యవకలింప $\dfrac{\text{య}^3 - \text{క}^3}{\text{య} - \text{క}} - (\text{య} - \text{క})^2 = 3\ \text{యక}$ దీనిని 3 చే భాగింప రాశిఘాతమగుచున్నది యనుట స్పష్టము.

(2) కావున $\dfrac{\dfrac{\text{య}^3 - \text{క}^3}{\text{య} - \text{క}} - (\text{య} - \text{క})^2}{3} = \text{య క}$ దీనియందు (108 ప్రి 2 అను చే)

$$\frac{4}{3}\left\{\frac{(\text{య}^3 - \text{క}^3)}{\text{య} - \text{క}} - (\text{య} - \text{క})^2\right\} + (\text{య} - \text{క})^2 = 4\ \text{య క} + (\text{య} - \text{క})^2$$

$$= (\text{య} + \text{క})^2 = \frac{4(\text{య}^3 - \text{క}^3) - 4(\text{య} - \text{క})^3}{3\ (\text{య} - \text{క})} + (\text{య} - \text{క})^2 = (\text{య} + \text{క})^2$$

$$= \frac{4\ (\text{య}^3 - \text{క}^3) - 4\ (\text{య} - \text{క})^3 + 3\ (\text{య} - \text{క})^3}{3\ (\text{య} - \text{క})} = (\text{య} + \text{క})^2$$

$$= \frac{4\ (\text{య}_3 - \text{క}^3) - (\text{య} - \text{క})^3}{3\ (\text{య} - \text{క})} = (\text{య} + \text{క})^2$$ యోగవర్గమగుచున్నది.

ఘనాంతరమును 4 చే గుణించి రాశ్యంతరఘనమును వ్యవకలించి త్రిగుణితరాశ్యంతరముచే భాగించినచో యోగవర్గమగునని తెలియుచున్నది.

ఇందులకు మ. మ. పం. బాపుదేవశాస్త్రిగారి శ్లోకము.

ఘనాంతరా చ్చతుర్నిఘ్నా ద్రాశ్యంతరఘనోనితాత్।
త్రిఘ్నరాశ్యంతరే ణాప్తాత్పదం రాశియుతిర్భవేత్॥

ఉదా:— పైఉదాహరణమునందే $98 \times 4 - 2^3 \div 3 \times 2$
$= 39? - 8 \div 6 = 384 \div 6\ 64$ ఇదిరాశియోగవర్గము, మూలము రాశియోగము

110. ప్రి. (1, ఇట్లు ఘనయోగము, రాశియోగము, తెలిసినచో ఘనయోగమును రాశియోగముచే భాగించి ఆలబ్ధమును రాశియోగవర్గమువలన తీసివేసి శేషమును $\frac{4}{3}$ చే గుణించి దానిని తిరుగరాశియోగవర్గమువలన వ్యవకలింప రాశ్యంతరవర్గమగును.

ఉదా:— రాశియోగము 8. ఘనయోగము 152 పద్ధతిప్రకారము

$$82 - \left[\left\{8^2 - (152 \div 8)\right\}\tfrac{4}{3}\right] = 64\left\{(64 - 19)\tfrac{4}{3}\right\} = 64 - 60 = 4$$

అంతరవర్గము.

ఉపపత్తి: $\text{య}^3 + \text{క}^3$, $\text{య} + \text{క}$ తెలిసినవి.

$\text{య}^3 + \text{క}^3 = (\text{య} + \text{క}) \times (\text{య}^2 + \text{క}^2 - \text{య క})$

రెండుపక్షములను $(\text{య} + \text{క})$చే భాగించి (-1)చే గుణించి $(\text{య} + \text{క})^2$ను కలుప $(\text{య} + \text{క})^2 - \dfrac{\text{య}^3 + \text{క}^3}{\text{య} + \text{క}} = 3\ \text{య క}$. రెండుపక్షములను 3 చే భాగింప రాశిఘాతమగును. పిమ్మట (108 ప్రి) పద్ధతిచే అంతరవర్గము.

$$(\text{య} + \text{క})^2 - \frac{4\left\{(\text{య} + \text{క})^2 - \dfrac{\text{య}^3 + \text{క}^3}{\text{య} + \text{క}}\right\}}{3} =$$

$(\text{య} + \text{క})^2 - 4\ \text{య క} = (\text{య} - \text{క})^2$

ఇట్లు పద్ధతి ఉపపన్నమగుచున్నది. దీనిని సవర్ణింపగా

$$(2)\ (\text{య} + \text{క})^2 - \frac{4\ (\text{య} + \text{క})^3 - (\text{య}^3 + \text{క}^3)\ 4}{3\ (\text{య} + \text{క})} = (\text{య} - \text{క})^2$$

$$= \frac{4\ (\text{య}^3 + \text{క}_3) \quad (\text{య} + \text{క})^3}{3\ (\text{య} + \text{క})} = (\text{య} - \text{క})^2$$ దీనిచే

ఘనయోగమును 4 చే గుణించి యోగఘనమును వ్యవకలించి త్రిగుణితయోగముచే భాగింప అంతరవర్గమగును. అని తెలియుచున్నది. ఇందులకు మరియు పద్యము.

ఘనయోగా చ్చతుర్నిఘ్నా ద్రాశియోగఘనోనితాత్।
త్రినిఘ్నరాశియోగాప్తాత్పదం రాశ్యంతరం భవేత్॥

ఇది 7 సంక్రమణ ప్రకరణము.

8 ప్రకరణము.

వర్గకర్మ

అథకించిద్వర్గకర్మప్రోచ్యతే

ఇష్టకృతి రష్టగుణితా వ్యేకాదలితా విభాజితేష్టేన
ఏకస్స్యా దస్యకృతిర్దలితాసైకా ఽపరోరాశిః॥ ౩౩॥
రూపంద్విగుణేష్టహృతంసేష్టం ప్రథమోథవాపరోరూపం।
కృతియుతివియుతీవ్యేకే వర్గౌ స్యాతాంయయోరాశ్యోః॥ ౩౪॥

టీ॥ ఇష్టకృతిః = ఇష్టాంకవర్గము, అష్టగుణితా = 8 చే గుణింపబడినదై, వ్యేకా = తీసివేయబడిన 1 టి గలదియై, దలితా = అర్థింపబడినదై. ఇష్టేన = ఆఇష్టాంకముచే, విభాజితా = భాగింపబడినదై, ఏకఃస్యాత్ = ఒకరాశిఅగును. అస్య = దీనియొక్క, కృతిః = వర్గము, దలితా = అర్ధింపబడినదై, సైకా = ఒకటితో కలుపబడినదై, అపరఃరాశిః = రెండవరాశి.

అథవా = లేక, రూపం = ఒకటి, ద్విగుణేష్టహృతం = రెండుచే గుణింపబడిన ఇష్టాంకముచే భాగింపబడినదై, సేష్టం = ఇష్టసంఖ్యతో కలుపబడినదై, ప్రథమః = మొదటిరాశి, రూపం = ఒకటి, అపరః = రెండవరాశి.

యయోః రాశ్యోః = ఏరెండురాసులయొక్క, కృతియుతివియుతీ = వర్గయోగమున్ను, వర్గాంతరమున్ను, వ్యేకే = ఒకటిచే తీసివేయబడినవియై, వర్గౌ స్యాతాం = వర్గరాసులు [మూలములభించునవి] అగుచున్నవో [అట్టిరాసులుఅగును.]

111. ప్ర. వర్గమునిమిత్తమగు గణితక్రియ వర్గకర్మ. అందును ఏరెండు రాసులయొక్క వర్గయోగమువలనగాని వర్గాంతరమువలనగాని 1 టిని తీసివేసినను, కలిపినను నిశ్శేషముగ మూలములభించునో అట్టిరాసులెవ్వి? ఇట్టిప్రశ్నమునందు ఆరెండురాసులను తెలిసికొనుటకు చేయుగణితము వర్గకర్మ. ఈగణితమునకు బీజగణితమున విశేషోపయోగముగలదు. ఇచట సంగ్రహముగఆచార్యులు 1 టిని వ్యవకలించు ప్రశ్నమున గణితమును సూచించియున్నారు.

(1) ఒకఇష్టాంకమును కల్పించి దానిని 8 చే గుణించి 1 టి వ్యవకలించి అర్ధించి ఇష్టాంకముచే భాగింప ఒకరాశియగును. ఈరాశియొక్క వర్గమునర్ధించి 1 టిని గలుప రెండవరాశియగును.

(2) ద్విగుణితమగు ఇష్టాంకముచే 1 టిని భాగించి ఇష్టాంకమును కలుప మొదటిరాశియగును. 1 టి రెండవరాశియగును.

వీటివర్గయోగవర్గాంతరములవలన 1 టిని తీసివేయ మూలమువచ్చును.

ఉద్దేశకః

రాశ్యోర్యయోః కృతివియోగయుతీ నిరేకే మూలప్రదే ప్రవద తౌ మమమిత్ర యత్ర। క్లిశ్యంతి బీజగణితేపటవోపి మూఢాః షోఢోక్త బీజగణితం పరిభావయంతః॥ ౨౧॥

అత్రప్రథమానయనే కల్పితమిష్టం $\frac{౧}{౨}$ అస్యకృతిః $\frac{౧}{౪}$ అష్టగుణా జాతః ౨ అయం వ్యేకః ౧ దలితః $\frac{౧}{౨}$ ఇష్టేన $\frac{౧}{౨}$ హృతో జాతఃప్రథమోరాశిః ౧

అస్యకృతిః ౧ దలితా $\frac{౧}{౨}$ సైకా $\frac{౩}{౨}$ అయమపరోరాశిః

ఏవమేతౌ రాశీ $\frac{౧}{౧}$, $\frac{౩}{౨}$ ఏవమేకేనేష్టేన జాతౌ రాశీ $\frac{౭}{౨}$, $\frac{౫౭}{౮}$ ద్వికేన $\frac{౩౧}{౪}$, $\frac{౯౯౩}{౩౨}$

అథద్వితీయప్రకారేణేష్టమ్ ౧ అనేనద్విగుణేనరూపం భక్తం $\frac{౧}{౨}$ ఇష్టేనసహితం జాతః ప్రథమోరాశిః $\frac{౩}{౨}$ ద్వితీయోరూపం ఏవం రాశీ $\frac{౩}{౨}$, $\frac{౧}{౧}$ ఏవం ద్వికేన $\frac{౯}{౪}$, $\frac{౧}{౧}$ త్రికేన $\frac{౧౯}{౬}$, $\frac{౧}{౧}$ త్ర్యంశేన జాతౌ రాశీ $\frac{౧౧}{౬}$, $\frac{౧}{౧}$

తా. ఏ రెండు రాసులయొక్క వర్గయోగమున్ను వర్గాంతరమున్ను ఒకటిచే తీసివేయబడి మూలమునిచ్చును ? ఆరాసులను నాకు చెప్పుము. మిత్రమా! బీజగణితమునందు సమర్థులయ్యును మందమతులై (కొంచెమామార్గమెరుంగక) అనుప్రకారములుగ చెప్పబడిన బీజగణితమును పరిభవించుచు ఈవిషయమై కష్టపడుచున్నారు (భాస్కర బీజగణితమునందు ధనర్ణపరికర్మప్రభృతిచక్రవాలాంతగణితము వక్ష్యమాణగణితోపయోగి అగుటచే ఒకప్రకరణమనుచో ఏకవర్ణసమీకరణ ఏకవర్ణమధ్యమాహరణ అనేకవర్ణసమీకరణ అనేకవర్ణమధ్యమాహరణ భావితములు ఐదుప్రకరణములగుటచే ఆరుప్రకరణములు బీజగణితమున గలవు. అనిచెప్పినట్లు దోచెడిని.)

ఉదా: $\frac{1}{2}$ ఇష్టముగ కల్పించి మొదటిప్రకారముచే

$(\frac{1}{2})^2 \times 8-1\div 2\div \frac{1}{2}=\frac{1}{4}\times 8-1\div 2\div \frac{1}{2}=\frac{1}{1}\div 2\div \frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times \frac{2}{1}=1$ ఇది ఒకరాశి.

మొదటిరాశి 1 దీనివర్గమువర్ధించి 1 టి గలుప $1^2\div 2+1=\frac{1}{2}+\frac{1}{1}=\frac{3}{2}$ రెండవరాశి.

(2) ఉదా: ఇట్లు 1 ఇష్టమగుచో
$1^2\times 8-1\div 2\div 1=\frac{7}{2}\div 1=\frac{7}{2}$ ఇదిఒకరాశి
$(\frac{7}{2})^2\div 2+1=\frac{49}{4}\div 2+1=\frac{49}{8}+\frac{1}{1}=\frac{57}{8}$ ఇది రెండవరాశి.
ఇట్లు 2 ఇష్టమగుచో $\frac{31}{4}$, $\frac{993}{32}$ రాసులగుచున్నవి.
లేక, రెండవప్రకారముచే ఇష్టాంకము 1 టి అయినపుడు

(3) ఉదా:— ద్విగుణితఇష్టాంకము 2 చే 1 టిని భాగించి ఇష్టాంకమును కలుప $\frac{1}{2}+\frac{1}{1}=\frac{3}{2}$ ఇది మొదటిరాశి. రెండవరాశియొకటి యగుచున్నది. కావున రాసులు $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{1}$

(4) ఉదా: ఇష్టము 2 అగుచో $1\div(2\times 2)+2=\frac{9}{4}$ మొదటిరాశి,ఒకటి రెండవరాశి ఇట్లు 3 ఇష్టమగుచో $\frac{19}{6}$, $\frac{1}{1}$ రాసులు.

(5) ఇష్టము $\frac{1}{3}$ అగుచో $\frac{1}{1}\div\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=\frac{3}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}$ మొదటిరాశి రెండవరాశి $\frac{1}{1}$

ఇట్లు ఇష్టాంకమునుబట్టి రాసులు భిన్నములుగ వచ్చుచున్నవి. ఆయారాసులయొక్క వర్గయోగవర్గాంతరములవలన 1 టిని వ్యవకలింప మూలమువచ్చును.

ఋజువు. రెండవఉదాహరణమునందలి రాసులు. $\frac{7}{2}$, $\frac{57}{8}$

$(\frac{7}{2})^2=\frac{49}{4}$, $(\frac{57}{8})^2=\frac{3249}{64}$ ఇప్పుడు $\frac{49}{4}+\frac{3249}{64}-\frac{1}{1}$
$=\frac{768}{64}+\frac{3249}{64}-\frac{64}{64}=\frac{3964}{64}$ దీనియొక్క మూలము $\frac{63}{8}$ అగుచున్నది.

ఇట్లు వర్గాంతరమువలన 1 టిని తీసివేయ $\frac{3249}{64}-\frac{768}{64}-\frac{64}{64}=\frac{2401}{64}$ దీనిమూలము $\frac{49}{8}$ అగుచున్నది. ఇట్లు అంతటను గ్రహింపదగినది.

ఉపపత్తి: అనేకవర్ణమధ్యమాహరణ (వర్గసమీకరణ)ముచే యా, క రెండు రాసులు కల్పింపబడెను. వీటివర్గాంతరమువలన 1 టిని తీసివేయగా ఒకానొకసంఖ్యయొక్క వర్గముకావలయును. అట్లుచేయగా

$\text{యా}^2-\text{క}^2-1$ ఇందు $-1+1$ దీనిని కలిపినను మార్పుగలుగదు కావున $\text{యా}^2-\text{క}^2-1=\text{యా}^2-\text{క}^2-2+1$ ఇపుడు ఇందు $-2\,\text{యా}=-\text{క}^2-2$ అనుకొనుచో $\text{యా}-1$ మూలమువచ్చుచున్నది కావున $-2\,\text{యా}=-\text{క}^2-2$ ఇట్లు కల్పింపబడెను. దానిచే

$\text{యా}=\frac{\text{క}^2+2}{2}=\text{క}^2\frac{1}{2}+1$ కావున $\text{క}^2\frac{1}{2}+1$, క ఇవిరాసులగుచున్నవి.

ఈరెండురాసులయొక్కయు వర్గయోగమువలన 1 టిని తీసివేయగా

$(\frac{1}{2}\text{క}^2+1)+\text{క}^2-1=\frac{\text{క}^4}{4}+2\,\text{క}^2$ ఇది ఒకానొకసంఖ్య ('నీ' అనుకొనుము. దాని)యొక్క వర్గమగుచున్నది. ఇపుడుమనకుతెలియవలసినది "క" మానము. కావున "వర్గమును వర్గముచే భాగించినను వర్గమేయగును" అను సిద్ధాంతమునుబట్టియు దీనిని క^2చే నపవర్తింప $(\frac{\text{క}^4}{4}+2\text{క}^2)\div\text{క}^2=\frac{\text{క}^2}{4}+2=\frac{1}{4}\text{క}^2+2$ దీనియొక్క మూలముకావలయును. ఇపుడు "ఇష్టభక్తో ద్విధాక్షేప ఇష్టోనాఢ్యో దలీకృతః।గుణమూలహృత శ్చాద్యో హ్రస్వజ్యేష్ఠే క్రమాత్పదే" అను భాస్కరీయ

బీజగణిత చక్రవాలసూత్రముచే $\frac{1}{2\text{ఇ}}$ దీనిని ఇష్టసంఖ్యగా కల్పించిచేయగా క మాన ము కనిష్ఠమూలము. మొత్తపుసంఖ్యామూలము జ్యేష్ఠమూలమున్ను అగును.

ఇచటగుణకము $\frac{1}{4}$ క్షేపము 2 ఇష్టసంఖ్య $\frac{1}{2\text{ఇ}}$ వై బీజగణిత సూత్రప్రకా రము క్షేపము 2 ను ఇష్టసంఖ్య $\frac{1}{2\text{ఇ}}$ చే భాగింప '4 ఇ' ఇంకు ఇష్టసంఖ్యను తీసి వేయగా $\frac{8\text{ ఇ}^2 - 1}{2\text{ఇ}}$ దీనిని అర్ధింప $\frac{8\text{ ఇ}^2 - 1}{4\text{ ఇ}}$ దీనిని గుణకము $\frac{1}{4}$ యొక్క మూలము $\frac{1}{2}$ చే భాగింప $\frac{8\text{ ఇ}^2 - 1}{2\text{ ఇ}}$ ఇది కనిష్ఠమూలము. కావున క $= \frac{8\text{ ఇ}^2 - 1}{2\text{ ఇ}}$ అగుచున్నది. $\frac{8\text{ ఇ}^2 + 1}{4\text{ ఇ}}$ ఇది జ్యేష్ఠమూలము ఇచట జ్యేష్ఠమూలముతో పనిలేదు.

పూర్వము య $= \frac{1}{2}\text{క}^2 + 1$ అని సాధింపబడినది. కావున

$\because$ క $= \frac{8\text{ ఇ}^2 - 1}{2\text{ ఇ}} \therefore$ య $= \left(\frac{8\text{ ఇ}^2 - 1}{2\text{ ఇ}}\right)^2 \frac{1}{2} + 1$ అగుచున్నది. దీనిచే "ఇష్ట కృతిరష్టగుణితేత్యాది సూత్రము (111 ప్ర 1 ప) యొక్క ఉపపత్తి స్పష్టమగు చున్నది. (111 ప్ర. 2 ప) "రూపం ద్విగుణేష్టహృత"మిత్యాది ప్రకారోపపత్తి

(1) య (2) 1 ఈరెండును రాసులుగ కల్పింపబడినవి.

$\text{య}_2 + 1^2 - 1 = \text{య}^2$ ఇట్లు ఒక ప్రశ్నభాగము సరిపడుచున్నది. అట్లు $\text{య}^2 - 1^2 - 1 = \text{య}^2 - 2$ ఇది ఒకానొకసంఖ్యయొక్క వర్గము కావలయును. $\therefore \text{య}^2 - 2 = \text{క}^2$ అనుకొనుచో $\text{య}^2 = \text{క}^2 + 2$ అగుచున్నది.

ఇచట $\text{క}^2 + 2$ దీనికి పైఉపపత్తియందువలెనే '2 ఇ' ఇష్టసంఖ్య కల్పించి "ఇష్టభక్తోద్విధా క్షేప" ఇత్యాది సూత్రముచే చేయగా జ్యేష్ఠమూలము.

$\frac{1 + 2\text{ ఇ}^2}{2\text{ ఇ}} = \frac{1}{2\text{ఇ}} + \text{ఇ}$ ఇది "య"మానమగుచున్నది. కావున $\frac{1}{2\text{ఇ}} + \text{ఇ}$, 1 ఇవి రాసులగుచున్నవి.

అథవా సూత్రమ్.

112 ప్ర. ఇష్టస్యవర్గవర్గో ఘనశ్చ తావష్టసంగుణౌ ప్రథమః|
సైకో రాశీస్యాతా మేవంవ్యక్తే ఽథవాఽవ్యక్తే॥ 35॥

టీ॥ ఇష్టస్య = ఇష్టసంఖ్యయొక్క, వర్గవర్గః = వర్గవర్గము, (చతుర్ఘాతము) ఘనశ్చ = ఘనమున్ను, తౌ = ఆరెండును అష్టసంగుణౌ = 8 చే గుణింపబడవలయును. ప్రథమః = మొదటిది (8 చేగుణింపబడినవర్గవర్గము) సైకః = ఒకటితోకూడినది కావలయును. ఏవంవ్యక్తే, అథవా అవ్యక్తే రాశీస్యాతాం = ఇట్లువ్యక్తగణితమందు గాని, అవ్యక్తగణితమందుగాని రాసులు అగును. వీటివర్గయోగ వర్గాంతరములు నిరేకములై మూలదము లగుచున్నవి.

న్యాసః ఇష్టమ్ ౧/౨ అస్యవర్గవర్గః ౧/౧౬ అష్టఘ్నః ౧/౨ సైకో జాతః ౩/౨ ప్రథమోరాశిః పునరిష్టమ్ ౧/౨ అస్యఘనః ౧/౮ అష్టగుణోజాతో ౧/౧ ద్వితీయోరాశిః ౧/౧ ఏవంజాతౌ రాశీ ౩/౨, ౧/౧ అథవ ఏకేనేష్టేన ౯, ౮ ద్వికేన ౧౨౯, ౬౪ త్రికేణ ౬౪౯, ౨౧౬ ఏవంసర్వేష్వపిప్రకారే ష్విష్టవశా దానన్త్యం.

ఉదా: ఇష్టము $\frac{1}{2}$ దీనివర్గవర్గము $\frac{1}{16}$ దీనిని 8 చే గుణింప $\frac{1}{2}$ ఒకటికలుప $\frac{3}{2}$ ఇదియొకరాశి, ఇష్టము $\frac{1}{2}$ యొక్క ఘనము $\frac{1}{8}$ రెండవరాశి.

ఇష్టము 2 అగుచో వర్గవర్గము 16 దీనిని 8 చే గుణింప 128 ఒకటికలుప 129 మొదటిరాశి. ఇష్టము 2 యొక్క ఘనము 8 దీనిని 8 చే గుణింప 64 రెండవరాశి

ఇష్టము 3 అగుచో 649, 216 రాసులు. ఇట్లు ఇష్టమునుబట్టి అనంతవిధము లగును.

ఉపపత్తి: ఇచట (1) య + 1 (2) క రాసులు కల్పింపబడెను.

వీటివర్గయోగమువర్గాంతరము $(\text{య} + 1)^2 \pm \text{క}^2 = (\text{య}^2 + 2\text{య} + 1) \pm \text{క}^2$

ఇందు ఒకటిని తీసివేయ $\text{యా}^2 + 2\,\text{యా} \pm \text{క}^2$ ఇది ఒకానొకసంఖ్యకు వర్గము కావలయును. ఇందు $\sqrt{\text{యా}^2} = \text{యా}$ అగుచున్నది. కాని మిగిలిన రెండుసంఖ్యలలో ఒకదానిమూలముయొక్కయు 'యా' దీనియొక్కయు గుణకమును రెండుచే గుణింప మరియొకసంఖ్యతో సమమగుచో మూలము లభించును. కావున ఈ మొత్తపుసంఖ్య ($\text{యా}^2 + 2\,\text{యా} \pm \text{క}^2$) యందు మూలము లభించుటకు $2\,\text{యా} = \text{ర}^2$ అనియు $\text{క}^2 = 2(\text{యా} \times \sqrt{2\,\text{యా}})$ అనియు లేక $\text{క}^2 = 2(\text{యా} \times \text{ర})$ అనియు కల్పింపగా

$$\sqrt{\text{యా} \pm \text{క}^2 + 2\,\text{యా}} = \sqrt{\text{యా} \pm 2\,\text{యా}\,\text{ర} + \text{ర}^2} = \text{యా} \pm \text{ర}$$ అగుచున్నది.

$\therefore \sqrt{\text{యా}\,2} = \text{ర}$ ఇట్లు $\text{క}^2 = 2\,\text{యా}\,\text{ర} = \text{ర} \times \text{ర} = \text{ర}^3$ అగుచున్నది.

$\text{ర} = 4\,\text{ఇ}^2$ అనుకొనుచో $2\,\text{యా} = \text{ర}^2 = (4\,\text{ఇ}^2)^2 = 16\,\text{ఇ}^4 \therefore \text{యా} = 8\,\text{ఇ}^4$.

ఇట్లు $\text{క}^2 = \text{ర}^3 = (4\,\text{ఇ}^2)^3 = 64\,\text{ఇ}^6 \therefore \text{క} = 8\,\text{ఇ}^3$

$\therefore \text{యా} + 1 = 8\,\text{ఇ}^4 + 1$, ఇట్లు $\text{క} = 8\,\text{ఇ}^2$ రాసులు అగుచున్నవి.

ఇట్టిసూత్రముపపన్నమగుచున్నది.

పాటీసూత్రోపమంబీజం గూఢమిత్యవభాసతే।
నాస్తి గూఢమమూఢానాం నైవషోఢేత్యనేకధా॥ ౩౬॥
అస్తి త్రైరాశికం పాటీ బీజంచ విమలామతిః।
కిమజ్ఞాతంసుబుద్ధీనా మతో మందార్థ ముచ్యతే॥ ౩౭॥

ఇతివర్గకర్మ

తా॥ బీజగణితము వ్యక్తగణితమును బోలియేయున్నను గూఢమైనదిగ గాన్పించుచున్నది. మందమతులకు గూఢముగాని బుద్ధిమంతులకు గూఢముగాదు బుద్ధిమంతులకు ఆరువిధములే గాదు. అనేకవిధములు. త్రైరాశికజ్ఞానము (నిష్పత్తిస్వరూపజ్ఞానము) వ్యక్తగణితజ్ఞానము బీజగణితజ్ఞానము నిర్మలమగు బుద్ధివైభవముగల బుద్ధిమంతులకు తెలియనిదెద్ది? అట్టివారు గ్రంథములందులేని పద్ధతులనున్ను నిర్మించి ఎట్టిప్రశ్నములకైనను సదుత్తరము చెప్పగలరు. వారలకై అనేకసూత్రములతో బనిలేదు. కావున మందమతులకొరకే ప్రకారములు చెప్పబడుచున్నవి.

ఇది 8 ప్రకరణము వర్గకర్మ

9 ప్రకరణము.

గుణకర్మ.

తత్ర దృష్టమూలజాతౌ కరణసూత్రంవృత్తద్వయం

గుణఘ్నమూలోనయుతస్యరాశే ర్దృష్టస్య యుక్తస్యగుణార్ధకృత్యా।
మూలంగుణార్ధేనయుతంవిహీనం వర్గీకృతం ప్రష్టురభీష్టరాశిః॥ ౩౮॥
యదాలవైశ్చోనయుతస్సరాశి రేకేనభాగోనయుతేన భక్త్వా।
దృశ్యంతథామూలగుణంచతాభ్యాంసాధ్యస్తతఃప్రోక్తవదేవరాశిః॥౩౯

యోరాశిస్స్వమూలేనకేనచిద్గుణితే నోనోదృష్ట స్తస్య మూలగుణార్ధకృత్యాయుక్తస్య యత్పదం తద్గుణార్ధేనయుక్తంకార్యం. యదిగుణఘ్నమూలయుతోదృష్ట స్తర్హిహీనం కార్యం తస్యవర్గో రాశి స్స్యాత్॥

ఒకానొకరాశియొక్క మూలమును ఒకగుణకముచే గుణించినవగుసంఖ్యనున్ను రాశిలోని కొన్నిభాగములనున్ను ఆరాశివలన తీసివేయగాగాని కలుపగాగాని యగుసంఖ్య తెలిసినపుడు ఆగుణకమును రాశ్యంశములను దృష్టసంఖ్యనుబట్టి రాశిని తెలిసికొనుట గుణకర్మయని చెప్పబడుచున్నది. గుణకమునుబట్టిచేయు గణితమగుటచే గుణకర్మయని (ప్రాచీనులు వ్యవహరించియుందురు. అట్లు గుణకగుణితమూలసంఖ్యను రాశిసంఖ్యవలన తీసివేయగాగాని అందుకలుపగాగాని యగు సంఖ్య దృష్టమగుటచే "గుణఘ్నమూలోనయుత (దృష్ట) రాశి" యనియు దృష్టమూలజాతియనియు వ్యవహరించియున్నారు.

(1) టీ॥ రాశేః = రాశి, గుణఘ్నమూలోనయుతస్య = గుణకముచే గుణింపబడినమూలముచే తీసివేయబడినదైనను కలుపబడినదైనను అగునపుడు (అట్టిప్రశ్నమునందు) గుణార్ధకృత్యాయుక్తస్య = గుణకముయొక్క సగముయొక్క వర్గముతో డగలుపబడినదగు, దృష్టస్య = దృష్టసంఖ్యయొక్క, మూలం = మూలము గుణార్ధేన = గుణకముయొక్క సగముతో, యుతం = కలుపబడినదైనను, విహీనం = తీసివేయబడినదైనను (క్రమమునను సరించిచేసి) వర్గీకృతం = వర్గింపబడినదై, ప్రష్టుః = ప్రశ్నించువానియొక్క, అభీష్టరాశిః = ఇష్టరాశి (యగును.)

(2) యదా = ఎపుడు, సః రాశిః = ఆ రాశి లవైశ్చ ఊనయుతః = రాశ్యంశముల చేతనున్న తీసివేయబడినదిగాని కలుపబడినదిగాని యగుచున్నదో, (తదా = అపుడు) భాగోనయుక్తేనపరికేన = రాశ్యంశలచే తీసివేయబడిన దైనను కలుపబడిన దైననగు ఒకటిచే, దృశ్యం మూలగుణంచ భక్త్వా = దృశ్యసంఖ్యను మూలగుణకము నున్న భాగించి తతః తాభ్యాం ప్రోక్తవదేవ రాశిః సాధ్యః = పిమ్మట ఆ భాగింపనగు దృశ్యమూలగుణకములచే పూర్వప్రకారము రాశిసాధింపగిది.

113. ప్రి తా. (1) రాశిమూలమును గుణకముచే గుణింపనగుసంఖ్యను రాశివలన తీసివేయగాగాని, కలుపగాగానియగు సంఖ్య దృష్టమగుచో అనగా తెలిసినచో ఆమూలగుణకమును అర్ధించి వర్గింపుము. ఈమూలగుణకార్ధవర్గమును దృష్టసంఖ్యతో కలిపి దానిని మూలింపుము. ఆమూలమునందు మూలగుణకార్ధమును కలుపుము. లేక తీసివేయుము. అనగా ప్రశ్నయందు గుణకగుణితమూలసంఖ్య రాశివలన తీసివేయబడినచో మూలగుణకార్ధమును కలుపుము. కలుపబడినచో మూలగుణకార్ధమును తీసివేయుము పిమ్మట ఆసంఖ్యను వర్గింపుము. ఆవర్గము అభీష్టరాశియగును

(2) అట్లుగుణకగుణితమూలసంఖ్యయేగాక రాశ్యంశములనున్న తీసివేయగాగాని గలుపగాగాని యగుసంఖ్య దృష్టమగుచో అన్ని అంశములను 1 టిలో తీసివేయుము లేక కలుపుము. రాశ్యంశములను తీసివేసినచో తీసివేయుము. కలిపినచో కలుపుము. అట్లుచేయగానైనసంఖ్యచే దృష్టసంఖ్యనున్న మూలగుణకమునున్న భాగించి భాగింపనగు లబ్ధములను దృష్టమూలగుణకములనుగా భావించి వీటిచే పైరీతిగ రాశిని గనుగొనుము.

ఉపపత్తి: య2 ఇది అభీష్టరాశియగుచో ఏకవర్ణమధ్యమాహరణ బీజగణితముచే $\sqrt{\text{య}^2} = \text{య}$ రాశిమూలము, $\text{గు} =$ గుణకము, $\text{దృ} =$ దృష్టసంఖ్య పిమ్మట ప్రశ్నప్రకారము $\text{య}^2 \mp \text{గు}\times\text{య} = \text{దృ}$ రెండుపక్షములందును $\left(\frac{\text{గు}}{2}\right)^2$ కలిపినచో (7 ప్రి 2 చూ)

$$\text{య}^2 \mp \text{గు}\times\text{య} + \left(\frac{\text{గు}}{2}\right)^2 = \text{దృ} + \left(\frac{\text{గు}}{2}\right)^2$$

ఇందు మొదటి పక్షమునకు మూలము లభించుచున్నది. కావున $\text{య} \mp \frac{\text{గు}}{2} = \sqrt{\text{దృ} + \left(\frac{\text{గు}}{2}\right)^2}$ అగుచున్నది.

$$\therefore \text{య} = \sqrt{\text{దృ} + \left(\frac{\text{గు}}{2}\right)^2} \pm \frac{\text{గు}}{2}$$

$$\therefore \text{య}^2 = \left\{ \sqrt{\text{దృ} + \left(\frac{\text{గు}}{2}\right)^2} \pm \frac{\text{గు}}{2} \right\}^2 = \text{రాశియగుచున్నది.}$$

ఇది ప్రథమప్రకారముయొక్క ఉపపత్తి.

(2) ఇట్లు రాశ్యంశములనున్న వ్యవకలించినను కలిపినను

$$\text{రాశి} = \text{య}^2 \quad \text{రాశ్యంశములు} \frac{\text{య}^2}{\text{హ}} = \text{గుణక} = \text{గు} \quad \text{దృష్ట} = \text{దృ}$$

ఇపుడు ప్రశ్నప్రకారము $\text{య}^2 \mp \frac{\text{య}^2}{\text{హ}} \mp \text{గు}.\,\text{య} = \text{దృ}$

$$\because \text{య}^2 \mp \frac{\text{య}^2}{\text{హ}} = \text{య}^2 \times \left(1 \mp \frac{1}{\text{హ}}\right)$$

$$\therefore \text{య}^2 \mp \frac{\text{య}^2}{\text{హ}} \mp \text{గు}.\,\text{య} = \text{య}^2 \times \left(1 \mp \frac{1}{\text{హ}}\right) \mp \text{గు}.\,\text{య} = \text{దృ}$$

రెండుపక్షములను $\left(1 \mp \frac{1}{\text{హ}}\right)$ దీనిచే భాగింప

$$\text{య}^2 \mp \left(\frac{\text{గు}}{1 \mp \frac{1}{\text{హ}}}\right) \times \text{య} = \frac{\text{దృ}}{1 \mp \frac{1}{\text{హ}}} \quad \text{ఇపుడు} \quad \frac{\text{గు}}{1 \mp \frac{1}{\text{హ}}} = \text{గు}' \quad \text{అట్లు} \quad \frac{\text{దృ}}{1 \mp \frac{1}{\text{హ}}}$$

$= \text{దృ}'$ అనుకొందము దానిచే $\text{య}^2 \mp \text{గు}' \times \text{య} = \text{దృ}'$ అగుచున్నది.

ఈనూతనగుణకనూతన దృష్టములనుబట్టి పూర్వమువలెనే చేయగా

$$\sqrt{\text{య}^2 \mp \text{గు}' \times \text{య} + \left(\frac{\text{గు}'}{2}\right)^2} = \sqrt{\text{దృ}' + \left(\frac{\text{గు}'}{2}\right)^2}$$

$$\text{య} \mp \frac{\text{గు}'}{2} = \left(\sqrt{\text{దృ}' + \left(\frac{\text{గు}'}{2}\right)^2}\right)$$

$$\therefore \text{య}^2 = \left\{ \sqrt{\text{దృ}' + \left(\frac{\text{గు}'}{2}\right)^2} \pm \frac{\text{గు}'}{2} \right\}^2 = \text{రాశిఅగుచున్నది.}$$

(1, మూలోనేదృష్టే తావదుదాహరణమ్.

బాలేమరాళకులమూలదళానిసప్త తీరేవిలాసభరమంథరగాణ్యపశ్యం।
కుర్వచ్చకేళికలహం కలహంసయుగ్మం శేషంజలేవదమరాళకుల
ప్రమాణం॥ ౨౨॥

న్యాసః మూలగుణకః ౭/౨ దృష్టమ్ ౨, దృష్టస్యాస్య ౨ గుణార్ధకృత్యా ౪౯/౧౬ యుక్తస్య ౮౧/౧౬ మూలమ్ ౯/౪ గుణార్ధేన ౭/౪ యుతం ౧౬/౪ వర్గీకృతంజాతం హంసకులమానమ్ ౧౬

తా॥ బాలా! ఒకహంససమూహము గలదు ఆసమూహసంఖ్యయొక్క వర్గమూలమును అర్ధించి 7 చే గుణింప నెంతయగునో అనగా మూలసంఖ్యను $\frac{7}{2}$ చే గుణింప నెంతయగునో అన్నిహంసలు అతివిలాసముచే మెల్లగ ఒకసరోవరతీరమున సంచరించుచున్నవి. వాటిని చూచితిని. తక్కిన రెండుహంసలు క్రీడాకలహమును చేయుచున్నవి. ఆహంసలెన్నియుండును ?

ఇచటహంససంఖ్యయొక్క మూలమునకు $\frac{7}{2}$ గుణకము. దృష్టమగుహంసలు2 రాశినుండి గుణగుణితమూలసంఖ్యను తీసివేయగా దృష్టము 2 అగుచున్నది. కావున (1) పద్ధతిప్రకారము గుణకమును $\frac{7}{2}$ అర్ధింప $\frac{7}{4}$ దీనివర్గమునందు దృష్టము 2 ను కలుప $\frac{81}{16}$ దీనిమూలము $\frac{9}{4}$ నందు గుణకార్ధము $\frac{7}{4}$ ను కలుప 4 దీనిని వర్గింప 16 ఇది రాశియగుచున్నది. అనగా $\left\{\sqrt{\left(\frac{7}{2}\div 2\right)^2+\frac{2}{1}}+\frac{7}{2\times 2}\right\}^2$

$$=\left(\sqrt{\frac{49}{16}+\frac{2}{1}}+\frac{7}{4}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{81}{16}}+\frac{7}{4}\right)^2=\left(\frac{9}{4}+\frac{7}{4}\right)^2=16$$

రుజువు. రాశి 16 మూలము 4 ను $\frac{7}{2}$ చే గుణింప 14 రాశిలో తీసివేయ 2 దృశ్యము.

(2) మూలయుతేదృష్టే చ ఉదాహరణం

స్వపదైర్నవభిర్యుక్త స్స్యాచ్చత్వారింశతాధికం।
శతద్వాదశకం విద్వన్ కస్సరాశి ర్నిగద్యతాం॥ ౨౩॥

మూలగుణః ౯ దృశ్యం ౧౨౪౦ గుణార్ధం ౯/౨ అస్య కృత్యా ౮౧/౪ యుక్తంజాతం ౫౦౪౧/౪ అస్యమూలం ౭౧/౨ గుణార్ధేన ౯/౨ అత్రవిహీనం ౬౨/౨ వర్గీకృతం ౩౮౪౪/౪ ఛేదేనహృతే జాతో రాశిః ౯౬౧

తా॥ విద్వాంసుడా! ఒకానొకసంఖ్యయందు దానియొక్క వర్గమూలమును 9 చే గుణింపనగు సంఖ్యను కలుపగా 1240 అయ్యెను. ఆసంఖ్యయెద్ది ? చెప్పుము.

ఇచట గుణకగుణితమూలసంఖ్య రాశియందు కలుపబడెను. మూలగుణకము 9 దృష్టసంఖ్య 1240 గుణకార్ధము $\frac{9}{2}$ పైప్రకారము చేయుటలో గుణకార్ధవర్గము $\frac{81}{4}$ నందు దృష్టసంఖ్య 1240 ను కలుపగా $\frac{5041}{4}$ దీనిమూలము $\frac{71}{2}$ ఇందు $\frac{9}{2}$ ను తీసివేయగా 31 దీనివర్గము 961 మొదటిరాశి. ఇందు తొలుత గుణకగుణితమూలసంఖ్య కలుపబడినదికావున గుణార్ధవర్గయుత దృష్టసంఖ్యయొక్క మూలముకలన గుణార్ధము తీసివేయబడినది.

$$\left(\sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2+1240}-\frac{9}{2}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{81}{4}+\frac{4960}{4}}-\frac{9}{2}\right)^2=\left(\frac{71}{2}-\frac{9}{2}\right)^2=\left(\frac{62}{2}\right)^2$$
$$=31^2=961$$

(3) ఉదాహరణమ్.

యాతంహంసకులస్య మూలదశకం మేఘాగమేమానసం
ప్రోడ్డీయస్థలపద్మినీవన మగాదష్టాంశకోంభస్తటాత్।
బాలేబాలమృణాళశాలినిజలే కేళిక్రియాలాలసం
దృష్టంహంసయుగత్రయంచ సకలాంయూథస్యసంఖ్యాంవద॥ ౨౪॥

న్యాసః మూలగుణః ౧౦ అష్టాంశః ౧/౮ దృశ్యమ్ ౬ "యదాల వైశేష్యేనయుత" ఇత్యుక్తత్వాదత్రైకేనభాగోనేన $\frac{7}{8}$ దృశ్యమూలగు

శాభక్త్వా జాతందృశ్యం ౪౮/౭ మూలగుణః ౮౦/౭ గుణార్ధం ౪౦/౭ అస్య కృత్యా ౧౬౦౦/౪౯ యుక్తం ౧౯౩౬/౪౯ అస్యమూలం ౪౪/౭ గుణార్ధేన ౪౦/౭ యుతం ౧౨ వర్గీకృతం జాతోహంసరాశిః ౧౪౪

తా॥ బాలా ! ఒకహంసలగుంపుయొక్క (ఆసంఖ్యయొక్క) వర్గమూలమును 10 చే గుణింపనెంతయగునో అన్నిహంసలు వర్షకాలమున మానససరోవరమునుగూర్చి వెళ్లినవి. ఆగుంపుయొక్క 8 వ భాగము $\frac{1}{8}$ మెట్టతామర అడవి నొందెను. మిగిలిన 3 కలహంసమిథునములు (6 హంసలు) లేతతామరతూండ్లచే శోభిల్లెడు సరోవరజలమునందు క్రీడాతత్పరములై కనుపించినవి. ఆగుంపుయొక్క సంఖ్యను చెప్పుము.

ఈఉదాహరణమునందు గుణసన్నమూలసంఖ్యయు రాశ్యంశములును రాశివలనతీసివేయనగు శేషము దృష్టసంఖ్యగానున్నది.

మూలగుణకము 10 రాశ్యంశములు $\frac{1}{8}$ దృష్టసంఖ్య 6

ఇపుడు రాశ్యంశములను 1 టిలో తీసివేయనగుశేషముచే మూలగుణకమును దృష్టసంఖ్యను భాగించి ఆలబ్ధముల గుణకదృశ్యములుగ భావించి చేయవలెను. అట్లుచేయగా $\frac{1}{1}-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$ గావున $\frac{10}{1}\div\frac{7}{8}=\frac{80}{7}$ = గు అట్లు $\frac{6}{1}\div\frac{7}{8}=\frac{48}{7}$ = దృ అగుచున్నది. ఇపుడీగుణకదృష్టములచే పైప్రకారముచేయగా రాశియగును.

ఎట్లనగా: $\left\{\sqrt{\left(\frac{80}{7\times2}\right)^2+\frac{48}{7}}+\frac{80}{7\times2}\right\}^2=\left(\sqrt{\frac{1600}{49}+\frac{336}{49}}+\frac{40}{7}\right)^2$

$=\left(\frac{44+40}{7}\right)^2=12^2=144$ రాశి ఇదిహంససంఖ్య

(4) ఉదాహరణమ్.

పార్థఃకర్ణవధాయమార్గణగణం క్రుద్ధోరణేసందధే।
తస్యార్ధేననివార్యతచ్ఛరగణం మూలైశ్చతుర్భిర్హయాన్।
శల్యంషడ్భి రథేషుభిస్త్రిభిరపి ఛత్రింధ్వజంకార్ముకం
చిచ్ఛేదాస్యశిరశ్శరేణ కతితేయానర్జునసంవధే॥ ౨౫॥

న్యాసః, భాగః ౧/౨ మూలగుణకః ౪ దృశ్యమ్ ౧౦ యదాల వైశోప్చనయుత ఇత్యాదినా జాతంబాణమానం ౧౦౦

తా॥ అర్జునుడు యుద్ధమునందు కర్ణవధముకొరకు క్రుద్ధుడై కొన్నిబాణములను సంధించెను. ఆబాణసంఖ్యయొక్క సగముచే కర్ణునిబాణములనివారించెను. ఆబాణసంఖ్యయొక్కమూలమును 4 చే గుణింపనగుసంఖ్యగల బాణములచే కర్ణుని గుఱ్ఱములను కొట్టెను. 6 బాణములచే శల్యునొంచెను, 3 బాణములచే ఛత్రమును ధ్వజమును ధనుస్సును ఛేదించెను. ఒకబాణముచే కర్ణుని శిరముద్రుంచెను. ఆఅర్జునుడెన్నిబాణముల సంధించెనో ఆగియెన్ని ?

ఇచటమూలగుణకము 4 రాశ్యంశము $\frac{1}{2}$ దృశ్యము 10

ఇందును పై (3) ఉదాహరణమునందువలెనే తొలుతదృశ్యగుణకములను సంస్కరింపవలెను. అట్లుచేయగా $4\div\frac{1}{2}=\frac{8}{1}=$ గు, $\frac{10}{1}\div\frac{1}{2}=20=$దృశ్యం ఇందు $\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$ అగుచున్నదిగావున $\frac{1}{2}$ చేత భాగింపబడినవి యని గ్రహింపవలెను

$$\left\{\sqrt{\frac{20}{1}+\left(\frac{8}{2}\right)^2}+\frac{8}{2}\right\}^2=(\sqrt{36}+4)^2=100$$ బాణసంఖ్య.

(5 ఉదాహరణం)

అపిచ.

అలికులదలమూలతీం మాలంయాతమష్టౌ
నిఖిలనవమభాగాశ్చాలినీ భృంగమేకం।
నిశిపరిమలలుబ్ధం పద్మమధ్యేనిరుద్ధం
ప్రతిరణతి రణంతం బ్రూహికాంతేళినంఖ్యాం॥ ౨౬॥

తా॥ ఒకభ్రమర(తుమ్మెద) సముదాయమువలన ఆసమూహముయొక్క సగమునకు వర్గమూలమెంతయగునో అన్నిభ్రమరములు మాలతీలత నొందెను. మొత్తముగుంపులో $\frac{8}{9}$ (అనగా 9 వ వంతును 8 చే గుణింపనగు) తుమ్మెదలును మాలతీలతనొందెను. ఒకమగతుమ్మెద పద్మమధువునుగ్రోలుచుండ సూర్యాస్తమనమగుటచే పద్మముముకుళితమగుటవలన రాత్రియందు పద్మమధ్యమం దరికట్టబడి

మొరపెట్టుచుండ వెలుపలనున్న యూడతుమ్మెద తిరుగ మొరపెట్టుచుండెను. కాంతా! భ్రమరసంఖ్యను చెప్పుము.

వా. భా. అత్రికిలతాళినవాంశాష్టకం రాశ్యర్ధమూలంచ రాశేః ఋణం రూపద్వయందృశ్యం. ఏతదృణం దృశ్యం చార్ధితం రాశ్యర్ధస్య భవతీ౧. తత్రాపిరాశ్యంశార్ధం రాశ్యంశస్యార్ధ స్స్యాదితి భాగస్సఏవ. తథాన్యాసః॥

మూలగుణః $\frac{౧}{౨}$ భాగః $\frac{౮}{౯}$ దృశ్యమ్ ౧ (రాశ్యర్ధస్యస్యాదితి భాగన్యాసోత్ర) అతఃప్రాగ్వల్లబ్ధం రాశిదలం ౩౬ ఏతద్ద్విగుణిత మళికులమానమ్ ౭౨ ఇత్థమేవరాశ్యంశమూలవశేన మూలగుణం దృశ్యంచ విభజ్య సుధియా రాశ్యంశాస్సాధ్యాః.

ఈయుదాహరణమునందు రాశ్యంశములు $\frac{8}{9}$ యును రాశ్యర్ధమూలమున్ను రాశివలన తీసివేయగా 2 దృష్టసంఖ్య యగుచున్నది. ఇచట రాశ్యర్ధమూలము తీసివేయబడుటచే తొలుత రాశ్యర్ధమును సాధించి రాశ్యర్ధము రెట్టించినచో రాశిమానము తెలియును. కావున రాశిసంబంధములగు భాగములను దృశ్యమున్ను రాశ్యర్ధమునకు సాధించుకొనవలయును. వాటిచే రాశ్యర్ధము సాధింపవలయును.

పరికృతము రాశియొక్క $\frac{8}{9}$ భాగములచే నెంతసంఖ్యయగునో ఆసంఖ్యను అర్థించినను, రాశ్యర్ధముయొక్క $\frac{8}{9}$ భాగములనినను సమానమే యగుచున్నది.

ఎట్లనగా: రాశి = య అనుకొందము $\frac{య}{1}$లో $\frac{8}{9} = \frac{య\ 8}{9}$ దీనిని అర్థింప $\frac{య\ 8}{9\times 2}$ అగుచున్నది. ఇట్లు రాశ్యర్ధము $\frac{య}{2}$లో $\frac{8}{9} = \frac{య\times 8}{9\times 2}$ అగుచున్నది

కావున రాశ్యర్ధమును రాశిగభావించి గణితము చేయునపుడు రాశిభాగములను రాశ్యర్ధమునకై మార్పుచేయనక్కరలేదు. దృష్టసంఖ్య 2 రాశిలోనిది గావున రాశ్యర్ధమునకై అర్థింపవలయును. ఇట్లు రాశ్యర్ధమూలము రాశివలన తీసివేయబడినది. కావున రాశ్యర్ధమును సాధింపునపుడు రాశ్యర్ధమువలన రాశ్యర్ధమూలము యొక్క సగము తీసివేయబడినది యనితెలియదగియున్నది. కావున రాశ్యర్ధ గుణ

కము $\frac{1}{2}$ అగుచున్నది. ఇట్లు గుణకదృశ్యములనర్థింప గు $\frac{1}{2}$ దృ 1 రాశ్యంశములే $\frac{8}{9}$ రాశ్యర్థాంశములు. కావున $(1-\frac{8}{9})$ చే గుణకదృశ్యముల భాగింప గు $=\frac{9}{2}$, దృష్టము $=9$.

ఇపుడు $\left\{\sqrt{\frac{9}{1}+\left(\frac{9}{4}\right)^2}+\frac{9}{4}\right\}^2=\left(\sqrt{\frac{225}{16}}+\frac{9}{4}\right)^2=6^2=36$ రాశ్యర్థము దీనినిద్విగుణింప 72 రాశియగుచున్నది.

ఇట్లు రాశియొక్క ఒకానొకయంశముయొక్క మూలము రాశివలన తీసివేయబడినపుడు ఆయంశమునుబట్టి మూలగుణకమును దృశ్యమును విభజించి దానిచే రాశ్యంశద్వారమున రాశిమానము నెరుంగవలయును.

6 ఉదాహరణమ్.

యోరాశిరష్టాదశభిస్స్వమూలైః రాశిత్రిభాగేన సమన్వితశ్చ।
జాతంశతద్వాదశకం తమాశుజానీహిపాట్యాంపటుతాస్తి తేచేత్ ॥ ౭౨॥

న్యాసః. మూలగుణః ౧౮ భాగః $\frac{౧}{3}$ దృశ్యమ్ ౧౨౦౦

అత్రైకేనభాగయుతేన $\frac{౪}{3}$ మూలగుణందృశ్యంచభక్త్వా ప్రాగ్వజ్జాతోరాశిః॥ ౭౬॥

ఇతిగుణకర్మ

తా॥ ఒకానొకసంఖ్యయొక్కమూలమును 18 చే గుణింపగానగుసంఖ్యను రాశిలోని 3 వ భాగమును రాశియందు కలుప 1200 అగుచున్నది. నీకుపాటీగణితమునసామర్థ్యమున్నచో ఆసంఖ్యను తెలియుము.

ఈయుదాహరణమునందు గుణగుణితమూలసంఖ్యను రాశ్యంశములను రాశియందు కలుపగానగుసంఖ్య దృశ్యమగుచున్నది.

మూలగుణకము 18 రాశ్యంశము $\frac{1}{3}$ దృశ్యము 1200 ఇపుడు $(1+\frac{1}{3})$చే భాగింప సంస్కరింపబడిన దృశ్యగుణకములు దృ $=900$ గు $=\frac{27}{2}$ కావున

$$\left\{\sqrt{900+\left(\tfrac{27}{4}\right)^2}-\tfrac{27}{4}\right\}^2=\left(\sqrt{\tfrac{15129}{16}}-\tfrac{27}{4}\right)^2=$$
$$\left(\tfrac{123}{4}-\tfrac{27}{4}\right)^2=\left(\tfrac{96}{4}\right)^2=24^2$$

24 యొక్కవర్గము 576 అభీష్టసంఖ్యఅగుచున్నది.

ఇతి 9 ప్రకరణము గుణకర్మ.

10 ప్రకరణము.

త్రైరాశికము—అనుపాతము

114. ప్ర. (1) ఇదివరలో ఇష్టకర్మోపపత్తి (101 ప్ర) యందు త్రైరాశికమునుగూర్చి కొంచెము సూచింపబడెను. రెండురెండు రాసులకుగల పరస్పరసంబంధములబట్టి త్రైరాశికములు చేయబడుచున్నవి. కావున త్రైరాశికముల నెరుంగుటకు మొదట సంబంధముల నెరుంగవలయును. సంబంధములవివేచనము రేఖాగణితము 6 అధ్యాయమునందు వివరింపబడియున్నది. ఇచట సంగ్రహముగ తెలియచేయబడుచున్నది.

(2) రెండుసంఖ్యలలో పెద్దసంఖ్యవలన చిన్నసంఖ్య ఎన్నిపర్యాయములకు నిశ్శేషముగపోవుచున్నదో అనగా చిన్నసంఖ్యకంటె పెద్దసంఖ్య ఎన్నిరెట్లధికమైయున్నదో ఆపర్యాయసంఖ్య సంబంధము, లేక నిష్పత్తి, అనిచెప్పబడుచున్నది.

ఎట్లనగా 15, 3 ఈసంఖ్యలలో 3 కంటె 15 ఈసంఖ్య 5 రెట్లధికముగానున్నది. 15 వలన 3 ఈసంఖ్య 5 పర్యాయములకు నిశ్శేషమగునట్లు తీసివేయబడుచున్నది. కావున 5 ఇది 15, 3 ఈసంఖ్యలకు సంబంధమనియు నిష్పత్తియనియు చెప్పబడును.

(3) నాలుగురాసులలో మొదటిరెండురాసులకు గల సంబంధమే తక్కిన రెండురాసులకును గలిగినచో నచట అనుపాతము అగుచున్నది.

అనుపాతశబ్దార్థము:—పాతమన పతనము. ఒకరాశియందు రెండవరాశి ఎన్నిపర్యాయములు పతనము(పడుట=తీసివేయబడుట)నందుచున్నదో ఆపతనపర్యాయసంఖ్యయే పాతశబ్దముచే చెప్పబడుచున్నది. పాతము, సంబంధము, నిష్పత్తి, వారసంఖ్య ఇవి పర్యాయపదములు. నాలుగుసంఖ్యలలో ఒకటిరెండుసంఖ్యలకు ఎట్టిసంబంధముగలదో మూడునాలుగుసంఖ్యలకును అట్టిసంబంధముగలిగినచో ఆసంబంధము అనుపాతముఅనిచెప్పబడుచున్నది. ఒకటిరెండురాసులసంబంధమునుసరించి మూడునాలుగురాసులకు సంబంధముగలిగినదిగాన ఆసంబంధమునకు అనుపాతమని పేరు. ఇట్లు అనుపాతముగలరాసులు నాలుగిటిలోను మూడురాసులు తెలిసినచో నాలవదానిని తెలిసికొనవచ్చును. అట్లుతెలిసికొనుట అనుపాతమువలన గలుగుచున్నదిగాన ఇదియు అనుపాతమనిచెప్పబడును. మూడురాసులబట్టి నాలవదానిని తెలిసికొనుటగాన త్రైరాశికమనియు చెప్పబడును.

$\frac{15}{5} = 5$ ఇట్లు $\frac{40}{8} = 5$

ఇచట 3 నకును 15 నకును గల సంబంధమునుసరించియే 8 కిని 40 కిని సంబంధము గలుగుచున్నది. కావున ఈనాలుగుసంఖ్యలు అనుపాతముగలరాసులు అగుచున్నవి.

ఇపుడు $\frac{15}{3} = 5 \quad \therefore \quad 3 \times 5 = 15$

ఇట్లు $\frac{40}{8} = 5 \quad \therefore \quad 8 \times 5 = 40$

కావున నే పైనాలుగురాసులలో మూటినిబట్టి నాలవదానిని తెలిసికొనవచ్చును. ఎట్లనగా :—

$$\frac{15}{3} = \frac{40}{8} = 5$$

ఇపుడు 3, 15, 8, ఈమూడుసంఖ్యలును తెలిసినవి యనుకొనుము. ఇపుడు ప్రథమరాశిచే ద్వితీయరాశిని భాగింపనగులబ్ధమే తృతీయరాశిచే చతుర్థరాశిని భాగింపనగు లబ్ధముగావున భాజకలబ్ధముల గుణనఫలముభాజ్యముగాబట్టియు ప్రథమరాశిచే ద్వితీయరాశినిభాగింప తృతీయరాశిచే చతుర్థరాశిని భాగింపగానగు లబ్ధము వచ్చును. దానిని తృతీయరాశిచే గుణింప చతుర్థరాశియగును అనగా ప్రథమరాశిచే ద్వితీయరాశినిభాగించి ఆలబ్ధమును తృతీయరాశిచే గుణింప చతుర్థరాశియగుచున్నదని స్పష్టమగుచున్నది. ఇదియ అనుపాతము త్రైరాశికము.

ఇట్లు సమసంబంధముగల నాలుగురాసులను ఇట్లు చూపుచున్నారు.

$3 \div 15 = 8 \div 40$ లేక $3 : 15 :: 8 : 40$

ఇట్లు చిన్నసంఖ్య పెద్దసంఖ్యవలన నెన్నిసార్లు తీసివేయబడునో ఆపర్యాయసంఖ్య సంబంధమనినట్లు పెద్దసంఖ్యలో చిన్నసంఖ్య ఎన్నవభాగమగుచున్నదో ఆసంఖ్యయనినను సమానమే యగుచున్నది.

రెండేసి సంఖ్యలకుగల సంబంధము చిన్నసంఖ్యను ముందుగవ్రాసి పెద్దసంఖ్యను తరువాతవ్రాసి చూపబడినది. అట్లు పెద్దసంఖ్యను ముందుగవ్రాసియు చూపవచ్చును.

$15 : 3 :: 40 : 8$ లేక $\frac{3}{15} = \frac{8}{40}$

ప్రథమరాశిద్వయముకంటె ద్వితీయరాశిద్వయము చిన్నదియు గావచ్చును.

8 : 40 : : 3 : 15 లేక $\frac{40}{8} = \frac{15}{3}$

దీనిని 40 : 8 : : 15 : 3 లేక $\frac{8}{40} = \frac{3}{15}$ ఇట్లును చూపవచ్చును.

కావున పైయుక్తినిబట్టి అనుపాతముగల నాలుగురాసులలో ఏమూడురాసులు తెలిసినను తక్కిననాలవరాశిని తెలిసికొనవచ్చును

ఇందు 3 : 15 : : 8 : 40 ఇది క్రమనిష్పత్తి

40 : 8 : : 15 : 3 ఇది ఉత్క్రమనిష్పత్తి

ఇట్టి అనుపాతములందు ప్రథమతృతీయరాసులకు అగుసంబంధము ద్వితీయచతుర్థరాసులకు నగుచున్నది. ఎట్లనగా :

3 : 8 : : 15 : 40 లేక $\frac{8}{3} = \frac{40}{15}$ ఇది ఏకాంతరనిష్పత్తి

(4) అనుపాతములందు ప్రథమతృతీయరాసులు సజాతీయములు. ద్వితీయచతుర్థరాసులు సజాతీయములు.

పైక్రమనిష్పత్తియందు స్పష్టముగ గన్పట్టును. తృతీయరాశియందుఒక్కొక సంఖ్య హెచ్చినకొలదిని చతుర్థరాశి ఆఒక్కొకసంఖ్యచే గుణింపబడిన సంబంధసంఖ్యాపరిమితి ననుసరించి పెరుగుచున్నది. ఎట్లనగా—

3 : 15 : : 8 : 40 ఇది ప్రథమానుపాతము.

3 : 15 : : 9 : 45 ఇది ద్వితీయానుపాతము.

ప్రథమానుపాతమందలి తృతీయరాశి 8 యందు 1 టిని చేర్పనగు సంఖ్య 9 ద్వితీయానుపాతమందు తృతీయరాశిగ చూపబడినది. అపుడు పైఅనుపాతయుక్తిని బట్టి ప్రథమానుపాతీయచతుర్థరాశియందు ప్రథమద్వితీయరాసులకగు సంబంధమును తృతీయరాశియం దధికముగ చేర్పబడిన సంఖ్యచే గుణింపనగుసంఖ్యను చేర్పగా ద్వితీయానుపాతీయచతుర్థరాశి యైనది. కావున ప్రథమరాశియందు మరియొకఏసంఖ్యను చేర్ప తృతీయరాశియగుచున్నదో ఆసంఖ్యచే ప్రథమద్వితీయరాసుల సంబంధసంఖ్యను గుణింపగానగు సంఖ్య ద్వితీయరాశియందు చేర్పబడి చతుర్థరాశియగుచున్నది యని గ్రహింపవలసియున్నది.

దీనింబట్టి ప్రథమతృతీయరాసులను సంబంధసంఖ్యచే గుణింపక్రమముగా ద్వితీయచతుర్థరాసులగుచున్నవి యని స్పష్టమగుచున్నది ద్వితీయచతుర్థరాసులను

సంబంధసంఖ్యచే భాగింపగా ప్రథమతృతీయరాసులనియు స్పష్టము. కావున ప్రథమతృతీయరాసు లొకజాతివిగను ద్వితీయచతుర్థరాసు లొకజాతివిగను అవశ్యము గ్రహింపవలయును.

(5) పైఅనుపాతమందలి ప్రథమతృతీయరాసులు రూప్యములనియు ద్వితీయచతుర్థరాసులు ధాన్యమానమనియు భావింపుము,

అపుడు 3, 8 రూప్యములగును. 15, 40 ధాన్యమానములగును. ధాన్యమానము కుంచము అనుకొనుము. ఇపుడు 3 రూప్యములకును 15 ధాన్యపుకుంచములకును ఎట్టిసంబంధముగలదో అట్టిసంబంధము 8 రూప్యములకును 40 ధాన్యపుకుంచములకును గలదు అని గ్రహింపవలసియున్నది. అనగా రూ 3 లకును ధాన్యము 15 కుంచములగుచో సంబంధసంఖ్య 5 అగుచున్నది. అనగా రూపాయిలలో 1టి హెచ్చినకొలదిని ధాన్యముకుంచములలో 5 హెచ్చుచున్నవి. ఇట్లు రూ 8 లకు ధాన్యము 40 కుంచములకును ఆసంబంధమే గలుగుచున్నది. అనగా రూ 1 కి కుంచములు 5 చొప్పుననే రూ 8 లకును ధాన్యము 40 కుంచము లగుచున్నవి. అని తెలియదగియున్నది. ఇపుడు రూ 3 లకును ధాన్యము కుం 15 లు బజారున ఇచ్చుచున్నారు. రూ 8 లకును ధాన్యముకుంచములు ఎన్నియిచ్చెదరు ? అనుప్రశ్నము పైప్రకారము అనుపాతమును సంబంధించినది యగుటచే త్రైరాశికముచే ఉత్తరము చెప్పదగియున్నది.

(6) పైప్రకారము నాలుగురాసులలో ప్రథమద్వితీయరాసులును తృతీయరాశియు తెలియబడినవి. చతుర్థరాశి తెలియదగియున్నదిఅనుకొనుము, ఇపుడు గణితముచే తెలిసికొనదగినరాశి ఇచ్ఛాఫలము అనదగియున్నది. ప్రథమ ద్వితీయరాసుల సంబంధముచే తృతీయరాశివలన ఇచ్ఛాఫలము తెలియబడును. కావున తృతీయరాశి ఇచ్ఛారాశి. ప్రథమద్వితీయరాసులలో తృతీయరాశిసజాతీయమగు రాశి ప్రమాణరాశి. మరియొకరాశి ప్రమాణఫలము. ఎట్లనగ పైనాలుగురాసులలో తెలియబడినవి మూడురాసులు అందు ప్రమాణరాశి 3 రూపాయిలు. ప్రమాణఫలము 15 ధాన్యమానములు. ఇచ్ఛారాశి 8 రూపాయిలు. త్రైరాశికముచే తెలియదగిన ధాన్యపుకుంచములు 40 ఇచ్ఛాఫలం.

ఇట్లు అంతటను త్రైరాశికములందు తెలిసినమూడురాసులలోను రెండురాసు లొకజాతివిగను ఇతరరాశి భిన్నజాతిగలదిగను ఉండును అట్టిభిన్నజాతి

గలరాశి ప్రమాణఫలము. ప్రమాణఫలసంబంధముగల రాశి ప్రమాణరాశి. ప్రమాణరాశి సజాతీయమగు మూడవరాశి ఇచ్ఛారాశి. తెలియదగినరాశి ఇచ్ఛాఫలము. అని గ్రహింపవలయును,

అథ త్రైరాశికకరణసూత్రంవృత్తమ్

ప్రమాణమిచ్ఛాచసమానజాతీ ఆద్యంతయోస్తత్ఫలమన్యజాతి।
మధ్యేతదిచ్ఛాహతమాద్యహృత్స్యాదిచ్ఛాఫలంవ్యస్తవిధిర్విలోమే॥

టీ॥ సమానజాతీ = ఒకజాతిగలవియైన, ప్రమాణమ్ = ప్రమాణరాశియు, ఇచ్ఛాచ = ఇచ్ఛారాశియు, ఆద్యంతయోః = ఆదియందును అంతమందును (ఉంచవలయును) అన్యజాతి = మరియొకజాతిగల, తత్ఫలమ్ = ఆప్రమాణఫలము, ఇచ్ఛాహతం = ఇచ్ఛారాశిచే గుణింపబడినదియై, ఆద్యహృత్ = ఆద్యముగు ప్రమాణరాశిచే భాగింపబడినదియైనచో ఇచ్ఛాఫలం = ఇచ్ఛాఫలము, స్యాత్ = అగును.

విలోమే = వ్యస్తత్రైరాశికమునందు, వ్యస్తవిధిః = (ఇంతులకు) విపరీతముగచేయుట (అగుచున్నది)

115. ప్ర. (1) త్రైరాశికపద్ధతి. ప్రమాణరాశి, ప్రమాణఫలము, ఇచ్ఛారాశి. ఈమూటిని ఒకపంక్తియందు క్రమముగ వ్రాయుము. అనగా మొదట ప్రమాణరాశియు మధ్యమందు ప్రమాణఫలము తుదనుఇచ్ఛారాశియు నుంచవలయును.

(2) ప్రమాణఫలమును ఇచ్ఛారాశిచే గుణించి ప్రమాణరాశిచే భాగింపుము. ఆలబ్ధము ఇచ్ఛాఫలమగును.

ఇందు ప్రమాణరాశి, ప్రమాణఫలము మరియొకజాతిగలదియగును. ఇచ్ఛాఫలము ప్రమాణఫలసజాతీయమగును. ఇట్లు సాధారణత్రైరాశికములందు చేయవలయును.

(3) వ్యస్తత్రైరాశికములందు ప్రమాణరాశిచే గుణించి ఇచ్ఛారాశిచే భాగింప ఇచ్ఛాఫలము అగును. వ్యస్తత్రైరాశిక విషయము ముందు చెప్పబడును.

ఉదాహరణమ్.

కుంకుమస్యసదలంపలద్వయంనిష్క-సప్తమలవైస్త్రిభిర్యది।
ప్రాప్యతే సపదిమేవణిగ్వరబ్రూహినిష్కనవకేనతత్కియత్॥ ౨౯॥

న్యాసః $\frac{3}{౭}$, $\frac{౫}{౨}$, $\frac{౯}{౧}$ లబ్ధానికుంకుమపలాని ౫౨ కర్షౌ ౨

తా॥ నిష్కము $\frac{3}{7}$ నకు కుంకుమ $2\frac{1}{2}$ పలములు పొందబడుచున్నది అగుచో అఘడు వర్తకశ్రేష్ఠుడా ! నిష్కములు 9 కి ఆకుంకుమ ఎంత పొందబడును ? చెప్పుము.

ఇందు ప్రమాణరాశి నిష్క $\frac{3}{7}$ ప్రమాణఫలము $2\frac{1}{2}$ పలములు ఇచ్ఛారాశి 9 నిష్కములు. సూత్రప్రకారము. $\frac{\text{ప్ర ఫ} \times \text{ఇ రా}}{\text{ప్ర రా}}$ = ఇచ్ఛాఫలము.

$\because$ ప్ర రా : ప్ర ఫ : : ఇ రా : ఇ ఫ

$\therefore \frac{2\frac{1}{2} \times 9}{\frac{3}{7}} = \frac{5}{2} \times \frac{9}{1} \times \frac{7}{3} = \frac{105}{2} = 52\frac{1}{2}$ పలములు.

ఇచట ప్రమాణఫలము కుంకుమపలములు గావున ఇచ్ఛాఫలము కుంకుమపలముల పరిమాణమే అగుచున్నది. 1 పలమునకు 4 కర్షములు కావున $52\frac{1}{2}$ పలములకు 52 పలముల 2 కర్షములు అగుచున్నది.

ఉదాహరణమ్ ౨.

ప్రకృష్టకర్పూరపలత్రిషష్ట్యా చేల్లభ్యతేనిష్కచతుష్కయుక్తమ్।
శతంతదాద్వాదశభిస్సపాదైఃపలైః కిమాచక్ష్వసఖేవిచింత్య॥ ౩౦॥

న్యాసః ౬౩, ౧౦౪ $\frac{౪౯}{౪}$ లబ్ధానిష్కాః ౨౦ ద్రమ్మాః 3

పణాః ౧ కాకిణ్యః 3 వరాటకాః ౧౧ వరాటకభాగాశ్చ $\frac{౧}{౯}$

తా॥ మంచికర్పూరము 63 పలములకు వెల 104 నిష్కములగుచున్నవి. అప్పుడు పలములు $12\frac{1}{4}$ కర్పూరమునకు ఎంత వెల యగును ? మిత్రమా ఆలోచించి చెప్పుము. ఇదివరలో ఉదాహరణమునందు వస్తువు ప్రమాణఫలమైనది

ఇపుడు ధనము ప్రమాణఫలమగుచున్నది. అట్లు ప్రశ్నమునుబట్టి ప్రమాణఫలమును గుర్తెరింగి దానింబట్టి ప్రమాణేచ్ఛారాసుల నెరింగి సూత్రానుసారము గణితముచేయవలయును. ఆకారణముచేతనే ఆచార్యులవారు ఆలోచించి చెప్పువని ప్రశ్ననిచ్చియున్నారు.

ప్రమాణరాశి 63 ప్రమాణఫలము 104 ఇచ్ఛారాశి $12\frac{1}{4}$

$$\therefore \frac{12\frac{1}{4}\times 104}{63} = \frac{\frac{49}{4}\times 104}{63} = \frac{49\times 26}{63} = \frac{7\times 26}{9} = 20\tfrac{2}{9}$$ నిష్కములు.

అనగా 20 నిష్కములు, 3 ద్రమ్మములు, 8 పణములు, 3 కాకిణులు, 11 వరాటకములు, వరాటకములో $\frac{1}{9}$ వంతున్ను వెలయగుచున్నది. అని తెలియుచున్నది.

ఉదాహరణమ్ 3

ద్రమ్మద్వయేనసాష్టాంశా శాలితండులఖారికా।
లభ్యాచేత్పణసప్తత్యా తత్కింసపదికథ్యతాం॥ ౩౮॥

అత్రప్రమాణస్య సజాతీయకరణార్థం ద్రమ్మద్వయస్య పణీకృతస్య న్యాసః. ౨, [illegible], ౭౦, లబ్ధేఖార్యౌ ౨ ద్రోణాః౭ ఆఢకః౧ ప్రస్థౌ ౨.

తా॥ 2 ద్రమ్మములకు బియ్యము $1\frac{1}{8}$ ఖారిక వచ్చుచున్నది. అపుడు 70 పణములకు ఎంతబియ్యమువచ్చును? శీఘ్రముగ చెప్పుము. ప్రమాణరాశి 2 ద్రమ్మములు. ప్రమాణఫలము $1\frac{1}{8}$ ఖారిక. ఇచ్ఛారాశి 70 పణములు. ఇచట ప్రమాణరాశియు, ఇచ్ఛారాశియు ధనజాతిలోనివియైనను ఒకటి ద్రమ్మజాతియు మరియొకటి పణజాతియు నగుటచే భిన్నజాతిగలవియైనవి. కావున రెంటిని ఒకద్రమ్మజాతిలోనికి గాని లేక ఒకపణజాతిలోనికిగాని మార్చుటచే ఒకజాతిగలవిగ చేయవలయును. కావున ద్రమ్మములను పణములుగ మార్చగా

ప్రమాణరాశి 32 పణములు ప్రమాణఫలము $\frac{9}{8}$ ఖారిక ఇచ్ఛారాశి 70 పణములు.

$$\therefore \frac{\frac{9}{8}\times 70}{32} = \frac{70\times 9}{8\times 32} = \frac{35\times 9}{4\times 32} = \frac{315}{128} = 2\frac{59}{128}$$

అనగా 2 ఖారికలు, 7 ద్రోణములు, 1 ఆఢకము, 2 ప్రస్థములు, బియ్యము వచ్చును లేక ఇచ్ఛారాశిని ద్రమ్మజాతిలోనికి మార్చగా

ప్ర రా 2 ద్రమ్మములు ప్ర ఫ $\frac{9}{8}$ ఖారిక ఇ రా $4\frac{3}{8}$ ద్రమ్మములు.

$$\therefore \frac{\frac{9}{8}\times\frac{35}{8}}{2} = \frac{9\times 35}{8\times 8\times 2} = \frac{315}{128} = 2\frac{59}{128}$$ ఆలబ్ధమేవచ్చెను.

అథ వ్యస్తత్రైరాశికమ్

ఇచ్ఛావృద్ధౌ ఫలేహ్రాసో హ్రాసేవృద్ధిశ్చజాయతే।
వ్యస్తంత్రైరాశికంతత్ర జ్ఞేయంగణితకోవిదైః॥ ౪౧॥

యత్రేచ్ఛావృద్ధౌ ఫలేహ్రాసః హ్రాసేవా ఫలవృద్ధిస్తత్ర వ్యస్తత్రైరాశికమ్॥

తద్యథా!
జీవానాంవయసోమూల్యే తౌల్యేవర్ణస్యహైమనే।
భాగహారేచరాశీనాం వ్యస్తత్రైరాశికంభవేత్॥ ౪౨॥

116. ప్ర. (1) ఇదివరకు చూపబడిన సాధారణత్రైరాశికములందు ప్రమాణరాశికిని ప్రమాణఫలమునకును గలసంబంధమునుబట్టి ఇచ్ఛారాశి పెరిగినకొలదిని ఇచ్ఛాఫలము వృద్ధినొందును. ఇచ్ఛారాశి తగ్గినచో ఆసంబంధమననుసరించి ఇచ్ఛాఫలము తగ్గును. అట్లుగాక ఇచ్ఛారాశి పెరిగినయెడల ఇచ్ఛాఫలముతగ్గుటయు ఇచ్ఛారాశితగ్గినకొలందిని ఇచ్ఛాఫలము వృద్ధిపొందుటయు గలిగినయెడల వ్యస్తత్రైరాశికమగును.

(2) జంతువులయొక్క వయస్సువలన మూల్యమును నిర్ణయించునపుడు, అనగా జంతువులను వెలకుతీసుకొనుచో సామాన్యముగ బాల్యవయస్సు దాటినప్పటినుండియు క్రమక్రమముగ ఏండ్లుగడచినకొలదిని వెలతగ్గుచుండును కావున జంతువుల వయస్సునుబట్టి వెలనునిర్ణయింపుచో ఇచ్ఛారాశి వృద్ధియైనకొలదిని ఇచ్ఛాఫలము తగ్గుచుండును కావున నపుడు వ్యస్తత్రైరాశికము.

(3) పర్ణమును సంబంధించిన బంగారప్రతూనికయందును అనగా బంగారమునకు వన్నె హెచ్చినకొలదిని ఖరీదు హెచ్చగును. కావున కొంతద్రవ్యమునకు వన్నెనుబట్టి బంగారమును కొనవలసినపుడు వన్నె హెచ్చినకొలదినిబంగారపుపరిమాణము తక్కువగవచ్చును. వన్నె తక్కువయగుచో ఎక్కువపరిమాణముగలబంగారము వచ్చును కావునపుడును వ్యస్తత్రైరాశికము.

(4) ధాన్యాదిరాసులయొక్క భాగహారమునందును అనగా విభజించుటయందును వ్యస్తత్రైరాశికము అగును. అనగాధాన్యాదిరాసులను కొలుచునపుడు చిన్నపరిమాణముచే కొలచినచో పరిమితిసంఖ్యఅధికముగను పెద్దపరిమాణముచే కొలచినచో పరిమితిసంఖ్య అల్పముగను అగుచున్నది. కావున అల్పమహత్పరిమాణములచే పరిమితిసంఖ్యలనుగూర్చి త్రైరాశికము చేయవలసినచో ఇచ్ఛావృద్ధియందు ఫలహ్రాసము ఇచ్ఛాహ్రాసమందు ఫలవృద్ధియు గలుగును గావుననచట వ్యస్తత్రైరాశికము.

(5) ఇట్లు ఇచ్ఛారాశియొక్క వృద్ధియందు ఫలహ్రాసము. ఇచ్ఛారాశియొక్క క్షయమునందు ఫలవృద్ధియు గలుగుటను శాస్త్రమువలనను లోకవ్యవహారమువలనను తెలిసికొని వ్యస్తత్రైరాశికమని గుర్తెరుంగవలయును.

(6) వ్యస్తత్రైరాశికములందు ప్రమాణఫలమును ప్రమాణరాశిచే గుణించి ఇచ్ఛారాశిచే భాగింప ఇచ్ఛాఫలమగును. క్రమముగ ఉదాహరణములందు స్పష్టముగ చూపబడును.

ఉదాహరణమ్

(౧)ప్రాప్నోతిచేత్షోడశవత్సరాస్త్రీద్వాత్రింశతంవింశతివత్సరాకిమ్।
(౨)ద్విధూర్వహోనిష్కచతుష్కముక్షాః ప్రాప్నోతిధూష్షట్కవహస్తదాకిమ్॥ ౩౨॥

న్యాసః. ౧౬, ౩౨, ౨౦ లబ్ధంనిష్కాః ౨౫ ద్రమ్మాః ౯ పణాః ౯ కాకిణ్యౌ ౨ వరాటకాః ౮

ద్వితీయన్యాసః ౨, ౪, ౬ లబ్ధం ౧ భాగాశ్చ $\frac{౧}{౩}$

తా॥ (1) 16 సంవత్సరములు వయస్సుగలిగిన పడతికి 32 నిష్కములనీయవలసినయెడల 20 సంవత్సరములు వయస్సుగలపడంతికి ఆవరుంబడిని ఎంతయియ్యవలయును ?

(2) రెండుభారములను వహించినవృషభము 4 నిష్కములు వెలగలదియగుచున్నది. ఆవరుంబడిని 6 భారములను వహించినవృషభమువెలయెంతయగును ?

(దున్నుటకుగాని బరువుమోయుటకుగాని వయస్సువచ్చినదిమొదలుఒక్కొకసంవత్సరము గడచుటను ప్రకృతము "కారులు" గడచుట అని వ్యవహరించుచున్నారు. వీనినే ఆచార్యులవారు 'భారము' అని వ్యవహరించిరి. అనగా రెండుకారులుగడచినఎద్దునకు వెల 4 మాడలు అగుచో 6 కారులైనఎద్దున కెన్నిమాడలు అగును ? అని ప్రశ్నించుటయగుచున్నది.)

పైప్రశ్నములందు వయస్సుగతించినకొలదిని ముదుసలియగుటచే ధరతగ్గుచుండును గావున వయస్సునుబట్టి మూల్యమును నిర్ణయింపవలసినపుడు వ్యస్తత్రైరాశికమే చేయవలయును.

(1) ఉదా 16 : 32 : : 20 : ఇ ఫ ఇది వ్యస్తత్రైరాశికము కావున

$$\frac{16 \times 32}{20} = \frac{32 \times 4}{5} = \frac{128}{5}$$ $25\frac{3}{5}$ నిష్కములు

(2) ఉదా 2 : 4 : : 6 : ఇఫ ఇదియును వ్యస్తత్రైరాశికము కావున

$$\frac{4 \times 2}{6} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$ నిష్కములు అగుచున్నవి

3 ఉదాహరణమ్

దశవర్ణంసువర్ణంచే ద్గద్యాణకమవాప్యతే।
నిష్కేణతిథివర్ణంతు తదావదకియన్మితమ్॥ 33.

న్యాసః ౧౦, ౧, ౧౫ లబ్ధమ్ $\frac{౨}{3}$

తా॥ ఒకనిష్కమునకు 10 వన్నెగలబంగారము 1 గద్యాణకము అనగా 48 గురుపెందపూసలయెత్తువచ్చుచున్నది. అట్లగుచో 15 వన్నెగలబంగారము ఒకనిష్కమునకు ఎంతవచ్చును?

ప్రమాణరాశి 10 వర్ణములు ప్రమాణఫలము 48 గుంజలు ఇచ్ఛారాశి 15 వర్ణములు.

$$\therefore \frac{10 \times 48}{15} = \frac{2 \times 48}{3} = \frac{96}{3} = 32$$ గుంజలయెత్తువచ్చును.

4 ఉదాహరణం

సప్తాఢకేనమానేన రాశౌ సస్యస్య మాపితే।
యది మానశతం జాతం తదా పంచాఢకేన కిం॥ ౩౮॥

న్యాసః ౭, ౧౦౦, ౫ లబ్ధం ౧౪౦

ఇతి త్రైరాశికం

తా॥ ఒకానొక ధాన్యరాశిని 7 అఢకములు పట్టుపరిమాణము చే కొలచినచో 100 పరిమాణములుగలది యగును. ఆరాశినే 5 అఢకములు పట్టుపరిమాణము చే కొలచినయెడ ఎన్ని పరిమాణములుగలది యగును ?

త్రైప్రకారము $\frac{7 \times 100}{5} = 7 \times 20 = 140$ పరిమాణములుగలది యగును.

117. ప్ర. ఇట్లు వ్యస్తత్రైరాశికమునకు విషయములగు నరికొన్ని యుదాహరణములు చూపబడుచున్నవి.

(1) ఒకపనిని 10 మనుష్యులు 8 గంటలు కాలములో చేయుచున్నారు. ఆపనిని 15 గురు మనుష్యులు ఎంతకాలములో చేయుదురు ?

(2) ఒకభూమియందలి సస్యమును 20 మంది మనుష్యులు 5 రోజులు కోయుదురు. 25 గురుమనుష్యులు ఎన్ని దినములకు కోయుదురు ?

(3) ఒకగంటకు 30 మైళ్ళు నడచుమోటారుబండిచే ఒకగ్రామమును 18 గంటలకు చేరుదుము. ఆగ్రామమును గంటకు 40 మైళ్ళునడచుమోటారుచే నెంతకాలమునకు చేరుదుము.

(4) ఒకభూమిని 18 ఎడ్లు 14 రోజులు దున్నును. 32 ఎడ్లు ఎన్ని రోజులలో ఆభూమినిదున్నును ?

(5) 24 కుంచములబియ్యము 6 గురు మనుష్యులుగలసంసారమునకు 32 రోజులవరకు వచ్చును. 8 మనుష్యులుగలసంసారమునందు ఎన్నిరోజులువచ్చును?

(6) ఒక్కొకరోజునందను రోజునకు 4 గంటలకాలము 20 దినములు పనిచేసి 100 మనుష్యులు త్రవ్వదగిన చెర్వును ఆదినములలో రోజునకు 8గంటల కాలముపనిచేసి ఎందరు త్రవ్వుదురు.

(7) 5 గజములు చుట్టుకొలతగలచక్రమును ఒకప్రదేశమునుండి మరియొక ప్రదేశమునకు నడిపించునపుడు 352 పర్యాయములు ఆచక్రము తిరిగినచో 10 గజములుచుట్టుకొలతగలచక్రము ఎన్ని పర్యాయములు తిరుగును ?

(8) ఒకప్రదేశమునందు చపటాచేయుటకు 2 చతురపుటడుగులుగల రాళ్లు 66 పట్టుచున్నవి. ఆప్రదేశమునందు 3 చతురపుటడుగులుగల రాళ్లు ఎన్ని పట్టును ?

ఇట్లుఇచ్ఛారాశి వృద్ధియగునపుడు ఇచ్ఛాఫలముతగ్గుటయు ఇచ్ఛారాశితగ్గనపుడు ఇచ్ఛాఫలముపెరుగుటయును నెచటగలుగునో అట్టిప్రశ్నములన్నియు వ్యస్తత్రైరాశికవిషయములని లోకవ్యవహారానుభవమువలన తెలియవలయును. సామాన్యముగ గణితవిషయములన్నియు త్రైరాశికమును సంబంధించినవిగాయున్నవి. అందు ప్రమాణరాశికిని ఇచ్ఛారాశికిని సాజాత్యమున్ననే ఆత్రైరాశికము పొసగును. కావున తొలుత ప్రమాణేచ్ఛారాసులకు సాజాత్యమున్నదియు లేనిదియు విచారించి పిమ్మట సాధారణత్రైరాశికమైనదియు వ్యస్తత్రైరాశికమైనదియు గమనించి గణితము చేయవలయును.

త్రైరాశికప్రశ్నములు

(1) ఒకతులం బంగారమునకు రూ 30 అ 4 పై 6 లు అగుచో 3 చిన్నములు 2 గురువెంగపూసలయెత్తుబంగారమునకు వెలయెంతయగును ?

(2) ఒకకాసు (20 చిన్నముల) బంగారముయొక్క వెల $19\frac{1}{3}$ రూపాయిలగుచో $7\frac{1}{8}$ చిన్నములయెత్తుబంగారమునకు వెలయెంతయగును ?

(3) ఒకతులంకస్తూరి రూ 45.4 వెలయగుచో తు 0.43 కస్తూరికి ఎంత వెలయగును ?

(4) $3\frac{1}{4}$ రోజులకు $5\frac{3}{4}$ మైళ్లు నడచుమనుష్యుడు 293 రోజులకు ఎన్ని మైళ్ళు నడచును ?

(5) ఒకరోజునకు మైళ్ళు 13.3 నడచుబండి 29 రోజులకు ఎన్ని మైళ్ళు నడచును ?

(6) $2\frac{1}{2}$ పౌనులు తూనికగల మంచిగంధపుచెక్క రోజు 1 టికి తు $\frac{1}{2}$ ము అరుగదీయబడినచో 75 రోజులు అరుగదీయగా ఎంతమిగులును ?

(7) మణుగులు 8 వీసెలు 5 తులములు 10 గల శర్కర రు 35 అ 3 పై 9 లకు కొన్నచో ఆప్రకారము రూ 135 అ 7 పై 3 లకు ఎంతశర్కర వచ్చును ?

(8) ఒకవర్తకుడు కొంతపెట్టుబడిపెట్టి వర్తకముచేయగా వానికి రు 1 కు రు 0 అ 3 పై 3 లు చొప్పున రు 125 లు లాభమువచ్చెను వానిపెట్టుబడియెంత ?

(9) ఒకడు చాలమందివద్ద అప్పులుపుచ్చుకొని తుదకు తనఆస్తి యావత్తును విక్రయించి తనకుగలఅప్పులు 4397 రూపాయిలకు రూ 1 కి రు 0 అ 7 పై $3\frac{1}{2}$ చొ॥ యిచ్చెను వానిఆస్తియొక్క విలువయెంత ?

(10) ఒకఉద్యోగి తనకుటుంబఖర్చులుపోను 3 సంవత్సరములకు 30135.5 నిలవచేయగలిగెను. ఒకలక్షరూపాయిలను ఎంతకాలమునకు నిల్వ చేయును ?

(11) చతురపుగజము 1 టికి రు 0 అ 5 పై 4 లు చొప్పున 563 చతురపుగజముల భూమికి వెలయెంత ?

(12) ఘనగజములు 9 గల గుంటనుత్రవ్వుటకు రు 0 అ 10 పై 6 లు వ్యయమగుచో 55 ఘనగజముల గుంటత్రవ్వుటకు ఎంతయగును ?

(13) 22 గజముల మల్లుతాను 1 టికి రు 7 అ 5 పై 9 అయినచో 35 గజముల తాను ఎంతఖరీదగును ?

(14) 3 మైళ్ళకు 10 పైసలు చొప్పున తీసికొను ప్రయాణపుబండిమీద 135 మైళ్ళు ప్రయాణముచేసిన ఎన్ని రూపాయిలు ఇవ్వవలయును ?

(15) 9 సెంట్లకు రూ $97\frac{3}{4}$ లు ధరచొప్పున 53 ఎకరములకు ఎంతఇవ్వవలెను ?

(16) సాలునకు రూ 100 కి రూ $9\frac{1}{2}$ వడ్డీచొప్పున రు 3987 లకు ఎంత వడ్డీఅగును ?

(17) రు 100 లకు నెలకు రూ 1.3 లు చొప్పున సం 3·42 లకు ఎంత వడ్డీఅగును ?

(18) 100 సెంట్లుగలభూమికి సాలు 1 టికి రూ 6 అ 3 పై 3 లు పన్నుయివ్వవలసినచో ఆప్రకారము ఎకరములు 135.43 నకు ఎంతపన్నుఅగును.

(19) ఒకమార్గమునిర్మించుటకు 3 మైళ్లకు 987. 35 రూపాయిలు చొప్పున 78 మైళ్ళ 7 ఫర్లాంగుల 5 గజములకు ఎంతయగును ?

(20) 5 అడుగులు లోతుగల సమమగు ఒకకుండునందు ఒకజలమార్గము (కుళాయి)ను విడచుటచే 7 నిమిషములకు 15 అంగుళములు నిండెను ఆకుండు మొత్తము ఎన్నిగంటలలో నిండును ?

(21) ఒకచెరువునందు ఒకపోవుదారియు ఒకనీరువచ్చుదారియు రెండు దారులుగలవు జలమువచ్చుమార్గమునుమాత్రము తెరచినచో 30 గంటలలో ఆ చెరువు నిండును జలముపోవుమార్గమును తెరచినచో ఆనిండిననీరంతయు 45 గంటలలో తీయును ఆరెండుమార్గములను తెరచినచో ఎన్నిగంటలకు నిండును ?

ఈప్రశ్నమునందు 1 గంటకు జలాగమనమార్గమువలన $\frac{1}{30}$ వంతు నిండును. అట్లు గంటకు జలనిర్గమనమార్గమువలన $\frac{1}{45}$ వంతుతీయును.

రెండుమార్గములను తెరచినచో $\frac{1}{30}-\frac{1}{45}=\frac{3-2}{90}=\frac{1}{90}$ వంతు 1 గంటకాలములో నిండును. కావున చెరువునిండుటకు 90 గంటలకాలము పట్టును. అని రెండుమూడు త్రైరాశికములచే సమాధానముచెప్పదగిన ప్రశ్నములు మిశ్రవ్యవహారమునందు చెప్పబడినవి. కొన్ని పంచరాశికాదులచే నుత్తరింపదగినవియై యున్నవి.

(22) 'య' అనువాడు ఒకభూమియందలి సస్యమును 10 రోజులలో కోయగలడు. 'క' అనువాడు ఆసస్యమును 15 రోజులలో కోయగలడు. వారిద్దరును కలసినచో ఎన్నిరోజులకు కోయగలరు.

ఈప్రశ్నమునందును ఇంచుమించుగ పైప్రశ్నమునందువలెనే కార్యములోనివంతునుబట్టి ప్రశ్నోత్తరము నెరుంగవలయును. ఎట్లనగా ;

య అనువాడు ఒకరోజునకు $\frac{1}{10}$ వంతు సస్యమునుకోయును.

క అనువాడు ఒకరోజునకు $\frac{1}{15}$ వంతు సస్యమునుకోయును.

ఇద్దరునుకలసి ఒకరోజునకు $\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{3+2}{30}=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$ వంతు కోయుదురు. ఒకరోజునకు $\frac{1}{6}$ వంతు కోయుదురు. మొత్తము 6 రోజులకు కోయుదురు. ఇట్లుకార్యములోని భాగములను త్రైరాశికముచే తెలిసికొని దానింబట్టి ప్రశ్నోత్తరమునుగూర్చి త్రైరాశికము చేయవలయును. అందు ఆకార్య భాగములకు రెండును కలియునవియగుచో యోగము చేయవలయును. ఒకటి వచ్చునదియు ఒకటిపోవునదియు నగుచో అంతరము చేయవలయును. పిమ్మట త్రైరాశికమును చేయవలయును. ఇట్లు ఆయాప్రశ్నసందర్భమునుబట్టి గమనింపవలయును.

ఇది 10 ప్రకరణము త్రైరాశికము.

—...—

11 ప్రకరణము

పంచరాశికాదికము.

పంచరాశికాద్యాకరణసూత్రంవృత్తమ్

పంచసప్తనవరాశికాదికే ఽన్యోన్యపక్షనయనం ఫలచ్ఛిదామ్।
సంవిధాయబహురాశిజేవధే స్వల్పరాశివధభాజితేఫలం॥ ౭౩॥

టీ॥ పంచసప్తనవరాశికాదికే = పంచరాశిక సప్తరాశిక నవరాశికాదులందు, ఫలచ్ఛిదాం = ఫలమునకు హారమునకు, అన్యోన్యపక్షనయనం = పరస్పర పక్షములందు, పరివర్తనమును, సంవిధాయ = చేసి, బహురాశిజేవధే = అధిక

రాసులవలననైన గుణనము, స్వల్పరాశివధభాజితే = స్వల్పరాసులయొక్క గుణనముచే భాగింపబడినదగుచో (లబ్ధము) ఫలమ్ = అభీష్టఫలమగును.

118 ప్ర. పద్ధతి. (1) సమసంబంధముగల నాలుగురాసులలో మూడురాసులవలన నాలవదానిని తెలిసికొనుట త్రైరాశికము. అట్లుఆరురాసులలో ఐదిటినిబట్టి ఆరవదానిని తెలిసికొనుట పంచరాశికము. ఏడిటిచే ఎనిమిదవదాని నెరుంగుట సప్తరాశికము. ఇట్లు నవరాశిక, ఏకాదశరాశికాదికము తెలియదగినది.

(2) పంచరాశికాదులను చేయవలసినపుడు నిలువుగ నొకగీటునువ్రాసి దానికి ఎడమవైపున తెలిసినంతవరకు ప్రమాణరాసులను ప్రమాణఫలమును వ్రాయుము. కుడివైపున ఇచ్ఛారాసులను ఇచ్ఛాఫలమునున్ను తెలిసినంతవరకు వ్రాయుము.

(3) అట్లువ్రాసి ప్రమాణేచ్ఛారాసులయొక్క ఫలములను మార్పు చేయుము అనగా ప్రమాణఫలమును కుడివైపునను ఇచ్ఛాఫలమును ఎడమవైపునను వ్రాయవలయును. రెండిటిలోను ఒకటియే తెలిసిన ప్రశ్నమునందు ఒక్కదానినే మార్చుము.

(4) ఏవైపున ఎక్కువరాసులున్నవో వాటిగుణనమును ఏవైపునతక్కువ రాసులుగలవో వాటిగుణనముచే భాగింపుము (భిన్నసంఖ్యలకు భిన్నగుణన భాగహారములు చేయవలయును)

(5) లేక భిన్నసంఖ్యలున్నచో తొలుతఏవైపున అధికరాసులున్నదియు ఏవైపున స్వల్పరాసులున్నదియు గుర్తించి పిమ్మట కుడివైపునందలి భిన్నసంఖ్యలయొక్క హారములను ఎడమవైపునను, ఎడమవైపునందలి భిన్నసంఖ్యలయొక్క హారములను కుడివైపునను, వ్రాసి ఇదివరలో గుర్తించినప్రకారము అధికరాసుల గుణనమును అల్పరాశిగుణనముచే భాగింపవలయును. (ఇపుడు అభిన్నసంఖ్యలకువలె గుణనభాగహారములు చేయదగినవి ఉదాహరణము చూ).

అత్రోద్దేశకః

మాసేశతస్యయదిపంచకలాంతరం స్యాద్వర్షేగతేభవతికింవద షోడశానాం॥ కాలంతథాకథయమూలకలాంతరాభ్యాం।మూలంధనం గణకకాలఫలేవిదిత్వా॥ ౩౪॥

న్యాసః	౧	౧౨
	౧౦౦	౧౬
	౫	..

లబ్ధంకలాంతరం ౯ $\frac{౩}{౫}$

అథకాలజ్ఞానార్థం న్యాసః	౧	..
	౧౦౦	౧౬
	౫	$\frac{౪౮}{౫}$

లబ్ధామాసాః ౧౨

మూలధనార్థంన్యాసః	౧	౧౨
	౧౦౦	..
	౫	$\frac{౪౮}{౫}$

లబ్ధంమూలధనమ్ ౧౬

తా॥ రూపాయిలు 100 నకు నెల 1 టికి రూ 5 లు వడ్డీయగుచో నెలలు 12 నకు రూ 16 లకును ఎంతవడ్డీయగుచున్నది ? పైసూత్రిప్రికారము వడ్డీసొమ్మెరింగి మూలధనవృద్ధిధనములచే కాలమును చెప్పుము. అనగా ఆమూలధనమునకు ఆప్రికారము ఆవడ్డీ ఎంతకాలమునకగును ? ఇట్లు ఆకాలమునకు ఆవృద్ధి ఎంతమూలధనమున కగును ?

ఇందు 1 నెల ప్రిమాణకాలము. రూ 100 లు ప్రిమాణధనము. రూ 5 లు ప్రిమాణఫలము. నె 12 లు ఇచ్ఛాకాలము. రూ 16 లు ఇచ్ఛాధనము ఇచ్ఛాఫలమెంత ?

పైపద్ధతిప్రికారము ప్రిమాణరాసులను ఒకవైపునను ఇచ్ఛారాసులనొకవైపునను వ్రాసియు ఫలమునుమార్చియు చూపబడుచున్నది.

1	12
100	16
5	..

ఫలమునుమార్చగా

1	12
100	16
..	5

బహురాశిఘాతమును స్వల్పరాశిఘాతముచే భాగింపగా

$$\frac{12 \times 16 \times 5}{100 \times 1} = \frac{12 \times 16}{20} = \frac{12 \times 4}{5} = 9\tfrac{3}{5}$$ వడ్డీసొమ్ము అగుచున్నది.

ఇట్లు నె 1 టికి రూ 5 లు వృద్ధిచో॥ రూ 16 లకు రూ $9\frac{3}{5}$ లు వృద్ధి ఎంతకాలమునకు ?

1	
100	16
5	$\frac{48}{5}$

ఫలములను మార్పుచేయగా

1	
100	16
$\frac{48}{5}$	5

పైప్రికారము బహురాశిఘాతమును అల్పరాశిఘాతముచే భాగింపగా

$$\frac{1 \times 100 \times \frac{48}{5}}{16 \times 5} = \frac{1 \times 20 \times 48}{16 \times 5} = 1 \times 4 \times 3 = 12$$ కాలము మాసములు.

లేక ఇందు ఫలపరివర్తనముచేసినపిమ్మట ఎడమువైపునున్న రాసులలో $\frac{48}{5}$ భిన్నసంఖ్యగావున దీనిహారమును కుడివైపుసంఖ్యలలోచేర్చి బహురాశిఘాతమును అల్పరాశిఘాతముచే భాగింపగా $\frac{1 \times 100 \times 48}{16 \times 5 \times 5} = 1 \times 4 \times 3 = 13$ అగుచున్నది.

ఇట్లు నె 1 టికి 100 కి రూ 5 లు వృద్ధి చో॥ నె 12 లకు రూ $9\frac{3}{5}$ లు వృద్ధి ఎంతమూలధనమునకగును ?

1	12
100	
5	$\frac{48}{5}$

పరివర్తనము చేయగా

1	12
100	
$\frac{48}{5}$	5

బహురాశిఘాతమును అల్పరాశిఘాతముచే భాగింపగా

$$\frac{1 \times 100 \times \frac{48}{5}}{12 \times 5} = \frac{1 \times 20 \times 48}{12 \times 5} = 1 \times 4 \times 4 = 16$$ మూలధనము.

ఇచటనీవిషయము గమనింపదగియున్నది:— ఒకగీటునకు ఎడమవైపున ప్రిమాణరాసులను కుడివైపున ఇచ్ఛారాసులను వ్రాయుటలో ఎడమవైపున వ్రాయబడిన ఆయాప్రిమాణరాసులకు సజాతీయములగు ఇచ్ఛారాసులు తిన్నగనుండునట్లు కుడివైపున ఇచ్ఛారాసులను వ్రాయవలయును. అనగా ప్రిమాణేచ్ఛాకాలములు ప్రిమాణేచ్ఛాధనములు ప్రిమాణేచ్ఛాఫలములు ఇట్లు ఆయాసజాతీయరాసులు ఒక్కొక్కపంక్తియందుండునట్లు వ్రాయవలయును. ఇట్లుసప్తనవరాశికాదులందును సజాతీయరాసుల గమనించి వ్రాయవలయును.

ఉపపత్తి:— పంచరాశికము రెండుత్రైరాశికములచే సిద్ధించుచున్నది. ఇట్లు సప్తరాశికాదికము మూడుమొదలగు త్రైరాశికములచే సిద్ధించుచున్నవి.

ఎట్లనగా:— పైఉదాహరణమునునుసరించి నె 1 టికి రూ 100 టికి వడ్డీ రు 5 లు చో నెలలు !2 కు రూ 16 లకు ఎంతవడ్డీయగును ఈప్రిశ్నమునం

తొలుత రూ 100 లకు వృద్ధి రూ 5 లు అగుచో రూ 16 లకు ఎంత? ఈ త్రైరాశి కము చే $\frac{5\times16}{100}$ ఒక నెల ప్రమాణకాలమునకు ఇచ్ఛాధనమునకు అగువడ్డీ అగుచున్నది.

తిరుగా ఒక నెలకు $\frac{5\times16}{100}$ వృద్ధియగుచో 12 నెలలకు ఎంత? ఈ త్రైరాశికము చే $\frac{5\times16\times12}{1\times100}$ ఇది ఇచ్ఛాకాలమునకు ఇచ్ఛాధనమునకు అగువృద్ధియగుచున్నది.

దీని నే అక్షరవిన్యాసము చే చూచినచో $\frac{\text{ప్ర ఫ}\times\text{ఇ కా}\times\text{ఇ ధ}}{\text{ప్ర కా}\times\text{ప్ర ధ}}=$ ఇచ్ఛాఫలము అగుచున్నది. ఇచ్ఛాఫలము తెలిసి ఇచ్ఛాకాలము తెలియబడనిచో తొలుపప్రమాణధనమునకు ప్రమాణఫలము (వడ్డీ) లభించుచో ఇచ్ఛాధనమున కెంత? $\frac{\text{ప్ర ఫ}\times\text{ఇ ధ}}{\text{ప్ర ధ}}=$ ప్రమాణకాలమునందు ఇచ్ఛాధనమునకగువృద్ధి. తిరుగ ఇచ్ఛాధనమునకు ప్రమాణకాలసంబంధిఫలము ఎంతకాలమున కగును? ఇచ్ఛాకాలమెంత? $\frac{\text{ప్ర ధ}\times\text{ఇ ఫ}\times\text{ప్ర కా}}{\text{ప్ర ఫ}\times\text{ఇ ధ}}=$ ఇచ్ఛాకాలమగుచున్నది.

ఇట్లు ఇచ్ఛాధనము నెరుంగవలసినచో మొదటప్రమాణధనమునకు ప్రమాణకాలమునందు ప్రమాణఫలము లభించుచో ఇచ్ఛాకాలమున నెంత? ఈ త్రైరాశికము చే ఇచ్ఛాకాలమునందు ప్రమాణధనమునకగు ఫలము లభించును.

అనగా $\frac{\text{ప్ర ఫ}\times\text{ఇ కా}}{\text{ప్ర కా}}=$ ప్రమాణధనఫల. తిరుగా ప్రమాణధనఫలము చే ప్రమాణధనము లభించుచో ఇచ్ఛాఫలము చే ఇచ్ఛాధన మెంతయగును? ఈ త్రైరాశికము చే $\frac{\text{ప్ర కా}\times\text{ప్ర ధ}\times\text{ఇ ఫ}}{\text{ప్ర ఫ}\times\text{ఇ కా}}=$ ఇధ. అగుచున్నది.

ఇట్లు రెండురెండు త్రైరాశికములను చేసిచూడగా పైమూడుప్రకారము లందును మొదటిప్రకారమునందు ఇచ్ఛారాసులగుణనము చే ప్రమాణఫలముగుణింపబడి తక్కినప్రమాణరాసులఘాతము చే భాగింపబడినది యనియు రెండుమూడు ప్రకారములందును ప్రమాణఫలము ఇచ్ఛారాసులచేతను ఇచ్ఛాఫలము ప్రమాణ

రాశిఘాతము చేతను గుణింపబడి బహురాశిఘాతము స్వల్పరాశిఘాతము చే భాగింపబడినదియనియు స్పష్టమగుచున్నది. దీని చే ఫలపరివర్తనము చేయుటయు బహురాశిఘాతమును స్వల్పరాశిఘాతము చే భాగించుటయు ఉపపన్నము లగుచున్నవి.

ఇట్లు సప్తరాశికాదులందును మూడు మొదలగు త్రైరాశికముల చే నుపపత్తి స్పష్టముగాగలదు. భిన్నసంఖ్యల చే భాగించుట హారలవములను పరివర్తనము చేసి గుణించుటయే కావున హారస్థానమందలి భిన్నసంఖ్యలహారములు లవస్థానమునందలి భిన్నసంఖ్యలలవములకును లవస్థానమందలి భిన్నసంఖ్యలహారములు హారస్థానము నందలిభిన్నసంఖ్యలలవములకును గుణకములగుచున్నవియనుట భిన్నభాగహారపద్ధతి చే స్పష్టము. కావునదీని చే హారపరివర్తనముపపన్నమగుచున్నది. ఉదాహరణమునందు స్పష్టముగాగలదు.

సత్ర్యంశమాసేనశతస్య చేత్స్యాత్కలాంతరం పంచసపంచమాంశాః మాసైస్త్రిభిఃపంచలవాధికైస్తత్సార్ధద్విషష్టేఃఫలముచ్యతాంకిం॥ ౩౬

న్యాసః

౪ / ౩	౧౬ / ౫
౧౦౦	౧౨౫ / ౨
౨౬ / ౫	

లబ్ధంకలాంతరం ౭ $\frac{౪}{౫}$

తా॥ మూడవవంతుతోగూడిన నెల $1\frac{1}{3}$ కు రూ 100 లకు వడ్డీ రూ $5\frac{1}{5}$ లు అగుచో నెలలు $3\frac{1}{5}$ కు రూ $62\frac{1}{2}$ లకు ఎంతవడ్డీయగును? చెప్పుము.

$\frac{4}{3}$	$\frac{16}{5}$
100	$62\frac{1}{2}$
$\frac{26}{5}$	

ఇందుఫలపరివర్తనము చేసి బహురాశిఘాతమును అల్పరాశిఘాతము చే భాగించి ప్రభిన్నభాగజాతియగుట చే సవర్ణింపగా $\frac{\frac{16}{5}\times\frac{125}{2}\times\frac{26}{5}}{\frac{4}{3}\times100}=\frac{16\times125\times26\times3}{5\times2\times5\times4\times100}$ అగుచున్నది. దీనివలన క్రిందిసంఖ్యలయందలి హారములు పైసంఖ్యలందలి లవములకును పైసంఖ్యలయందలి హారములు క్రిందిసంఖ్యలందలి లవములకును గుణకములగుట స్పష్టము. కావున హారములకు అన్యోన్యపక్షపరివర్తనము చేయుటయైనది. ఏవైపున బహురాసులున్నదియు హారముల పరివర్తనమునకు ముందుగనే తెలియవలయును

లేనిచో సందేహము గలుగును. ప్రకృతోదాహరణమునందు హారములకును ఫలమునకును పరివర్తనము చేసినపిమ్మట హారములనుగూడ కలిపి రాసులుగ లెక్కించినచో అల్పరాసులు అధికరాసులుగను అధికరాసులల్పరాసులుగను కనుపట్టును — కావుననే హారపరివర్తనమునకు పూర్వము బహురాశిపక్షమును నిర్ధారణ చేసికొనవలయునని చెప్పబడినది. పైప్రశ్నమునందు

$$\frac{16\times125\times26\times3}{5\times2\times5\times4\times100}=\frac{8\times25\times26\times3}{1\times1\times5\times4\times100}=\frac{2\times1\times26\times3}{1\times1\times5\times1\times4}=\frac{13\times3}{5}=\frac{39}{5}=7\tfrac{4}{5}$$ లు వృద్ధియగుచున్నది.

లేక బహురాశిఘాతము 156000 ను స్వల్పరాశిఘాతము 20000. చే భాగింపగా రు 7 అ 12 పై $9\frac{3}{5}$ లు వృద్ధియగుచున్నది.

119. ప్ర. పైయుదాహరణములందలి విన్యాసమువలన ఈక్రిందిపద్ధతిని గ్రహింపవచ్చును

(1) త్రైరాశికమునందువలె ప్రశ్నింపబడినరాసులయందు ఏది ఇచ్ఛాఫల సజాతీయమగునదియో దానిని మధ్యరాశియనుకొనుము. దానినిమధ్యయందు వ్రాయుము.

(2) మిగిలినరాసులలో ఒకప్రమాణరాశి దానికి సజాతీయమగు ఇచ్ఛారాశి ఈరెండిటిలో ఏదిమధ్యరాశికిగుణకమగునో గమనించి (త్రైరాశిక వ్యస్తత్రైరాశికములగమనించి) గుణకమును మధ్యరాశికి కుడిప్రక్కను వ్రాయుము. ఇతర రాశిని మధ్యరాశికి ఎడమప్రక్కనువ్రాయుము

(3) ఇట్లు ఇతరములగు రాసులందును ఆయాప్రమాణేచ్ఛారాసులలో మధ్యరాశికి గుణకములగువాటిని కుడివైపునను ఇతరములగు రాసులను ఎడమవైపునను వ్రాసి ఎడమవైపున వ్రాయబడినవాటిని భాజకములుగ తెలియుము.

(4) గుణకములయొక్కయు మధ్యరాశియొక్కయు గుణనమును భాజకములగుణనముచే భాగింపగా ఇచ్ఛాఫలము లభించుచున్నది.

(5) లేక ఆయాగుణకములను మధ్యరాశిని మధ్యమధ్యగుణనచిహ్నమును వ్రాయుచు ఒకఅడ్డగీటునకు పైభాగమున (లవస్థానమున) వ్రాయుము. భాజకములను మధ్యమధ్యగుణనచిహ్నమును వ్రాయుచు హారస్థానమున వ్రాయుము.

(6) యథాసంభవముగ నపవర్తనము చేసి సవర్ణింపగా ఇచ్ఛాఫలమగును.

మొదటి ఉదా: — నె 1 టికి రూ 100 లకు రూ 5 లు వడ్డీచో॥ నె12లకు రూ 16 లకు ఎంత ? ఇందుఇచ్ఛాఫలము 12 నెలలకు 16 రూపాయిలకగు వడ్డీయగుటచే ఇచ్ఛాఫలసజాతీయము ప్రమాణఫలము రూ 5 లు అగుచున్నది కావున నిదియే మధ్యరాశియగుచున్నది కావున

	భాజకములు	మధ్యరాశి	గుణకములు
ప్ర కా	నెల 1	ప్ర ఫ రూ 5 లు	ఇచ్ఛా కా నె 12లు
ప్ర ధ	రూ 100 లు		ఇచ్ఛా ధ రూ16లు

కావున $$\frac{5\times12\times16}{1\times100}=\frac{12\times16}{20}=\frac{3\times16}{5}=\frac{48}{5}=9\tfrac{3}{5}$$ వృద్ధియగును.

(2) ఆప్రశ్నమునందు కాలము నెరుంగవలసినచో నె 1 టికి రూ 100 లకు రూ 5 లు వడ్డీ చో॥ రూ 16 లకు రూ $\frac{48}{5}$ లు వడ్డీ ఎంతకాలమున కగును ?

ఇచట ఇచ్ఛాఫలము కాలమగుటచే తత్సజాతీయము ప్రమాణకాలము 1 నెల. ఇది మధ్యరాశి. వడ్డీ రూ 5 లకు కాలము 1 నెలయగుచో వడ్డీ రూ $\frac{48}{5}$ లకు ఎంతకాలము పట్టును? అనుప్రశ్నమునందు ఇచ్ఛాఫలము గుణకమగుచున్నది. ప్రమాణఫలము భాజకమగుచున్నది. అట్లు రూ 100 లకు ఒకవడ్డీ అగుటకు 1 నెల యగుచో ఆవడ్డీ రూ 16 లకు అగుటకు ఎంతకాలముపట్టును? అనుప్రశ్నమునందు ఇచ్ఛాధనము తగ్గినకొలదిని కాలము అధికము గావలయును. కావుననీప్రశ్నము వ్యస్తత్రైరాశికవిషయము అగుటచే రూ 100 లు ప్రమాణధనము గుణకమగుచున్నది ఇచ్ఛాధనము రూ 16 లు భాజకమగుచున్నది.

$$\therefore\frac{1\times100\times\frac{48}{5}}{16\times5}=\frac{100\times48\times1}{16\times5\times5}=\frac{20\times3}{5}=12$$ నెలలు.

ఇట్లు అంతటను గ్రహించి చేయవలయును.

పంచరాశికమును సంబంధించిన ప్రశ్నములు.

(1) 15 గురు మనుష్యులు 8 రోజులకు 60 గజములగోడను కట్టుచో 30 మనుష్యులు 10 రోజులలో నెంతగోడను కట్టెదరు ?

(2) 7 గురు కూలీలకు 3 నెలలకు రూ 90 లు ఇవ్వవలసినచో కూలీలు 15 గురకు 11 నెలలకు ఎంతఇయ్యవలయును ?

(3) 20 మనుష్యులుగలకుటుంబమునందు 15 దినములకు బియ్యము 18కుంచములు సరిపడుచో 15 మనుష్యులకు $6\frac{1}{2}$ మాసములకు ఎంతబియ్యముకావలయును?

(4) 5 మణుగులబరువును 7 మైళ్లు తీసుకొనివెళ్లుటకు రూ 0 అ 9 పై 6 కూలియగుచో 9 మణుగులబరువును 8 మైళ్లు తీసుకొనివెళ్లుటకు ఎంతకూలియగును ?

(5) 45 అంగుళములవెడల్పును 3 గజములుపొడవును గలపట్టువస్త్రము రూ $4\frac{1}{3}$ల వెలయగుచో 50 అంగుళములవెడల్పుగలిగి 7 గజములుపొడవు గలిగిన పట్టువస్త్రమునకు ఎంతవెలయగును ?

(6) పూటకు 2 సేర్లుపాలుయిచ్చు 3 ఈతలు ఈనిన ఆవు ఖరీదు 19 రూపాయిలగుచో $2\frac{1}{2}$ సేర్లు పాలు యిచ్చు 2 ఈతలుఈనిన ఆవునకు ఖరీదెంతయగును?

సప్తరాశికోదాహరణమ్

విస్తారేత్రికరాః కరాష్టకమితా దైర్ఘ్యే విచిత్రాశ్చచే
దూ్రపైరుత్కటపట్టసూత్రపటికా అష్టౌలభంతేశతం।
దైర్ఘ్యేసార్ధకరత్రయాపరపటీహస్తార్ధవిస్తారిణీ
తాదృక్కింలభతేద్రుతం వదవణిగ్వాణిజ్యకంవేత్సిచేత్॥ ౩౭॥

న్యాసః

౩	౧/౨
౮	౭/౨
౮	౧
౧౦౦	

లబ్ధంనిష్కాః ౦ ద్రమ్మాః ౧౪ పణాః ౯ కాకిణీ ౧ వరాటకాః ౬ వరాటకభాగా $\frac{౨}{3}$

తా॥ వెడల్పు 3 హస్తములు, పొడవు 8 హస్తములు గలిగి, అందమైన పట్టువస్త్రములు 8 టికిని వెల 100 నిష్కములగుచున్నది. $\frac{1}{2}$హస్తము వెడల్పును $\frac{7}{2}$హస్తములుపొడవునుగల అట్టి 1 వస్త్రమునకెంతవెలయగును ?

ఫలమునకునును హారములకును మూలసూత్రప్రకారము అన్యోన్యపక్షనయనముచేసి బహురాశిఘాతమును స్వల్పరాశిఘాతముచే భాగింపగా

$\frac{1\times7\times1\times100}{3\times8\times8\times2\times2}=\frac{7\times25}{3\times8\times8}=\frac{175}{192}$ కావున నిష్కములు 0

ద్రమ్మములు $\frac{175\times16}{192}=\frac{175}{12}=14\frac{7}{12}$ అగుచున్నవి.

నవరాశికోదాహరణమ్

పిండేయేర్కమితాంగులాః కిలచతుర్వర్గాంగులావిస్తృతా
పట్టాదీర్ఘతయాచతుర్దశకరాస్త్రింశల్లభన్తేశతం।
ఏతావిస్తృతిపిండదైర్ఘ్యమితయోయేషాంచతుర్వర్జితాః
పట్టాస్తేనదమేచతుర్దశసఖేమూల్యంలభన్తేకియత్॥ ౩౮॥

న్యాసః

౧౨	౮
౧౬	౧౨
౧౪	౧౦
౩౦	౧౪
౧౦౦	

లబ్ధంమూల్యం నిష్కాః ౧౬ $\frac{౨}{3}$

తా॥ దళసరి 12 అంగుళములు వెడల్పు 16 అంగుళములు పొడవు 14 హస్తములు గలిగిన పట్టములు (కఱ్ఱ రాయి మొదలగువాటిచేసైనపలకలు) 30 టికి వెల 100 నిష్కములు అగుచున్నది. ఆప్రకారము దళసరి 8 అంగుళములు వెడల్పు 12 అంగుళములు పొడవు 10 హస్తములు గల 14 పట్టములకు వెలయెంతయగును ?

పైపద్ధతిప్రకారము $\frac{8\times12\times10\times14\times100}{12\times16\times14\times30}=\frac{1\times1\times1\times1\times100}{1\times2\times1\times3}=$

$\frac{100}{6}=16\frac{2}{3}$,

ఏకాదశరాశికోదాహరణమ్॥

పట్టాయేప్రథమోదితప్రమితయోగవ్యూతిమాత్రేస్థితా
స్తేషామానయనాయచేచ్ఛకటినాంద్రమ్మాష్టకంభాటకం।
అన్యేయేతదనంతరంనిగదితామానైశ్చతుర్వర్జితా
స్తేషాంకాభవతీతిభాటకమితిర్గవ్యూతిషట్కేవద॥ ౩౯॥

న్యాసః. లబ్ధంభాటకద్రమ్మాః ౮॥

౧౨	౮
౧౬	౧౨
౧౪	౧౦
౩౦	౧౪
౧	౬
౮	

తా॥ వెనుక నవరాశికోదాహరణమునందు తొలుత చెప్పబడినపట్టములకు 1 గవ్యూతిదూరమునుండి తీసుకొనివచ్చుటకు 8 ద్రమ్మములు మార్గవ్యయమగును, రెండవసారిచెప్పబడినపట్టములు మొదట చెప్పబడినపట్టములకంటె ప్రమాణములో 4 చే తీసివేయబడియున్నవి. ఆపట్టములను 6 గవ్యూతులనుండితీసుకొనివచ్చుటకు కూలిఎంతయగును ? చెప్పుము

అనగా 12 అంగుళములు దళసరి అం 16 లు వెడల్పు హస్త 14 లు పొడవుగలపట్టములకు గవ్యూతి (2 క్రోసుల) దూరమునకు బండివాళ్ళు 8 ద్రమ్మములను పుచ్చుకొనెదరు. అం 8 లు దళసరి అం 12 లు వెడల్పు హస్త 10 లు పొడవుగల 14 పట్టములకు 6 గవ్యూతుల (12 క్రోసుల) దూరమునకు బండికిరాయి యెంతయగును ? పద్ధతిప్రకారము

$$\frac{\frac{8}{}\times\frac{12}{}\times\frac{10}{}\times\frac{14}{}\times 6\times 8}{\frac{12}{}\times\frac{16}{}\times\frac{14}{}\times\frac{30}{}\times\frac{1}{}}=\frac{1\times1\times1\times1\times6\times8}{1\times2\times1\times3\times1}=\frac{6\times8}{2\times3}=8$$

8 ద్రమ్మములు భాటకము (బండికిరాయి) అగును.

ఇట్లు ప్రమాణేచ్ఛారాసులను వేర్వేరునిచి ఫలమున కన్యోన్యపక్షనయనము చేసి బహురాశిఘాతము నల్పరాశిఘాతముచే భాగింప ఇచ్ఛాఫలము అగుచున్నది.

ఇది పంచరాశికాదికము 11 ప్రకరణము

— ... —

12 ప్రకరణము.

భాండప్రతిభాండవ్యవహారము.

(సరుకుమార్చి సరుకుపుచ్చుకొనుట)

భాండప్రతిభాండేకరణసూత్రం వృత్తార్ధమ్

తథైవభాండప్రతిభాండకేపివిధిర్విపర్యస్యహరాంశ్చమూల్యే॥ ౮౩ ౧/౨

టీ॥ భాండప్రతిభాండకేపి = భాండప్రతిభాండ వ్యవహారమునందును తథైవ = ఆపంచరాశికాదులందువలె, మూల్యే = మూల్యములను, హరాంశ్చ = హారములను, విపర్యస్య = మార్చి విధిః = విధానము, చేయదగినది. చకారమువలన ఇచ్ఛారాశిఫలస్థానీయమగుటచే దానినిన్నిమార్చి గణితము చేయవలయునని గ్రహింపవలయును.

120. ప్ర. తా॥ (1) వేరువేరువెలలుగల పదార్థములలో ఒక పదార్థము నిచ్చి మరియొకపదార్థమును గ్రహించుట భాండప్రతిభాండ వ్యవహారము.

(2) చెప్పబోవు ఉదాహరణమునందు భిన్నజాతిపదార్థములు రెండుగలవు. కావుననందు మరియొకజాతిపదార్థము ఏజాతిపదార్థమునకు కావలయునో ఆజాతిపదార్థసంఖ్య మధ్యరాశియగును. ఇదిప్రమాణఫలస్థానీయము.

(3) కావలసినపదార్థముయొక్క జాతిలోని పదార్థమునున్ను ఆపదార్థముయొక్క మూల్యమునున్ను మధ్యరాశికి కుడివైపున వ్రాయుము. ఇవ్వదగిన పదార్థము (మధ్యరాశి)యొక్క జాతిగలపదార్థమునున్ను మూల్యమునున్ను మధ్యరాశికి ఎడమవైపున వ్రాయుము.

(4) కుడివైపునందలి మూల్యమును ఎడమవైపునకును ఎడమవైపునందలి మూల్యమును కుడివైపునకును మార్చుము. భిన్నసంఖ్యలైనచో కుడివైపునందలి సంఖ్యలయొక్క హారములను ఎడమవైపునకును ఎడమవైపునందలిసంఖ్యలయొక్క హారములను కుడివైపునకును చేర్చుము.

(5) కుడివైపునందలిసంఖ్యలయొక్కయు మధ్యరాశియొక్కయు గుణనమును ఎడమవైపునందలిసంఖ్యలయొక్క గుణనముచే భాగింపగా అభీష్టఫలము లభించును. అనగా ఫలస్థానీయ మధ్యరాశి ఎడమవైపున మొదట వ్రాయబడినచో ఫలమునున్ను మార్చి బహురాశిఘాతమును అల్పరాశిఘాతముచే భాగింప అభీష్టఫలమగును.

ఉదాహరణమ్

ద్రమ్మేణలభ్యత ఇహామ్రశతత్రయంచేత్త్రింశత్పణేనవిపణౌవరదాడిమాని । ఆమ్రైర్వదాశుదశభిః కతిదాడిమానిలభ్యానితద్వినిమయేనభవంతిమిత్ర॥ ౮౦॥

న్యాసః

౧౬	౧
౧౦౦	౩౦
౧౦	

లబ్ధానిదాడిమాని ౧౬

ఇతిభాండప్రతిభాండవ్యవహారః

ఇతిగణితపాట్యాంలీలావత్యాంప్రకీర్ణకాని.

(1) తాII ఒకదమ్మ్మమునకు మామిడిపండ్లు 300 వచ్చుచున్నవి. ఒకపణమునకు దానిమ్మపండ్లు 30 వచ్చుచున్నవి. మామిడిపండ్లను దానిమ్మపండ్లనుమార్చుకొనినచో 10 మామిడిపండ్లకు ఎన్ని దానిమ్మపండ్లు వచ్చును ?

ఇందుమామిడిపండ్లవెల 1 దమ్మ్మము. దానిమ్మపండ్లవెల 1 పణము. ఇవిరెండును భిన్నజాతిలోనివి కావునఏకజాతిగలవానినిగ మార్చవలయును అట్లుచేయగా మామిడిపండ్లవెల 16 పణములు. మామిడిపండ్లు 300. ఇవి ఎడమవైపున వ్రాయదగినవి. మామిడిపండ్లకు కావలసినవి దానిమ్మపండ్లు కావున దానిమ్మపండ్లు 30 వీటివెల 1 పణము. ఇవి కుడివైపున వ్రాయదగినవి. మామిడిపండ్లు 10 ఇవి మధ్యరాశి. లేక ఫలస్థానీయము

భాజకములు	మధ్యరాశి	గుణకములు
పణములు 16	మామిడిపండ్లు 10	పణములు 1
మామిడిపండ్లు 300		దానిమ్మపండ్లు 30

ఇందుమూల్యములకు పరివర్తనముచేసి మధ్యరాశిగుణకముల గుణనమును భాజకముల గుణనముచే భాగింపగా $\frac{16 \times 10 \times 30}{1 \times 300} = 16$ దానిమ్మ పండ్లు వచ్చును.

(2) ఉదా:—రూ 100 లకు తు 3 లు కస్తూరి వచ్చుచున్నది. పచ్చకర్పూరము తు 5 లు రూ 15 లకు వచ్చుచున్నది. తు 2 ల కస్తూరికి కర్పూరము ఎన్నితులములు వచ్చును ?

వైపరీత్యారము	భాజకములు	మధ్యరాశి	గుణకములు
	100	2	15
	3		5

పద్ధతిప్రకారము చేయగా $\frac{100 \times 2 \times 15}{15 \times 3} = \frac{200}{9} = = 22\frac{2}{9}$ తులములు.

మూల్యఫలములకు పరివర్తనముచేసి భాజ్యభాజకములను చెరియొకవైపునను వ్రాయగా

భాజ్యములు	భాజకములు.
కర్పూరము తు 5 లకు	రూ 15 లు
రూ 100 లకు	తు 3 లు కస్తూరి
తు 2 ల కస్తూరికి	కర్పూరమెంత ?

ఇట్లు అగుచున్నది ?

121. ప్ర. దీనింబట్టిచూడగా తుదకు కోరబడునదేదియో అనగా ఇచ్ఛాఫలమగునదెద్దియో తత్సజాతీయమే తొలుతప్రమాణరాశిగను దానికివచ్చుధనమైనను పదార్థమైనను ప్రమాణఫలముగను వ్రాయవలయును.

మొదటి ప్రమాణఫలసజాతీయమగురాశి రెండవసారి ప్రమాణరాశి అట్లు రెండవసారి ప్రమాణఫలము మూడవసారి ప్రమాణరాశి ఇట్లుగ ప్రమాణరాశి ఫలములను ఏర్పరచుకొని ప్రమాణరాసులనొకవైపునను ప్రమాణఫలముల నొకవైపునను వ్రాసి తుదనైన ప్రమాణఫలమునకు సజాతీయమగు ఇచ్ఛారాశియొక్కయు ప్రమాణరాసులయొక్కయు గుణనమును ప్రమాణఫలముల గుణనముచే భాగింప ఇచ్ఛాఫలము లభించును. అని స్పష్టమగుచున్నది.

ఎట్లనగా మూలోక్తోదాహరణమునందు

ఇచ్ఛాఫలముదానిమ్మపండ్లు. కావున తొలుత దానిమ్మపండ్లు ప్రమాణరాశి. దానికగు వెల ప్రమాణఫలము. రెండవసారి, మామిడిపండ్లవెల ప్రమాణరాశి. మామిడిపండ్లు ప్రమాణఫలము రెండవసారి ప్రమాణఫలమునకు సజాతీయమగు మామిడిపండ్లే మూడవసారి ఇచ్ఛారాశి యగుచున్నవి. అట్లువ్రాసి చూపబడుచున్నది.

30 దానిమ్మపండ్లకు	1 పణము వెల
16 పణములకు	300 మామిడిపండ్లు
10 మామిడిపండ్లకు	దానిమ్మపండ్లెన్ని ?

ఈప్రశ్నమునందు $\frac{30 \times 16 \times 10}{300 \times 1} = 16$ దానిమ్మపండ్లు అగుచున్నవి.

(3) మ. మ. పం. బాపూదేవశాస్త్రిగారిచ్చిన యుదాహరణము.

శే 20 ర్లు బియ్యమునకు శే 30 లు గోధుమలు శే25 గోధుమలకు శే40లు పెసలు శే 15 ల పెసలకు శే 20 ల మినుములు శే 100 ల బియ్యమునకు మినుములెన్ని ?

ఈప్రశ్నమునందు మినుములు ఇచ్ఛాఫలము కావున ప్రశ్నములో నెట్లున్నను మొదట మినుములను ప్రమాణరాశిగ వ్రాసి పైప్రకారము రాశిఫలములను వ్రాయుచు రాగా

20 శేర్ల మినుములకు	15 శేర్ల పెసలు
40 శేర్ల పెసలకు	25 శేర్ల గోధుమలు
30 శేర్ల గోధుమలకు	20 శేర్ల బియ్యము.
100 శేర్ల బియ్యమునకు	మినుములెన్ని ?

ఇట్లు సరిజేసి వ్రాసికొని ఎడమవైపునందలి సంఖ్యల గుణనమును కుడివైపునందలి సంఖ్యల గుణనముచే భాగింపగా ఇచ్ఛాఫలము లభించును.

$$\frac{20 \times 40 \times 30 \times 100}{15 \times 25 \times 20} = 40 \times 2 \times 4 = 320$$ శేర్లు మినుములు.

విశేషము :—మూలసూత్రమునందు పాఠభేదము ననుసరించి మూలోక్తోదాహరణమును సమన్వయించుటకై బహువిధవ్యాఖ్యానములు చేయబడినవి. అవి సంగ్రహముగ చూపబడుచున్నవి.

(1) తథైవభాండప్రతిభాండకేపివిధిర్విపర్యస్యహరాంశ్చమూల్యే
(2) ,, భాండకేపివిధిర్విపర్యయస్త్రసదాహిమూల్యే
(3) ,, భాండకేపివిధిర్విధేయోంశహరాంశ్చమూల్యే
(4) ,, విపర్యయస్తత్రసదాహిమూల్యే
(5) ,, విపర్యయస్తత్రహరాంశమూల్యే

నిలువుగనొకగీటునుగీచి దానికినొక వైపున ఆమ్రఫలతన్మూల్యములను రెండవ వైపున దాడిమీఫలతన్మూల్యములను వ్రాసి ఆమ్రఫలాంశరూపమగు ఇచ్ఛారాశిని ఆమ్రఫలముల వైపున వ్రాయవలయునని కొందరును ఇచ్ఛారాశియగుటచే దాడిమఫలములవైపున వ్రాయవలయునని కొందరును వ్యాఖ్యానములందు వ్రాసిరి.

దాడిమఫలములవైపునవ్రాయుచో ఇచ్ఛారాశికి విపర్యయమక్కరలేదు. ఈవ్యాఖ్యానమునందు "హరాంశ్చమూల్యే" అనుచోట చకారమునకుఅర్థవిశేషములేదు పైరెండవపాదము 'సదా' అని మూల్యములకే పరివర్తనమని చెప్పుటచే పైయర్థమును స్పష్టముగ చెప్పుచున్నది.

(2) (4) పాఠాంతరములకు శ్లోకరచనమునందు భేదముగాని అర్థభేదము లేదు

3 వ పాఠభేదమునందు అంశహరాంశ్చ = అంశమునుహారములను. మూల్యే = మూల్యములను (విపర్యస్య=మార్చి, అధ్యాహృతము) అనిఅర్థము. 5 వ పాఠభేదమునందు హరాంశమూల్యే = హారములందును, అంశమునందును, మూల్యమునందును, విపర్యయః = మార్పుచేయదగినది అనిఅర్థము. ఈరెండుపాఠములందును 'అంశము' అనగా ఉదాహరణమునుబట్టి ఇచ్ఛారాశి ఆమ్రఫలాంశమగుటచే గ్రహింపదగియున్నది. దీనింబట్టి ఇచ్ఛారాశి ఆమ్రఫలములవైపున వ్రాయదగినదియనుట స్పష్టమగుచున్నది.

ఉపపత్తి:—ఇదియును రెండుమూడుత్రైరాశికములచే సిద్ధించుచున్నది మూలోక్తోదాహరణమునందు పణము 16 లకు మామిడిపండ్లు 300 కావున ఒక పణమునకు $\frac{300}{16}$ మామిడిపండ్లు. అట్లు ఒకపణమునకు $\frac{30}{1}$ దానిమ్మపండ్లుతిరుగ త్రైరాశికము మామిడిపండ్లు $\frac{300}{16}$ కు దానిమ్మపండ్లు $\frac{0}{1}$ వచ్చును 10 మామిడిపండ్లకు ఎన్ని దానిమ్మపండ్లు ? ఇపుడు $\frac{30 \times 10 \times 16}{1 \times 300}$ =అభీష్టఫలముఅగుచున్నది.

ఇచట పైబహురాశిఘాతమునందు ఇచ్ఛాఫలసజాతీయమగు దాడిమఫలములకు ఆమ్రఫలమూల్యసంఖ్యయు ఆమ్రఫలాంశసంఖ్యయు గుణకములైనవి. అల్పరాశిఘాతమునందు ఆమ్రఫలములకు దాడిమఫలమూల్యము గుణకమైనది. ఈగుణనభజనములు గలుగునట్లు అన్యోన్యపక్షనయనము సూత్రమునందు చెప్పబడినది అట్లు విన్యాసముచేతనే సిద్ధించునట్లు పద్ధతి చెప్పబడినది. యనుట స్పష్టమగుచున్నది.

ప్రశ్నములు:—

(1) మూడుగుఱ్ఱములఖరీదు 8 ఎద్దులఖరీదగును. 5 ఎద్దులఖరీదు 11 గొఱ్ఱెలఖరీదగుచున్నది. ఒకగొఱ్ఱెకు రూ 3—3—4½ లు వెలయగుచో ఒకగుఱ్ఱమునకు వెలయెంతయగును ?

(2) మూడుమామిడిపండ్లకు రెండునారింజకాయలు సమానమగుచున్నవి. ఐదునారింజకాయలకు 9 కొబ్బరికాయలు సమానమగుచున్నవి. కొబ్బరికాయలు 25 కు ధాన్యము 6 కుంచములు సమానమగుచున్నవి. ధాన్యముపుట్టి (200కుం) రూ 43-8-6 లు అగుచున్నది. మామిడిపండ్లు 100 నకు ఎంతవెలయగును ?

ఇది భాండప్రతిభాండవ్యవహారము

12 వ ప్రకరణము.

ఇది శ్రీమత్పిడపర్తివంశదుగ్ధార్ణవ రాకా సుధాకరుండును శ్రీకౌండిన్య సగోత్రవిఖ్యాతుండును శేషాచలదైవవిద్ద్వితీయపుత్రుండుననగు పూర్ణార్య దైవజ్ఞ బుధేంద్రునకు తృతీయ తనూజుండును కులక్రమాగత జ్యోతిశ్శాస్త్ర కృతపరిశ్రముండును నైన శ్రీకృష్ణమూర్తిశాస్త్రినామధేయ సద్బుధవిధేయునిచే ప్రణీతంబైనలీలావతీగణితాంధ్రవ్యాఖ్యానమునందు ప్రకీర్ణకములుగల పూర్వార్ధము.

శ్రీరస్తు

లీలావతీ గణితము

ఉత్తరార్ధము.

మిశ్రవ్యవహారము — 13 ప్రకరణము.

122 ప్ర. ఇదివరలో పూర్వార్ధమందు త్రైరాశికము, త్రైరాశికమును సంబంధించినపంచరాశికాదికము, భాండప్రతిభాండవ్యవహారమున్ను చెప్పబడినవి. సంకలనముమొదలు త్రైరాశికమువరకు చెప్పబడిన గణితమంతయు ప్రాయికముగ అన్నిగణితప్రశ్నలందును ఆవశ్యకమైనది యగుటచే ఆగణితములకు ప్రకీర్ణకములని సంజ్ఞ చేయబడినది. ముందు చెప్పబోవు గణితములు ఒక్కొక్క విషయమును గూర్చినవియై ఇతరప్రకరణముల సంబంధము విశేషముగలేనివి యగుటచే వ్యవహారములని చెప్పబడినవి. అందు రెండు మూడు విధములుగల ధనమును సంబంధించిన గణితప్రశ్నములు మిశ్రధనమును సంబంధించినవి యగుటచే వాటింగూర్చి మిశ్రమవ్యవహారమను ప్రకరణము చెప్పబడుచున్నది.

మిశ్రకవ్యవహారేకరణసూత్రం సార్ధవృత్తం.

(౧) ప్రమాణకాలేనహతంప్రమాణం విమిశ్రకాలేనహతం ఫలంచ।
స్వయోగభక్తేచపృథక్స్థితేతే మిశ్రాహతేమూలకలాంతరేస్తః॥

(౨) యద్వేష్టకర్మాఖ్యవిధేస్తుమూలంమిశ్రాచ్చ్యుతంతచ్చకలాంతరం స్యాత్॥ ౪౫॥

టీ॥ ప్రమాణం = ప్రమాణధనము ప్రమాణకాలేన = ప్రమాణకాలముచే హతం (కార్యం)=గుణింపదగినది. ఫలంచ=ప్రమాణఫలమున్ను విమిశ్రకాలేన=మిశ్రధనసంబంధమగుకాలముచే హతం (కార్యం)=గుణింపదగినది. పృథక్స్థితేతే=వేరుగనుంపబడిన ఆగుణనఫలములు మిశ్రాహతే= మిశ్రధనముచేగుణింపబడినవియై

స్వయోగభక్తేచ = ఆగుణనఫలముల యోగముచే భాగింపబడినవియునై మూలకలాంతరే=మూలధనమున్ను కలాంతరము (వడ్డీసొమ్ము) న్ను స్తః=అగుచున్నవి.

యద్వా=లేక ఇష్టకర్మాఖ్యవిధేః తు=ఇష్టకర్మయను గణితపద్ధతి (6 ప్రి) వలననగుచో మూలం=మూలధనము మిశ్రాత్=మిశ్రధనమువలన చ్యుతం=తీసివేయబడినదియై తచ్చ=అదియు కలాంతరంస్యాత్=వృద్ధిధనమగును.

123 ప్రి. తా. ప్రమాణధనము ప్రమాణకాలము ప్రమాణఫలము తెలియును. ఇష్టకాలమున్ను తెలియును. ఇష్టమగు మూలధనముయొక్కయు దానికి ఇష్టకాలమునకగు వృద్ధి (వడ్డీ) ధనముయొక్కయు యోగము తెలియును. ఇదియే మిశ్రధనము. కావున మిశ్రధనమును సంబంధించినదియగుటచే ఇష్టకాలము మిశ్రకాలమని చెప్పబడినది. ఈమిశ్రధనమువలన వృద్ధిమూలములను విడదీయుట.

(1) ప్రమాణకాలముచే ప్రమాణధనమునుగుణించి (ప్రకా × ప్రధ) ఒకచో వ్రాసికొనుము. మిశ్రకాలముచే ప్రమాణఫలమునుగుణించి మరియొకచో (మికా × ప్రఫ) నుంచుము పైగుణనఫలములచే వేర్వేర మిశ్రధనమును గుణించి ఆగుణనఫలముల యోగముచే భాగింపుము. క్రమముగ ఆలబ్ధములు మూలధనము, వృద్ధియు నగుచున్నవి.

(2) లేక ఒకానొకసంఖ్యను ఇష్టధనముగకల్పించి ఆయిష్టధనమునకు మిశ్రకాలమునందగు వృద్ధిధనమును ఇష్టధనముతో కలిపి ఆమొత్తమును ఇష్టమిశ్రధనమని తెలియుము. పిమ్మట ఇష్టమిశ్రధనమునం దిష్టధనము మూలధనమగుచో మిశ్రధనమునం దెంత మూలధనమగును? ఈత్రైరాశికముచే మూలధనము నెరింగి మిశ్రధనమువలన తీసివేయగా మిశ్రధనమునందలి వృద్ధి యగును. ఇట్టి త్రైరాశికముచే వృద్ధియు తెలియును.

ఉద్దేశకః

పంచకేనశతేనాబ్దే మూలంస్వం సకలాంతరం
సహస్రంచేత్పృథక్తత్ర వదమూలకంతరే॥ ౪౧॥

న్యాసః

౧	౧౨
౧౦౦	౧౦౦౦
౫	

లబ్ధేక్రమేణమూల
కలాంతరే ౬౨౫। ౩౭౫

అథవా ఇష్టకర్మణా కల్పితమిష్టంరూపం ౧ ఉద్దేశకాలాపవదిష్టరాశిరిత్యాదికరణేనరూపస్యవర్షేకలాంతరం $\frac{౩}{౫}$ ఏతద్యుతేనరూపేణ $\frac{౮}{౫}$ దృష్టే ౧౦౦౦ రూపగుణేభక్తేలబ్ధం మూలధనం ౬౨౫ ఏతన్మిశ్రాత్ ౧౦౦౦ చ్యుతం కలాంతరం ౩౭౫

తా॥ ఉదా:- ఒకనెలకు రూ 100 లకు రూ 5-0-0 లు వడ్డీ చొప్పున సంవత్సరమునకు అనగా 12 మాసములకు అసలువడ్డీలమొత్తము రూ 1000 లు అయ్యెను అందసలెంత? వడ్డియెంత? ఇందు ప్రకా=1 నెల, ప్రధ=100, ప్రఫ=5 మిశ్రకా=12 నె, మిధ=1000

సూత్రానుసారముగ :— (1) ప్రకారముచే.

(1) ప్రకా × ప్రధ=1 × 100=100 (2) మికా × ప్రఫ=12 × 5=60

(3) వీటియోగము (ప్రకా × ప్రధ) + (మికా × ప్రఫ)=100 + 60

పై (1) (2) గుణనఫలములను మిశ్రధనము రూ 1000 లుచే వేర్వేర గుణించి యోగము (3) చే భాగింప మూలధనము వృద్ధియు నగును. కావున

$$\text{అసలు}=\frac{(\text{ప్రకా}\times\text{ప్రధ})\times\text{మిధ}}{(\text{ప్రకా}\times\text{ప్రధ})\ast(\text{మికా}\times\text{ప్రఫ})}=\frac{100\times1000}{160}=\frac{10000}{16}=625$$

$$\text{వడ్డి}=\frac{\text{ప్రఫ}\times\text{మికా}\times\text{మిధ}}{(\text{ప్రకా}\times\text{ప్రధ})\ast(\text{మికా}\times\text{ప్రఫ})}=\frac{60\times1000}{160}=\frac{6000}{16}=375$$

(2) ప్రకారము. ఇష్టధన=1 ఇందులకు 12 మాసములకు వడ్డి పంచరాశికముచే $\frac{12\times5\times1}{1\times100}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ దీనిని ఇష్టధనములోగలుప $\frac{1}{1}+\frac{3}{5}=\frac{8}{5}$

పిమ్మట (101 ప్రి చూ) ఇష్టాంకము 1 చే దృష్టమగు మిశ్రధనము 1000 ను గుణించి ఈఇష్టమిశ్రధనము $\frac{8}{5}$ చే భాగింప 625 మూలధనము, దీనిని మిశ్రధనము వలన తీసివేయగా 375 వృద్ధిధనము.

ఉపపత్తి :— (1) ప్రకారము త్రైరాశికములచే నుపపన్నమగుచున్నది ఎట్లనగా నె 1 టికి (రూ 100 లకు) వడ్డి రూ 5 లు. నె 12 లలకు ఎంత

$\frac{5\times 12}{1}$ ఇది రూ 100 లకు 12 నెలలకు వడ్డియగుచున్నది. దీనిని అసలు 100 రూపాయలలో కలుపగా 160 మిశ్రధనము. ఇందు అసలు రూ 100 లు అగుచో మిశ్రధనము రూ 1000 లలో అసలెంత? $\frac{100\times 1000}{160}=625$ మూలధనము.

ఇట్లు రూ 160 లలో వడ్డీ రూ 60 లు అగుచో రూ 1000 లో వడ్డీయెంత? $\frac{60\times 1000}{160}=375$ దీనినే అక్షరవిన్యాసముచే చూపగా :—

$\frac{\text{ప్రఫ}\times\text{మికా}}{\text{ప్రకా}}$. మిశ్రకాలమందు ప్రమాణధనమునకగు ఫలము దీనిని "ప్రధ"లో కలుపగా $\frac{\text{ప్రఫ}\times\text{మికా}}{\text{ప్రకా}}+\frac{\text{ప్రధ}}{1}=\frac{\text{ప్రఫ}\times\text{మికా}}{\text{ప్రకా}}+\frac{\text{ప్రధ}\times\text{ప్రకా}}{\text{ప్రకా}}$ ఈయోగము మిశ్రకాలమందు ప్రమాణధనమునకగు మిశ్రధనము=ప్రమిధ.

ఇప్పుడు ప్రమిధ : ప్రధ :: మిధ : మిశ్రధనమూలధనము.

ఇందు $\text{ప్రధ}=\frac{\text{ప్రధ}\times\text{ప్రకా}}{\text{ప్రకా}}$

ఇట్లు ప్రమిధ : $\frac{\text{ప్రఫ}\times\text{మికా}}{\text{ప్రకా}}$ :: మిధ : మిశ్రధనవృద్ధిధనము.

$$\therefore\ \text{మిధ}\times\frac{\text{ప్రధ}\times\text{ప్రకా}}{\text{ప్రకా}}\times\frac{\text{ప్రకా}}{(\text{ప్రఫ}\times\text{మికా})+(\text{ప్రధ}\times\text{ప్రకా})}=$$

$$\frac{\text{మిధ}\times(\text{ప్రధ}\times\text{ప్రకా})}{(\text{ప్రఫ}\times\text{మికా})+(\text{ప్రధ}\times\text{ప్రకా})}=\text{మూలధన}$$

$$\text{ఇట్లు మిధ}\times\frac{\text{ప్రఫ}\times\text{మికా}}{\text{ప్రకా}}\times\frac{\text{ప్రకా}}{(\text{ప్రఫ}\times\text{మికా})+(\text{ప్రధ}\times\text{ప్రకా})}=$$

$$\frac{\text{మిధ}\times\text{ప్రధ}\times\text{ప్రకా}}{(\text{ప్రఫ}\times\text{మికా})+(\text{ప్రధ}\times\text{ప్రకా})}=\text{వృద్ధి}.$$

ఇట్లు ప్రథమప్రకారముపపన్నమగుచున్నది.

రెండవప్రకారము ఇష్టకర్మ (101 ప్ర) యొక్క ఉపపత్తిచేతనే స్పష్టమగుచున్నది.

ప్రశ్నములు.

(1) నె 1టికి రూ 100 లకు వడ్డీ రూ 1-4-0 లు చొ॥ $7\frac{1}{2}$ మాసములకు రూ 78-0-0 లకు అసలెంత ? వడ్డి యెంత ?

(2) సాలు 1టికి రూ 100 లకు రూ 10-0-0 లు వడ్డీ చొ॥ సం 2 మా 3 రో 13 లకు రూ 397 లలో అసలెంత ? వడ్డీయెంత?

మిశ్రాంతరేకరణసూత్రం వృత్తం.

అథప్రమాణైర్గుణితాస్స్వకాలా వ్యతీతకాలఘ్నఫలోద్ధృతాస్తే।
స్వయోగభక్తాశ్చ విమిశ్రనిఘ్నాః ప్రయుక్తఖండాని పృథగ్భవన్తి॥ ౯౬

టీ॥ అథ=పిమ్మట (వక్ష్యమాణప్రశ్నమునందు) స్వకాలాః=తమతమప్రమాణకాలములు ప్రమాణైః=ప్రమాణధనములచే గుణితాః=గుణింపబడినవియై వ్యతీతకాలఘ్నఫలోద్ధృతాః=అతీతకాలముచే గుణింపబడిన ప్రమాణఫలముచే భాగింపబడినవియై (చేయదగినవి) తే = ఆభాగింపగావచ్చిన లబ్ధములు విమిశ్రనిఘ్నాః = మిశ్రధనముచే గుణింపబడినవియై స్వయోగ భక్తాశ్చ = తొలుత భాగింపగావచ్చిన లబ్ధములయొక్క మొత్తము (యోగము) చే భాగింపబడినవియై పృథక్=వేర్వేరుగ ప్రయుక్తఖండాని=ఇవ్వబడినమూలధనఖండములు భవంతి=అగుచున్నది.

124 ప్ర, (1) వడ్డీవ్యాపారము చేయు వర్తకుడు వేర్వేరుకాలములందు వేర్వేరువడ్డీలకు వేర్వేరుధనఖండముల నిచ్చినపుడు తుదకు అన్నిటికిని సమాన లాభమువచ్చినచో ఆధనములయోగము తెలిసినచో ఆప్రమాణకాల, ప్రమాణధన, ప్రమాణఫల, మిశ్రధన, వ్యతీతకాలములబట్టి ఆయాధనములను వేర్వేరుగ తెలియుటకు పద్ధతి.

(2) ఆయాప్రమాణధనములచే ఆయా ప్రమాణకాలముల గుణింపుము. వాటిని ఆయావ్యతీతకాలములచేఆయాప్రమాణఫలముల గుణింపగానగు గుణనఫలములచే భాగింపుము. (ఎంతెంతకాలమునకు వడ్డీకినిచ్చిరో ఆయాకాలములు వ్యతీతకాలములు).

(3) ఆలబ్ధములను వేర్వేరమిశ్రధనముచే గుణించి ఆలబ్ధములయోగముచే భాగింపుము. ఈలబ్ధములు వారివారి మూలధనములగును.

ఉద్దేశకః.

యత్పంచకత్రికచతుష్క శతేనదత్తం ఖండైస్త్రిభిర్గణకనిష్క శతం షడూనం। మాసేషుసప్తదశపంచసుతుల్యమాప్తం ఖండత్రయేపిహి ఫలంవదఖండసంఖ్యాం॥ ౪౨॥

న్యాసః	౧ / ౧౦౦ / ౫	౭	‖	౧ / ౧౦౦ / ౩	౧౦	‖ ౧ / ౧౦౦ / ౪	౫

మిశ్రధనం ౯౪ స్వయోగః $\frac{౨౩౫}{౨౧}$ లబ్ధాని యథాక్రమం ఖండాని

౨౪, ౨౮, ౪౨ పంచరాశికవిధినా లబ్ధంసమకలాంతరం $\frac{౪౨}{౫}$

తా॥ ఒకనివద్ద 96 రూపాయిలుండెను, అతడు నె 1 టికి రూ 100 లకు వడ్డీ రూ 5 లు చొ॥ 7 నెలలకు కొంతిధనమును బదులిచ్చెను. నెల 1కి రూ 100 లకు వడ్డి రూ 3 లు చొ॥ కొంతధనమును 10 నెలలకు బదులిచ్చెను. మిగిలిన ధనమును నె 1 టికి రూ 100 లకు వడ్డి రూ 4 లు చొ॥ 5 నెలలకు బదులిచ్చెను. ఆయాకాలములకు ఆయావడ్డిప్రకారము బదులిచ్చిన మూడువిధములగు ధనఖండములకును సమానముగ వడ్డీవచ్చెను. ఆయాఖండపరిమాణములను చెప్పుము. (మూలమునందు నిష్కములనిగలదు ప్రస్తుతవ్యవహారమునుబట్టి బోధకై రూపాయిలని వ్రాయబడెను.)

ఇందు ప్రకా=1 నెల, ప్రధ=100 రూ, ప్రథమప్రమాణఫలము = ప్రప్రఫ=5, ప్రథమవ్యతీతకాలము (ఇచ్ఛాకాలము)=ప్రవ్యకా=7, ద్వితీయప్రఫ= ద్విప్రఫ=3, ద్వివ్యకా=10, తృప్రఫ=4, తృవ్యకా=5.

(1) $\frac{\text{ప్రధ} \times \text{ప్రకా}}{\text{ప్రవ్యకా} \times \text{ప్రప్రఫ}} = \frac{100 \times 1}{7 \times 5} = \frac{100}{35} = \frac{20}{7}$

(2) $\frac{\text{ప్రధ} \times \text{ప్రకా}}{\text{ద్వివ్యకా} \times \text{ద్విప్రఫ}} = \frac{100 \times 1}{10 \times 3} = \frac{100}{30} = \frac{10}{3}$

(3) $\frac{\text{ప్రధ} \times \text{ప్రకా}}{\text{తృవ్యకా} \times \text{తృప్రఫ}} = \frac{100 \times 1}{5 \times 4} = \frac{100}{20} = 5$

వీటియోగము $\frac{20}{7} + \frac{10}{3} + \frac{5}{1} = \frac{235}{21}$

పైగణితముచే వచ్చిన లబ్ధములను వేర్వేర మిశ్రధనముచే గుణించి వాటి యోగము $\frac{235}{21}$ చే భాగింప ధనఖండములగును. కావున మిశ్రధనము 94అగుటచే

$\frac{20}{7} \times \frac{94}{1} \times \frac{21}{235} = \frac{20 \times 94 \times 3}{235} = \frac{5640}{235} = 24$ ప్రథమధనఖండము.

$\frac{10}{3} \times \frac{94}{1} \times \frac{21}{235} = \frac{10 \times 94 \times 7}{235} = \frac{6580}{235} = 28$ ద్వితీయ ధనఖండము

$\frac{5 \times 94 \times 21}{235} = \frac{94 \times 21}{47} = 2 \times 21 = 42$ తృతీయధనఖండము

ఈమూడుధనఖండములకును వేర్వేరుగ ప్రశ్నప్రకారము వృద్ధినిసాధింప $\frac{42}{5}$ సమముగనే వచ్చుచున్నది.

ఉపపత్తి:— ఈప్రశ్నయునందు అన్ని ఖండములకును వృద్ధిసమానమగుటచే ప్రశ్నప్రకారము ప్రమాణధనమునకు వృద్ధినిసాధించి దానిచే రూప (1 రూ) వృద్ధియందగుధనఖండముల గనుంగొని వాటియోగముచే ఆయాధనఖండములగు నపుడు మిశ్రధనముచే ఏధనఖండములగును అను త్రైరాశికముచేయగా అభీష్టధన ఖండములగును కావున,

(1) $\frac{\text{ప్రఫ} \times \text{వ్యకా}}{\text{ప్రకా}} =$ వ్యసంఫ, ఆయావ్యతీతకాలములబట్టి త్రైరాశికములచే ఆయావ్యతీతకాలములందు ప్రమాణధనమునకు ఆయాప్రమాణఫలమననుసరించి ఫలముగుచున్నది. అట్లుచేయు క్రమముగా (1) ప్రవ్యసంఫ (2) ద్వివ్యసంఫ (3) తృవ్యసంఫ. ప్రమాణధనమునకైన వ్యతీతకాలసంబంధిఫలముచే ప్రమాణధనమగుచో రూప (1 టి) మితవ్యతీతకాలసంబంధిఫలముచే మూలధన మెంతయగును? ఈత్రైరాశికముచే రూపఫలముచ మూలధనములు.

(1) $\frac{\text{ప్రధ} \times 1}{\text{ప్రవ్యసంఫ}} = \frac{\text{ప్రధ} \times \text{ప్రకా}}{\text{ప్రప్రఫ} \times \text{ప్రవ్యకా}}$ (2) $\frac{\text{ప్రధ} \times 1}{\text{ద్వివ్యసంఫ}} = \frac{\text{ప్రధ} \times \text{ప్రకా}}{\text{ద్విప్రఫ} \times \text{ద్వివ్యకా}}$

(3) $\frac{\text{ప్రధ} \times 1}{\text{తృవ్యసంఫ}} = \frac{\text{ప్రధ} \times \text{ప్రకా}}{\text{తృప్రఫ} \times \text{తృవ్యకా}}$ ఇపుడు (1) + (2) + (3)= యో. అనుకొందము. పైస్వరూపములను మిశ్రధనముచేగుణించి యోగముచేభాగింప వేర్వేర ధనఖండములగును.

$$\therefore \frac{(\text{ప్రిధ} \times \text{ప్రికా}) \times \text{మిధ}}{(\text{ప్రిప్రిఫ} \times \text{ప్రివ్యకా})\text{యో}} = \text{ప్రఖం॥} \quad \frac{(\text{ప్రిధ} \times \text{ప్రికా})\text{మిధ}}{(\text{ద్విప ఫ} \times \text{ద్వివ్యకా})\text{యో}} = \text{ద్వి ఖం}$$

$$\frac{(\text{ప్రిధ} \times \text{ప్రికా})\text{మిధ}}{(\text{తృప్రిఫ} \times \text{తృవ్యకా})\text{యో}} = \text{తృ ఖం}$$ దీనిచే సూత్రోపపత్తి స్పష్టముగా తెలియుచున్నది.

125. ప్ర. సమసకలాంతరమూలధనే కాలజ్ఞానాయ సూత్రం
‡ రాశ్యంతరంమాసఫలాంతరేణభక్తంహి కాలోభవతీతి వేద్యః॥

వేర్వేరుధనములను వేర్వేరువడ్డీలకు నిచ్చినచో ఆఅసలుఫాయిదాల మొత్తములు ఎంతకాలమునకు సమములగును ? ఈప్రశ్నయునందు ధనఖండముల యంతరమును ఆధనఖండములకు నెలకు ఆవడ్డీలప్రకారము అయినవడ్డీలయొక్క అంతరముచే భాగింప లబ్ధము కాలమగును.

పంచకేనశతందత్తం ద్వికేనతుశతద్వయం।మూలేసఫలకేకేనకాలేనసమతాభవేత్॥

నె 1 టికి రూ 100 లకు వడ్డీ రూ 5 లు చొ॥ రూ 100 లు బదులు ఇచ్చెను. రెండుధనములయొక్కయు అసలీఫాయిదాల మొత్తములు ఎంతకాలమునకు సమములగును ?

నె 1 టికి మొదటిధనము రూ 100 లకు వచ్చువడ్డీ రూ 5 లు రెండవధనమునకు రూ 200 లకు వచ్చువడ్డీ రూ 4 లు ఒక నెలకగువృద్ధిధనములయంతరము 1 టి దీనిచే మూలధనములయంతరము 200—100=100 ను భాగింప లబ్ధము 100 నెలలు

నె 1 టికి నూటికి 5 రూ చొ॥ రూ 100 లకు నె 100 లలకు అయినవడ్డీ రూ 500 లు, మొత్తము 600

నె 1 టికి నూటికి 2 రూ చొ॥ రూ 200 లకు నె 100 లలకు అయినవడ్డీ రూ 400 లు మొత్తము 600.

ఉపపత్తి:—ప్రథమధనకలాంతరము 5 ద్వితీయధనకలాంతరము 4 అంతరము 1 టి ప్రథమ ద్వితీయధనములయంతరము 200—100=100 ఇపుడు త్రైరాశికము కలాంతరము రూ 1 యి అగుటకు ఒక నెలఅగుచున్నది. రూ 100 లు అగుటకు ఎంతకాలముపట్టును. అనగా ప్రథమధనముకంటె ద్వితీయధనము రూ 100 లు అధికమగుటచే ఈఅధికధనముతో సమానముగ ప్రథమధనమునకైన వడ్డీ అయినపుడు అసలీఫాయిదాల మొత్తములు రెండును సమానములగును. కావున ఈత్రైరాశికముచే సూత్రముపపన్నమగుచున్నది. (అధికకలాంతరముగలమూలధనముకంటె అల్పకలాంతరమూలధనమధికమైనప్పుడు ఈవిధియుపయోగించును).

‡ ఈసూత్రము దీనియుదాహరణమున్ను నాగరప్రతులందు గానరావు.

మిశ్రాంతరేకరణసూత్రం.

ప్రక్షేపకామిశ్రహతావిభక్తాః ప్రక్షేపయోగేనపృథక్ఫలాని॥ ౪౬ ½

టీ॥ ప్రక్షేపకాః = వేయబడినధనములు. పృథక్ = వేరుగా, మిశ్రహతాః = మిశ్రధనముచే గుణింపబడినవై, ప్రక్షేపయోగేన = వేయబడినధనముల మొత్తముచే, విభక్తాః = భాగింపబడినవగుచో, ఫలాని = ఫలములగును.

126 ప్ర. (1) కొందరు వర్తకులు వేర్వేరుగధనములను (షేర్లు)వేసి కలసిచేసినవ్యాపారమునందు వచ్చినలాభమును విడదీయుటకు పద్ధతి ఇందు వేరువేరుగ పెట్టుబడిపెట్టినధనములు (షేర్లు) ప్రక్షేపకములు తుదకులాభముతోగలసినప్రక్షేపకముల మొత్తము మిశ్రధనము.

(2) ప్రక్షేపకములను వేర్వేరమిశ్రధనముచే గుణించి ప్రక్షేపయోగముచే భాగింపుము. లబ్ధములు లాభముతోగూడినవారివారిధనములగును

(3) లేక ప్రక్షేపయోగమును మిశ్రధనమువలన వ్యవకలించి ఆశేషముచే ప్రక్షేపకములగుణించి ప్రక్షేపయోగముచే భాగించినచో వారివారిలాభములగును.

ఉద్దేశకః.

పంచాశదేకసహితాగణకాష్టషష్టిః పంచోనితానవతిరాదిధనాని యేషాం।ప్రాప్తాఃవిమిశ్రితధనైస్త్రిశతీత్రిభిస్తై ర్వాణిజ్యతోవదవిభజ్యధనానితేషాం॥ ౪౩॥

న్యాసః. ప్రక్షేపకాః ౫౧, ౬౮, ౮౫ మిశ్రధనమ్ ౩౦౦ జాతానిధనాని ౭౫, ౧౦౦, ౧౨౫ ఏతాన్యాదిధనైరూనానిలాభాః ౨౪, ౩౨, ౪౦ అథవామిశ్రధనం ౩౦౦ ఆదిధనైక్యేన ౨౦౪ ఊనం

సర్వలాభయోగః ౯౬ అస్మిన్ప్రక్షేపగుణితే ప్రక్షేపయోగ ౨౦౪ భక్తేలాభాః ౨౪, ౩౨, ౪౦.

తా॥ ఉదా:—గణకుడా ! ముగ్గురువర్తకులుగలరు. అందు మొదటివాని ధనము రూ 51 లు. రెండవవానిధనము రూ 68 లు. మూడవవానిధనము రూ85లు ఆవర్తకులు వారిధనములకలిపి వర్తకము చేయగా రూ 300 లు వచ్చినవి. వారికి వేర్వేరవచ్చినలాభము ఎంత ?

(1) ఇందు ప్రక్షేపకములు 51, 68, 85 ప్రక్షేపయోగము 204 మిశ్రధనము 300.

$$\therefore (1)\ \frac{\text{ప్రక్షే} \times \text{మిశ్ర}}{\text{ప్రక్షేపయో}} = \frac{51 \times 300}{204} = 75$$ మొదటివానిధనము. ఇందు

మూలధనము 51 ని తీసివేయగా మొదటివానిలాభము రూ 24 లు. ఇట్లు

$$(2)\ \frac{\text{ప్రక్షే} \times \text{మిశ్ర}}{\text{ప్రక్షేపయో}} = \frac{8 \times 300}{204} = 100 \therefore 100 - 68 = 32$$ రెండవవానిలాభము.

$$(3)\ \frac{\text{ప్రక్షే} \times \text{మిశ్ర}}{\text{ప్రక్షేపయో}} = \frac{125 \times 300}{204} = 125 \therefore 125 - 85 = 40$$ మూడవవాని లాభము.

(2) లేక మిశ్రధన—ప్రక్షేపయోగ $= 300 - 204 = 96$ సమష్టిలాభము

$$\therefore \frac{96 \times 51}{204} = \frac{8 \times 51}{17} = 8 \times 3 = 24$$ మొదటివానిలాభము. ఇట్లు

$$\frac{96 \times 68}{204} = 32, \qquad \frac{96 \times 85}{204} = 40.$$ లాభములు.

ఉపపత్తి:—పెట్టుబడిపెట్టిన మొత్తమునకు వచ్చినసొమ్ము మిశ్రధనమగుచో ఒక్కొకనిధనమునకుఎంత ? అను త్రైరాశికముచే వానివాని మొత్తము వచ్చును పెట్టుబడిమొత్తముధనమునకు ఇంతలాభము (మొత్తము) అగుచో వానివానిధనమునకు ఎంతలాభమను త్రైరాశికముచే వానివానిలాభమే వచ్చును.

ఇట్లు నష్టమువచ్చిన మిగిలినసొమ్ము పంచుకొనుటకును, పారితోషికము (కమీషను లేక డిస్కౌంటు) యిచ్చుటకును ఈ త్రైరాశికమే చేయదగినది.

ప్రశ్నములు

(1) నలుగురువర్తకులుగలసి ఒకవ్యాపారము చేసిరి. అందు (1) వానిధనము రూ 25 లు (2) వానిధనము రూ 37 లు. (3) వానిధనము రూ 43 లు (4) వానిధనము రూ 45 లు వారికి వర్తకముచేసినపిమ్మట తుదకు రూ $108\frac{1}{2}$ లు మిగిలినవి. ఒక్కొక్కరికి ఎంతమిగిలినది ? వారివారికి వచ్చినవష్టమెంత ?

ఇందు తుదకుమిగిలినధనము $108\frac{1}{2}$ మిశ్రధనమనియు వారిధనయోగము రూ 150 ల వలన మిశ్రధనము రూ $108\frac{1}{2}$ లు తీసివేయగావైన రూ $41\frac{1}{2}$ లు పైప్రశ్నమునందు సమష్టిలాభమువలె సమష్టినష్టమనియు తెలిసికొనవలయును.

(2) ఒకవర్తకుడు తనవద్ద సరుకుపుచ్చుకొన్నవారికి రూ 100 లకు రూ 18 లు చొ॥ కమీషను యిచ్చును. వానివద్ద రు $233\frac{1}{2}$ లు విలువగల సరుకుపుచ్చుకొన్నచో వానికి ఎంతఈయవలయును?

(3) ఒకరూపాయికి 0.14 కమీషను ఇచ్చుచో రు 57-4-6 లకు ఎంత కమీషనువచ్చును?

వాప్యాదిపూరణకరణ సూత్రంవృత్తార్ధమ్

భజేచ్ఛిదోంశైరథతైర్విమిశ్రైః రూపంభజేత్స్యాత్పరిపూర్తికాలః॥

టీ॥ అంశైః = అంశములచే, ఛిదః = ఛేదము (హారము)లను, భజేత్ = భాగింపవలెను. అథ = పిమ్మట, విమిశ్రైః = కలుపబడిన, తైః = వాటిచే, రూపం = ఒకటిని, భజేత్ = భాగింపవలెను. పరిపూర్తికాలః = పరిపూర్తికాలము, స్యాత్ = అగును.

127. ప్ర. ఒకతటాకమును వేరువేరుకాలములలో నిండించుజలయంత్రముల నొకసారివిడచినచో నగుకాలమును తెలియుటకు పద్ధతి.

(1) తొలుత ఆయాజలయంత్రములయొక్క వేర్వేరుకాలములను భిన్నసంఖ్యలుగమార్పుము. ఆసంఖ్యలన్నియు ఒకవిధమగుకాలముయొక్క అవయవములను తెలియచేయవలయును.

(2) ఆభిన్నసంఖ్యలయందలి హారములను తమతమలవములచే భాగింపుము వాటియోగముచే 1 టిని భాగింపుము. అభీష్టకాలము అగును.

ఉదాహరణమ్.

యేనిర్ఝరా దినదినార్ధతృతీయషష్ఠై స్సంపూరయంతిహి పృథక్పృథగేవముక్తాః। వాపీం యదాయుగపదేవసఖే విముక్తా స్తేకేనవాసరలవేన తదా వదాశు॥ ౨౨॥

న్యాసః ౧/౧, ౧/౨, ౧/౩, ౧/౬ లబ్ధోవాపీపూరణకాలో

దినాంశాః ౧/౧౨

తా॥ ఒకబావిలోనికి 4 జలమార్గములు గలవు. ఒకజలమార్గమును విడచినచో నాబావి ఒకదినమునకు నిండును. రెండవజలమార్గమును ప్రత్యేకమువిడచినచో నాబావి $\frac{1}{2}$ దినములో నిండును. ఇట్లు మూడవజలమార్గమువలన $\frac{1}{3}$ దినములోనిండును. నాలవదానివలన $\frac{1}{6}$ దినములో నిండును. ఆజలమార్గములను నాలిగిటిని ఒక్కమారువిడచినచో ఆబావి యెంతకాలములో నిండును? మిత్రమా శీఘ్రముగ చెప్పుము.

(1) ఉదా:—ఇచట జలమార్గములు 4. ఇవివేర్వేర బావినినిండించుకాలములు $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ ఇవియన్నియు దినావయవములను తెలియచేయుభిన్నసంఖ్యలై యున్నవి. ఈసంఖ్యలయందలిహారము 1, 2, 3, 6 లను క్రమముగా ఆలవములచే భాగింప $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{6}{1}$ వీటియోగము $\frac{12}{1}$ దీనిచే 1 టినిభాగింప $\frac{1}{12}$ ఈదినావయవనికాలములో 4 మార్గములను ఒకమారువిడచుటచే 1 బావినిండును.

ఉపపత్తి:—మొదట ప్రతిజలమార్గమును విడచుటచే ఒకదినమునకెన్ని యెన్నిబావులనునిండించునదియు తెలిసికొని ఒకదినమునకిన్నిబావులునిండుచో ఒకబావియెంతకాలములో నిండునను త్రైరాశికముచే సూత్రోపపత్తి తెలియుచున్నది.

మొదటిజలమార్గము 1 దినమునకు ఒకబావిని నిండించును.

రెండవజలమార్గము ది $\frac{1}{2}$ నకు బావి 1 టిని గాన 1 దినమునకు 2 బావులను

మూడవమార్గము ది $\frac{1}{3}$ నకు బావి 1 టిని కాన 1 దినమునకు 3 బావులను

నాలవమార్గము ది $\frac{1}{6}$ నకు బావి 1 టిని కావున 1 దినమునకు 6 బావులను నిండించును. ఈత్రైరాశికములు చేయుటచే లవసంఖ్యలచే హారసంఖ్యలను భాగించుటయగుచున్నది. అన్నిటియొక్కయు యోగము 12, నాలుగుమార్గములను 1 దినమునందువిడచుటచే నిండుబావులసంఖ్య అగుచున్నది.

ఇన్నిబావులునిండుటకు 1 దినముపట్టుచో 1 బావినిండుటకుఎంతకాలము?

$\frac{1 \times 1}{12}$ దీనిచేలవములచే భాగింపబడినహారములయోగముచే 1 టిని భాగించుటయే యగుచున్నది.

(2) ఈఉపపత్తిననుసరించి జలమార్గమునుసంబంధించినప్రశ్నములన్నియు ఈసూత్రముచే నుత్తరింపబడగలవు.

ఒకతటాకమునందు రెండుజలాగమమార్గములును 1 జలనిర్గమమార్గమున్ను గలవు మొదటిజలాగమమార్గము $\frac{1}{2}$ దినములో తటాకమును నిండించును. రెండవజలాగమమార్గము $\frac{1}{3}$ దినములోనిండించును. జలనిర్గమమార్గమును విడచినచో ఆ తటాకపునీరు దినములో తీయును. మూటిని విడచినచో ఆతటాకమెంతకాలమునకునిండును? వైప్రకారము.

$\frac{1}{2}$ దినమునకు 1 తటాకమునిండుమార్గముచే దినమునకు 2 తటాకములు

$\frac{1}{3}$ దినమునకు 1 తటాకమునిండుమార్గముచే దినమునకు 3 తటాకములును నిండును.

జలనిర్గమమార్గము 1 దినముపూర్తిగవిడచినచో నాలుగుతటాకములనీరు తీయును. కావునజలాగమమార్గములు 2 ను విడిచినచో దినము 1 టికి 5 తటాకములునిండును. నిర్గమమార్గమును విడచినచో 1 దినమునకు 4 తటాకములుతీయును. కావున దినము 1 టికి మొత్తముమూడునువిడచినచో $5 - 4 = 1$ తటాకమే నిండును.

విశేషము— సూత్రప్రకారముగ చేయుటలో లవములచేహారములభాగించి నిండించులవములసంబంధమగు లబ్ధముల యోగమువలన శోషింపచేయు సంఖ్యలసంబంధమగు లబ్ధములయోగమును తీసివేసి ఆఅంతరముచే 1 టిని భాగింపవలయును. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, నిర్గమకాలము $\frac{1}{4}$ లవములచే హారములభాగించి లబ్ధములయోగాంతరము చేయగా $\frac{2}{1}+\frac{3}{1}-\frac{4}{1}=\frac{5}{1}-\frac{4}{1}=1$ దీనిచే ఒకటినిభాగింప 1 టి తటాకపూరణదినసంఖ్య.

(3) ఒకతటాకమునకు రెండుజలనిర్గమమార్గములు గలవు. ఒకదానినివిడచినచో $\frac{1}{3}$ దినములో నీరుతీయును. మఱియొకటివిడచినచో $\frac{1}{4}$ దినములో నీరు తీయును. రెండునువిడచినచో ఎంతకాలమునకు నీరుతీయును ?

ఇందువేరువేరుకాలములు $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ హారములను లవములచేభాగింప $\frac{3}{1}, \frac{4}{1}$ వీటి యోగము $\frac{7}{1}$ దీనిచే 1 టినిభాగింప $\frac{1}{7}$ దినభాగమున నీరుతీయును.

(4) ఈప్రకారము కార్యమునుసంబంధించినప్రశ్నములును చేయదగి యున్నవి.

ఒకపనిని ఒకమగవాడు $\frac{1}{4}$ దినములో చేయును. ఆపనినే ఆడమనిషి $\frac{1}{3}$ దినములో చేయును. ఆపనినే ఒకకుఱ్ఱవాడు $\frac{1}{2}$ దినములో చేయగలుగుచున్నాడు. ఆముగ్గురునుకలసినచో ఆపనిని ఎంతకాలమునకు చేయగలరు?

ఒకమగవాడు ఒకదినమునను అట్టిపనులను నాలుగిటిని చేయగలడు. ఆడమనిషి దినమునకు మూడిటిని చేయగలదు. కుఱ్ఱవాడు రెండిటిని చేయగలడు కావున ముగ్గురును ఒకదినమునకు అట్టిపనులను 9 టిని చేయగలరు. కావున ఆపనిని ఒకదానిని ముగ్గురును $\frac{1}{9}$ దినభాగములో చేయగలరు. ఇట్లు పైసూత్రప్రకారమే (ఆకార్యములను బావులుగను, ఆయామనుష్యులను జలమార్గములుగను భావించి చేయవగును.) ఇట్లు ఎట్టిప్రశ్నములైనను ఏసూత్రమునకెట్లుసంబంధించినదియు త్రైరాశికమెట్లుచేయవలసినదియు గమనించి చేయవచ్చును.

అథక్రయవిక్రయేకరణసూత్రంవృత్తమ్

పణ్యైస్స్వమూల్యానిభజేత్స్వభాగైర్హత్వాతదైక్యేనభజేచ్చతాని।
భాగాంశ్చమిశ్రేణధనేనహత్వామూల్యానిపణ్యానియథాక్రమంస్స్యుః

టీ॥ స్వమూల్యాని = తమతమవెలలను, స్వభాగైర్హత్వా = తమతమభాగములచే (వేర్వేర)గుణించి, పణ్యైఃభజేత్ = బజారువస్తువులపరిమాణసంఖ్యలచే భాగింపవలయును, తాని = ఆలబ్ధములనున్ను, భాగాంశ్చ = (కలసినపదార్థములయొక్క)భాగములనున్ను, మిశ్రేణధనేనహత్వా = మిశ్రధనముచేగుణించి తదైక్యేన = ఇదివరకు భాగింపగావచ్చినలబ్ధములయోగముచే, భజేత్ = భాగింపవలెను, అట్లుభాగింప యథాక్రమంమూల్యానిపణ్యానిచస్యుః = క్రమముగ మూల్యములును పణ్యములును అగును.

128. ప్ర. తా (1) ఏవెలకు ఎంతవస్తుపరిమితిలభించునో ఆవెల (ప్రమాణధనము) స్వమూల్యము. ఆవస్తుపరిమితి (ప్రమాణఫలము) పణ్యము. తాను వెచ్చింపదగిన మొత్తముధనము మిశ్రధనము. పణ్యములందు తనకుకావలసినభాగములుస్వభాగములు.

(2) తనకుఅభీష్టమైనద్రవ్యమును వెచ్చించి దానిచే 2, 3 వస్తువులను వంతులప్రకారము కొనవలసియున్నచో ఆయావస్తువులకైన వెలచొప్పున పణ్యములెంతెంతవచ్చును. వాటిమూల్యములెంతెంతయగును. ఇదివిడదీయుపద్ధతి.

(3) స్వమూల్యములనువేర్వేరస్వభాగములచేగుణించి ఆయాపణ్యమానములచే భాగింపుము. ఆలబ్ధములను వేర్వేరమిశ్రధనముచేగుణించి లబ్ధములయోగముచేభాగింప వేర్వేరమూల్యభాగములగును.

(4) స్వభాగములను వేర్వేరమిశ్రధనముచే గుణించి లబ్ధయోగముచే భాగింప స్వభాగములననుసరించి పణ్యపరిమాణమువచ్చును.

ఉదాహరణమ్-

సార్ధంతండులమానకత్రయం మహోద్రమ్మేణ మానాష్టకం
ముద్గానాంచ యదిత్రయోదశమితాఏతావణిక్కాకిణీః॥
ఆదాయార్పయ తండులాంశయుగళంముద్గైకభాగాన్వితం
క్షిప్రంక్షిప్రభుజోవ్రజేమహియత స్సార్ధోగ్రతో యాస్యతి॥ ౪౫॥

న్యాసః. పణ్యే $\frac{౭}{౨}$, $\frac{౮}{౧}$ మూల్యే $\frac{౧}{౧}$, $\frac{౧}{౧}$ స్వభాగౌ $\frac{౨}{౧}$, $\frac{౧}{౧}$ మిశ్రధనం $\frac{౧౩}{౬౪}$ అత్రస్వమూల్యేస్వభాగగుణితేపణ్యాభ్యాంభక్తే జాతే $\frac{౪}{౭}$, $\frac{౧}{౮}$ భాగాచ $\frac{౨}{౧}$, $\frac{౧}{౧}$ మిశ్రఘ్నేన $\frac{౧౩}{౬౪}$ సంగుణ్యతదైక్యేన $\frac{౩౯}{౫౬}$ భక్తేజాతేతండులముద్గమూల్యే $\frac{౧}{౬}$, $\frac{౭}{౧౯౨}$ తథాతండులముద్గమానేభాగౌ $\frac{౭}{౧౨}$, $\frac{౭}{౨౪}$ అత్రతండులమూల్యేపణౌ ౨ కాకిణ్యౌ ౨ వరాటకాః ౧౩ $\frac{౧}{3}$॥ ముద్గమూల్యే కాకిణ్యౌ ౨ వరాటకాః ౬ $\frac{౨}{3}$

ఉదా—తా॥ వర్తకుడా ! ఒకద్రిమ్మకునకు బియ్యము $3\frac{1}{2}$ మానికలును పెసలు 8 మానికలును బజారుధర అయియున్నది. ఈ 13 కాకిణులను పుచ్చుకొని రెండువంతులు బియ్యమున్ను ఒకవంతు పెసలున్ను ఇమ్ము. మాసహాయులు వెళ్ళుచున్నారు మేమునుభుజించి శీఘ్రముగవెళ్ళవలయును అని ఒకబాటసారి అడిగెను.

ఇందు 1 ద్రిమ్మము స్వమూల్యము. బియ్యపు మానికలు $3\frac{1}{2}$ యును పెసలు 8 మానికలున్ను పణ్యములు. 13 కాకిణులు మిశ్రధనము 2 వంతులు బియ్యము 1 వంతు పెసలుకావున 2, 1 ఇవిస్వభాగములు కాకిణులు 13 నకు పణ్యములు ఎంతెంతవచ్చును ? అనిప్రశ్నము

సూత్రప్రకారము $\dfrac{\text{తంమూ} \times \text{తంభా}}{\text{తం పణ్య}} = \dfrac{1 \times 2}{\frac{7}{2}} = 1 \times 2 \times \dfrac{2}{7} = \dfrac{4}{7}$

లబ్ధము. ఇట్లు $\dfrac{\text{ముమూ} \times \text{ముభా}}{\text{ముపణ్య}} = \dfrac{1 \times 1}{8} = \dfrac{1}{8}$ లబ్ధము ఇచట ము = పెసలు తం =

బియ్యము లబ్ధములయోగము $\dfrac{4}{7} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{32 + 7}{56} = \dfrac{39}{56}$

లబ్ధములను వేర్వేరమిశ్రధనముచే గుణించి లబ్ధయోగముచే భాగింప

$\dfrac{4}{7} \times \dfrac{13}{64} \div \dfrac{39}{56} = \dfrac{4}{7} \times \dfrac{13}{64} \times \dfrac{56}{39} = \dfrac{1}{6}$ తండులభాగమూల్యము

$\dfrac{1}{8} \times \dfrac{13}{64} \div \dfrac{39}{56} = \dfrac{1}{8} \times \dfrac{13}{64} \times \dfrac{56}{39} = \dfrac{7}{192}$ ముద్గభాగమూల్యము

స్వభాగము 2, 1 ల మిశ్రధనముచేగుణించిలబ్ధైక్యముచేభాగింప

$\dfrac{2}{1} \times \dfrac{13}{64} \div \dfrac{39}{56} = \dfrac{2 \times 13 \times 56}{1 \times 64 \times 39} = \dfrac{7}{12}$ మా తండులపణ్యమితి

$\dfrac{1}{1} \times \dfrac{13}{64} \div \dfrac{39}{56} = \dfrac{2 \times 13 \times 56}{1 \times 64 \times 39} = \dfrac{7}{24}$ మా. ముద్గపణ్యమితి

ఇచట ద్రిమ్మములో $\frac{1}{6} = 2$ పణములు 2 కాకిణులు $13\frac{1}{3}$ వరాటకములు

ద్రిమ్మములో $\dfrac{7}{192} = 2$ కాకిణులు వరాటకములు $6\frac{2}{3}$ అగును.

ఉపపత్తి:— మొదట బియ్యము $\frac{7}{2}$ మానికలకును వెల 1 ద్రిమ్మమగుచో 2 మానికలకువెలయెంత ? ఇట్లు పెసలు 8 మానికలకు వెల 1 ద్రిమ్మమగుచో 1 మానికకు వెలయెంత ఈ త్రైరాశికములనుచేయుట స్వభాగములచే మూల్యము లగుణించి పణ్యములచే భాగించుటయే యగుచున్నది. దీనిచేలబ్ధములు వచ్చును. ఈలబ్ధములయోగము బియ్యపు (2 మా)యొక్కయు పెసలు (1మా)యొక్కయు మూల్యములయోగము అగును. పిమ్మటలబ్ధయోగమునందు లబ్ధముధనమగుచో ఇష్ట మిశ్రధనమునందెంత ? యను త్రైరాశికములనువేర్వేర చేయుగా మూల్యభాగము లగును.

ఇట్లు లబ్ధయోగమిశ్రధనమువలన తండులములు 2 మానికలగుచో మిశ్రధన మువలనెంత ? పెసలు 1 మానికఅగుచో మిశ్రధనమువలనెంత ? ఈ త్రైరాశికములచే మూల్యభాగములు పణ్యభాగములును అగుచున్నవి.

ఉదాహరణాంతరం

కర్పూరస్యవరస్య నిష్కయుగళే నైకంపలం ప్రాప్యతే
వైశ్యానందన చందనస్యచ పలం ద్రమ్మాష్టభాగేనచేత్।
అష్టాంశేన తథాగురోః పలదలం నిష్కేణ మేదేహితాన్
భాగైరేకకషోడశాంశకమితైర్ధూపం చికీర్షామ్యహం॥౪౬॥

న్యాసః. మూల్యానిద్రమ్మాః ౩౨, ౧/౮, ౧/౮ పణ్యాని౧,౧,౧/౨
భాగాః ౧, ౧౬, ౮ మిశ్రధనంద్రమ్మాః ౧౬ లబ్ధానికర్పూరాదీ
నాంమూల్యాని ౧౪ ౨/౯, ౮/౯, ౮/౯ తథా
తేషాంపణ్యాని ౪/౯, ౬౪/౯, ౩౨/౯

తా॥ వైశ్యులనానందింపచేయు వర్తకశ్రేష్ఠుడా ! రెండునిష్కములకు కర్పూరముమంచిది 1 పలము వచ్చును. మంచిగంధము(పొట్టు) ద్రిమ్మము $\frac{1}{8}$ భాగమునకు 1 పలముపచ్చును. అట్లు ద్రిమ్మములో $\frac{1}{8}$ భాగమునకు అగురు $\frac{1}{2}$ పలము వచ్చును. 1 నిష్కమునకు ఒకపాలుకర్పూరము 16 భాగములు చందనము

8 భాగములు అగురు ఉండునట్లు ఈమూడువస్తువులను ఇమ్ము నేను ధూపద్రవ్యము చేయదలచితిని అని అడిగెను.

ఇచటమూల్యములు కొన్ని నిష్కమానములోను కొన్ని ద్రమ్మమానములో నున్ను గలవుకావున అన్నిటిని ఒకజాతివానిగ చేయుటకై ద్రమ్మమానమునకు మార్చబడినవి.

ఇచట 32 = కమూ, $\frac{1}{8}$ = చంమూ, $\frac{1}{8}$ = అమూ. అట్లు పణ్యములు కప = 1, చంప = 1, అప = $\frac{1}{2}$ భాగములు. కభా = 1, చంభా = 16, అభా = 8 మిశ్రధనము 16 ద్రమ్మములు సూత్రప్రకారము మూల్యములను స్వభాగములచే గుణించిపణ్యములచే భాగింప

లబ్ధములు క, $\frac{32 \times 1}{1} = 32$,, చం $\frac{\frac{1}{8} \times \frac{16}{1}}{1} = 2$,, అ, $\frac{\frac{1}{8} \times \frac{8}{1}}{\frac{1}{2}} = 2$

లబ్ధయోగము $32 + 2 + 2 = 36$

లబ్ధములను వేర్వేర మిశ్రధనముచే గుణించి లబ్ధయోగముచే భాగింప

$\frac{32 \times 16}{36} = \frac{8 \times 16}{9} = \frac{128}{9} = 14\frac{2}{9}$ కర్పూరమూల్యభాగము. అట్లు చందనమూల్యభాగము $\frac{2 \times 16}{36} = \frac{2 \times 4}{9} = \frac{8}{9}$ ఇట్లుఅగరుమూల్యభాగము $\frac{8}{9}$.

స్వభాగములను మిశ్రధనముచేగుణించి లబ్ధయోగముచేభాగింప

$\frac{1 \times 16}{36} = \frac{4}{9}$ పలంకర్పూరం ఇట్లు $\frac{16 \times 16}{36} = \frac{64}{9}$ చందనపలం, $\frac{8 \times 16}{36} = \frac{32}{9}$ అగరుపలపరిమితియునగుచున్నది.

రత్నమిశ్రీకరణసూత్రం వృత్తమ్.

నరఘ్నదానోనితరత్నశేషైరిష్టేహృతే స్యుఃఖలుమౌల్యసంఖ్యాః।
శేషైర్హతేశేషవధేపృథక్స్థైరభిన్నమూల్యాన్యథవాభవన్తి॥ ౪౯॥

టీ॥ నరఘ్నదానోనితరత్నశేషైః = మనుష్యసంఖ్యచే గుణింపబడినదానసంఖ్యచే తీసివేయబడిన రత్నశేషములచే, ఇష్టేహృతే = ఇష్టసంఖ్యభాగింపబడినచో, మౌల్యసంఖ్యాఃస్యుఃఖలు = రత్నమూల్యసంఖ్యలగును.

అథవా = లేక, శేషవధే = ఆరత్నశేషములగుణనము, శేషైర్హతే = ఆశేషములచే వేర్వేరభాగింపబడినచో, అభిన్నమూల్యానిభవన్తి = అభిన్నమూల్యములగును.

129. ప్ర. (1) (వక్ష్యమాణోదాహరణము చూ) ఇవ్వబడినరత్నములసంఖ్యను వర్తకులసంఖ్యచే గుణించి ఈగుణనఫలమును ఆయారత్నముల సంఖ్యలవలన వేర్వేరవ్యవకలింపుము ఇవి రత్నశేషములు. ఒకానొకఇష్టసంఖ్యనుకల్పించి ఆసంఖ్యను రత్నశేషములచే భాగింపుము ఆలబ్ధములు రత్నమూల్యములు క్రమముగ నగును.

(2) లేక రత్నశేషముల గుణనఫలమును వేర్వేరఆయారత్నశేషములచే భాగింపుము. ఇవియురత్నమూల్యములగును ఇవిఅభిన్నసంఖ్యలగును

ఉదాహరణం

మాణిక్యాష్టకమింద్రనీలదశకం ముక్తాఫలానాంశతం
సద్వజ్రాణిచపంచ రత్నవణిజాంయేషాం చతుర్ణాంధనం।
సంగస్నేహవశేన తే నిజధనాద్దత్త్వైకమేకం మిథో
జాతాస్తుల్యధనాః పృథగ్వదసఖే తద్రత్నమౌల్యానిమే॥ ౪౭॥

న్యాసః. మా౮ నీ౧౦ ము౧౦౦ వ౫ దానమ్ ౧ నరాః౪ నరగుణితదానేన ౪ రత్నసంఖ్యాసూనితాసు శేషాణి మా౪ నీ౬ ము౯౬ వ౧ ఏతైరిష్టరాశౌభక్తే రత్నమూల్యాని. తానిచ యథా కథంచిదిష్టేకల్పితే భిన్నాని. అతోత్రేష్టం తథాసుధియాకల్ప్యతే యథాఅభిన్నానీతి తథాకల్పితమ్ ౯౬ అతోజాతానిమూల్యాని ౨౪ ౧౬, ౧, ౯౬ సమధనమ్ ౨౩౩ అథవాశేషాణాంవధే ౨౩౦౪ పృథక్ఛేషైర్భక్తే జాతాన్యభిన్నాని ౫౭౬, ౩౮౪, ౨౪, ౨౩౦౪ జాతానాంచతుర్ణాంతుల్యధనమ్ ౫౫౯౨ తేషామేతేద్రమ్మాస్సంభావ్యన్తే॥

తా॥ నలుగురువర్తకులలో ఒక్కొక్కనిపద్ద క్రమముగా 8 మాణిక్యములు 10 ఇంద్రనీలములు 100ముత్యములు 5మంచివజ్రములు ధనముగనున్నవి వారు

అన్యోన్యమైత్రిచే ఒక్కొక్కడు తనవద్దనున్న రత్నములలో ఇతరులకు ఒక్కొక్క రత్నము చొప్పున యిచ్చిరి. అపుడువారు తమతమవద్దనున్న రత్నముల వెలలనుబట్టి చూడగా అందరును సమానధనవంతులైరి. మిత్రమా నాకు వేగముగ ఆరత్నముల వెలలను చెప్పుము

ఇచ్చుటవర్తకులు 4 గురు. ఒక్కొక్కనికి ఇవ్వబడినరత్నములు (దానము) 1టి సూత్రప్రకారము:—(1) వర్తకసంఖ్య 4 చే దానసంఖ్య 1 ను గుణింప 4 దీనిని ఆయారత్నసంఖ్యలలో తీసివేయగా మా 8—4 = 4 మా, నీ 10—4 = 6 నీ ము 100 —4 = 96 ము, వ=5—4=1 వజ్ర ఇవివరస్సు దానోనితరత్నశేషములు ఈసంఖ్యలచే కల్పితమగు ఒకఇష్టాంకమును వేర్వేరగభాగింప లబ్ధములు రత్నమూల్యములు. కానిఈసంఖ్యలచే నిశ్శేషముగభాగింపబడనిసంఖ్యయగుచో రత్నమూల్యములు భిన్నసంఖ్యలగును. నిశ్శేషముగభాగింపబడుసంఖ్యఅగుచో రత్నమూల్యములు అభిన్నసంఖ్యలగును. కావున నిశ్శేషముగ భాగింపబడు 96 ఇష్టసంఖ్యగ కల్పింపబడెను. దీనినిరత్నశేషములచే భాగింపక్రమముగా మాణిక్యమూల్యము $\frac{96}{4}=24$. ఇంద్రనీలమూల్య $\frac{96}{6}=16$, ముత్యమూల్య $\frac{96}{96}=1$, వజ్రమూల్య $\frac{96}{1}=96$ దీనింబట్టి మొదటవారివారిధనములు (1) $24\times8=192$ (2) $16\times10=160$ (3) $100\times1=100$ (4) $96\times5=480$ ఒక్కొక్కడు తనవద్దనున్న దానిలో ఇతరులకొక్కొక్కటిని ఇచ్చుటచే

(1) $(24\times5)+16+1+96=120+16+1+196=233$ సమధనము ఇట్లు

(2) $16\times7+24+1+96=112+24+1+196=233$ ఇట్లు అందరకును గ్రహింపవలెను.

ఇచట 4,6,96,1 ఈసంఖ్యలచే నిశ్శేషముగభాగింపబడుసంఖ్య 96 లఘుతమాపవర్త్యము అగుచున్నదియని గ్రహింపవలెను

(2) రత్నశేషములగుణనము $4\times6\times96\times1=2304$ దీనినిరత్నశేషములచేభాగింప రత్నములు మామూ 576, నీమూ 384, ముమూ 24, వమూ 2304 ఇచట సమధనము 5592 అగుచున్నది

ఉపపత్తి:—ఉదాహరణమునను సరించి వారువారు తమతమ రత్నములను ఇతరులకివ్వగా ఒక్కొక్కనివద్దనిట్లుండును

మొదటివానివద్ద మా 5 నీ 1 ము 1 వజ్ర 1 =
రెండవ ,, = మా 1 నీ 7 ము 2 వ 1 =
మూడవ ,, = మా 1 నీ 1 ము 97 వ 1 =
నాలవ ,, = మా 1 నీ 1 ము 1 వ 2

ఇట్లు ఇచ్చినపిమ్మట అందరును సమానధనవంతులగుటచే సమానధనములలో సమానసంఖ్యను తీసివేసినను వారిసమత్వము ఉండును అనుసిద్ధాంతముచే నలుగురిధనములనుండియు మా 1ని నీ 1 టిని ము 1 ని వ 1 టిని తీసివేయగా ఇట్లు అగుచున్నది మా 4= నీ 6= ము 96= వ 1 ఇవి వరస్సు దానోనితరత్నశేషములగుచున్నవి. ఇపుడు ఇష్టసంఖ్యనుకల్పించి భాగించుట మా 4 కును 96 మూల్యమగుచో మా 1 కి వెలయెంత ? ఇట్లు త్రైరాశికములు చేయుటయైనచో ఇట్టిసూత్రము పపన్నమగును (కనుకనే ఇట్టిప్రశ్నములందు నియతమగుమూల్యములభించదని తెలియవగియున్నది)

సువర్ణగణితేకరణసూత్రంవృత్తం

సువర్ణవర్ణాహతి యోగరాశౌ స్వర్ణైక్యభక్తే కనకైక్యవర్ణః।
వర్ణోభవేచ్ఛోధితహేమభక్తే వర్ణోద్ధృతే శోధితహేమసంఖ్యా॥ ౫౦॥

టీ॥ సువర్ణవర్ణాహతి యోగరాశౌ = బంగారుతునకపరిమాణములయొక్కయు వర్ణ(వన్నె)సంఖ్యలయొక్కయు (వేర్వేర)గుణనములయోగసంఖ్య, స్వర్ణైక్యభక్తే = స్వర్ణపరిమాణములయోగముచే భాగింపబడుచో, కనకైక్యవర్ణః = సువర్ణయోగముయొక్క వర్ణమగును. శోధితహేమభక్తే = పుటము వేయగానగు బంగారము (యొక్కపరిమాణము) చేభాగింప, వర్ణోభవేత్ = వర్ణము (పుటము వేయబడినబంగారమునకు) అగును. వర్ణోద్ధృతే = పుటము వేయబడినబంగారముయొక్క వర్ణముచే భాగింపబడుచో, శోధితహేమసంఖ్యా = పుటము వేయబడినబంగారముయొక్క పరిమాణమగును.

130. ప్ర. తా (1) కొన్నిబంగారముకణికలుగలవనుకొనుము ఆకణికలలో ఒకదానికి ఎక్కువవన్నె ఒకదానికి తక్కువవన్నె ఇట్లు అన్నిటికిని భిన్నములగు వర్ణములుగలవు అపుడాకణికలను ఒకముద్దగా కరగించినచో మొదటిపరిమాణవర్ణములనుబట్టి మొత్తపువర్ణమునుచెప్పుట మొత్తపువర్ణమునుబట్టి పుటము వేయబడిన

బంగారపుపరిమాణమునుచెప్పుట పుటమువేయుగా కొంతతగ్గి నిలచినబంగారమును బట్టి మొత్తపువర్ణమునుచెప్పుట ఇందులకుపద్ధతి.

(సామాన్యముగ కరిగినచో బంగారముతగ్గదుకాని పుటమువేయుచో పరిమాణముతగ్గును అట్లుతగ్గినకొలదిని వన్నెహెచ్చును.)

(2) ఆయాబంగారు కణికలయొక్క వేర్వేరుపరిమాణములను వాటివాటి వర్ణసంఖ్యచేగుణించి ఆగుణనఫలములను కలుపుము, ఈయోగసంఖ్యను పరిమాణముల మొత్తముచే భాగించినచో మొత్తమునకగువర్ణమగును. (ఇదిసాధారణముగ కరిగినపుడు)

(3) పుటమువేసినచో మిగిలినబంగారపుమొత్తముపరిమాణముచే ఆయోగసంఖ్యను భాగింప వర్ణమగును వర్ణముచేభాగింప మిగిలినపరిమాణ మగును.

ఉదాహరణాని

విశ్వార్కరుద్రదశవర్ణసువర్ణమాషా దిగ్వేదలోచనయుగప్రమితాః క్రమేణ।ఆవర్తితేషువద తేషుసువర్ణవర్ణ స్తూర్ణంసువర్ణగణితజ్ఞ వణిగ్భవేత్కః॥ ౪౮॥ తేశోధనేనయదివింశతిరుక్తమాషా స్స్యుఃషోడశాశు వదవర్ణమితిస్తదాకా।చేచ్ఛోధితం భవతి షోడశవర్ణహేమతే వింశతేః కతిభవన్తి తదాతు మాషాః॥ ౪౯॥

న్యాసః వర్ణాః ౧౩	౧౨	౧౧	౧౦
మాషాః ౧౦	౪	౨	౪

జాతాఆవర్తితసువర్ణవర్ణమితిః ౧౨ మాషాశ్చ ౨౦ ఏతఏవ యదిశోధితాస్స్యుఃషోడశమాషాభవన్తితదావర్ణాః ౧౫, యదితేచ షోడశవర్ణాస్తదా పంచదశమాషాభవన్తి ౧౫

తా॥ సువర్ణగణితమునెరింగినవర్తకుడా ! వన్నె 13 గలబంగారము 10మాషములు వన్నె 12 గలబంగారము 4 మాషములు, వన్నె 11 గలబంగారము 2మాషములు. వన్నె 10 గలబంగారము 4 మాషములు. ఆబంగారముల నొకముద్దగ కరిగినచో ఏవన్నెయగును ? త్వరగచెప్పుము.

ఆ 20 మాషములబంగారమును పుటమువేయగా 16 మాషములుమిగిలినచో వన్నెఎంతయగును ? పుటమువేయనైనబంగారమునకు 16 వన్నెయుండినయెడ ఎంతబంగారముండును ?

సూత్రప్రకారము:—ఆయాబంగారములవర్ణములను వాటివాటి పరిమాణములచే గుణించి కలుప $(13 \times 10)+(12 \times 4)+(11 \times 2)+(10 \times 4)=$ $130+48+22+40=240$ యోగసంఖ్య. కనకైక్యం 20. కావున $\frac{240}{20}=12$ బంగారు మొత్తపువర్ణము.

వర్ణము 12 చే భాగింప $\frac{240}{12}=20$ మొత్తపుపరిమాణము. ఇట్లు పుటము వేయగానిలచినబంగారము మాషములు 16 అగుచో $\frac{240}{16}=15$ శోధితకనకవర్ణము. శోధితకనకవర్ణము 16 అగుచో $\frac{240}{16}=15$ శోధితకనకపరిమాణము.

ఉపపత్తి:—బంగారపుధర వన్నెహెచ్చినచోహెచ్చగును తగ్గినచోతగ్గును ఇట్లువన్నెనుబట్టియునుండును. పుటమువలన వన్నెహెచ్చినచో బంగారపుపరిమాణముతగ్గును కావున నియమితధనమునకు హెచ్చువన్నెగలబంగారము తక్కువగను తక్కువవన్నెగలబంగారము హెచ్చుగను వచ్చును. ఇదివ్యస్తత్రైరాశిక విషయము.

నియతధనమునకు వన్నె 13 గల బంగారము 10 మాషములువచ్చుచో 1వన్నె గలబంగారమెంత ? ఇదివ్యస్తత్రైరాశికము కావున $\frac{13 \times 10}{1}$, అగుచున్నది.

ఇపుడు బంగారపువర్ణములు వఅ, వక, వగ, వచ క్రమముగవాటిమాషములు యమా, రమా, లమా, సమా } అనికల్పించుము

పైప్రకారము త్రైరాశికములచేయగా ఒకవర్ణముగల బంగారపుమాషములు $\frac{వఅ \times యమా}{1}$, $\frac{వక \times రమా}{1}$, $\frac{వగ \times లమా}{1}$. $\frac{వచ \times సమా}{1}$, వీటియోగము=యో

యోగమితసువర్ణమునందు వర్ణము 1 టి యగుచో ఇష్టమాషమితసువర్ణము నందెంతయుండును ? ఇదియును వ్యస్తత్రైరాశికవిషయము. కావున

$$\frac{\text{యో}\times 1}{\text{ఇమా}} = \text{ఇష్టసువర్ణవర్ణము} \quad \therefore \quad \frac{\text{యో}}{\text{ఇష్టవర్ణ}} = \text{ఇమా అగుచున్నది}$$

ఈకారణముచే పుటమువేయుటవలన బంగారముతగ్గినచో అపరిమితిచేభాగించినచో లబ్ధమధికమగును ఈవిషయము ఉత్తరార్ధమందు చెప్పబడినది ఇట్లీసూత్రముపపన్నము

అథ వర్ణజ్ఞానాయ కరణసూత్రంవృత్తం

స్వర్ణైక్యనిఘ్నాద్యుతిజాతవర్ణా త్సువర్ణతద్వర్ణవధైక్యహీనాత్।
అజ్ఞాతవర్ణాగ్నిజసంఖ్యయాప్త మజ్ఞాతవర్ణస్యభవేత్ప్రమాణమ్॥ ౫౧

టీ॥ స్వర్ణైక్యనిఘ్నాత్ = సువర్ణపరిమాణములయోగముచే గుణింపబడినదియు, సువర్ణతద్వర్ణవధైక్యహీనాత్ = స్వర్ణపరిమాణములయొక్కయువాటివర్ణములయొక్కయు గుణనఫలములయోగముచే తీసివేయబడినదియునగు, యుతిజాతవర్ణాత్ = యోగజవర్ణమువలన, అజ్ఞాతవర్ణాగ్నిజసంఖ్యయా = తెలియబడనివన్నెగలస్వర్ణపరిమాణముచే, ఆప్తం = భాగింపగావచ్చినలబ్ధము; అజ్ఞాతవర్ణస్య = తెలియబడనివన్నెయొక్క, ప్రమాణం = ప్రమాణము, భవేత్ = అగును.

131. ప్ర. కరిగింపగానగు మొత్తముయొక్కవర్ణము యోగజవర్ణము. వేరువేరుబంగారముల పరిమాణములును యోగజవర్ణమున్ను తెలియును. వేరువేరు బంగారములలో ఒకదానికి వన్నె తెలియదు తక్కినవాటివన్నె తెలియును. అపుడు యోగజవర్ణమును పరిమాణయోగముచే గుణింపుము. అందు ఆయావర్ణములను వాటివాటిపరిమాణములచే గుణించి కలుపగానగు యోగరాశిని వ్యవకలింపుము ఆశేషమును వన్నెతెలియనిబంగారపుపరిమాణముచే భాగింపుము ఆలబ్ధము ఆబంగారముయొక్క వన్నెయగును

ఉదాహరణమ్

దశేశవర్ణావసునేత్రమాషా అజ్ఞాతవర్ణస్యషడేతదైక్యే।
జాతంసఖేద్వాదశకంసువర్ణ మజ్ఞాతవర్ణస్యవదప్రమాణమ్॥ ౫౦॥

న్యాసః. ౧౦ / ౮ | ౧౧ / ౨ | ౦ / ౬ ఆవర్తితో వర్ణః ౧౨ లబ్ధ మజ్ఞాతవర్ణమానమ్ ౧౫

తా॥ మిత్రమా ! 10 వన్నెగలబంగారము 8 మాషములు 11 వన్నెగల బంగారము 2 మాషములు మరియొకబంగారము 6 మాషములున్నది దానివన్నె తెలియదు మొత్తముబంగారముయొక్కవన్నె 12, ఆ వన్నె తెలియనిబంగారమునకు వన్నెను చెప్పుము.

యోగజవర్ణము = యోవ = 12. స్వర్ణైక్యము = సుయో = 16. సువర్ణతద్వర్ణవధయోగ = యో , అజ్ఞాతవర్ణసువర్ణపరిమాణం = అసుప , అజ్ఞాతవర్ణ = అవ, సూత్రప్రకారము

$$\frac{\text{యోవ}\times\text{సుయో}-\text{యో}}{\text{అసువ}} = \text{అవ} = \frac{12\times 16-(10\times 8+11\times 2+6\times 0)}{6} =$$

$$\frac{192-102}{6} = \frac{90}{6} = 15 \text{ ఇదివన్నె తెలియనిబంగారమునకు వన్నెయైనది.}$$

ఉపపత్తి:— తెలియనివర్ణము = యా అనుకొందము అపుడు పూర్వసూత్రముచే

$$\text{యోవ} = \frac{10\times 8+811\times 2+\text{యా}\times 6}{\text{సుయో}} \therefore 10\times 8+11\times 2+\text{యా}\times 6$$

$$=\text{యోవ}\times\text{సుయో}$$

$$\therefore \text{యా}\times 6 = \text{యోవ}\times\text{సుయో}-(10\times 8+11\times 2)$$

$$\therefore \text{యా} = \frac{\text{యా}\times 6}{6} = \frac{\text{యోవ}\times\text{సుయో}-(10\times 8+11\times 2)}{6}$$

ఇచట 6 ఇది అజ్ఞాతవర్ణసువర్ణపరిమాణము కావునసూత్రముపపన్నమగుచున్నది.

సువర్ణజ్ఞానాయకరణసూత్రంవృత్తం

స్వర్ణైక్యనిఘ్నోయుతిజాతవర్ణ స్స్వర్ణఘ్నవర్ణైక్యవియోజితశ్చ।
అహేమవర్ణాగ్నిజయోగవర్ణవిశ్లేషభక్తోఽవిదితాగ్నిజంస్యాత్॥ ౫౨॥

టీ॥ యుతిజాతవర్ణః = యోగజవర్ణము. స్వర్ణైక్యనిఘ్నః = సువర్ణపరిమాణములయోగము చేగుణింపబడినదై స్వర్ణఘ్నస్వర్ణైక్యవియోజితశ్చ = సువర్ణముల యొక్కయు వాటివర్ణములయొక్కయు గుణనములయోగముచే తీసివేయబడినదియునై అహేమవర్ణాగ్నిజయోగవర్ణవిశ్లేషభక్తః =పరిమాణము తెలియని బంగారముయొక్క వర్ణమునకును యోగవర్ణమునకును నైన యంతరముచే భాగింపబడినదై అవిదితాగ్నిజం = తెలియనిబంగారము స్యాత్=అగును.

132. తా॥ పైప్రశ్నమువంటివలె ఒకబంగారమునకు పరిమాణము తెలియక వన్నెమాత్రము తెలిసినచో తక్కినబంగారపుపరిమాణములబట్టియు యోగజవర్ణమునుబట్టియు బంగారము నెరుంగుటకుపద్ధతి— యోగజవర్ణమును సువర్ణయోగముచే గుణింపుము. దానివలన ఆయావర్ణములను ఆయాపరిమాణములచే గుణింపనగుగుణనఫలములయోగమును వ్యవకలింపుము ఆశేషమునుయోగజవర్ణముయొక్కయు తెలియనిబంగారమునకైనవర్ణముయొక్కయు అంతరముచే భాగింపుము. లబ్ధముబంగారమగును

ఉపపత్తి — వర్ణములు వఅ,వక, వగ. వీటిపరిమాణములు క్రమముగాయామా, కామా, నీమా, అనికల్పింపుదము. ఇందు యామా తెలియనిపరిమాణమనుకొనుము యోగజవర్ణము = యోవ ఇపుడు 130 ప్ర చే

$$\text{యోవ} = \frac{\text{వఅ} \times \text{యామా} + \text{వక} \times \text{కామా} + \text{వగ} \times \text{నీమా}}{\text{యామా} + \text{కామా} + \text{నీమా}}$$

$$\therefore (\text{వఅ} \times \text{యామా}) + (\text{వక} \times \text{కామా}) + (\text{వగ} \times \text{నీమా}) = (\text{యామా} + \text{కామా} + \text{నీమా}) \times \text{యోవ}$$

$$\therefore (\text{వఅ} \times \text{యామా}) + (\text{వక} \times \text{కామా}) + (\text{వగ} \times \text{నీమా}) = (\text{యామా} \times \text{యోవ}) + \{(\text{కామా} + \text{నీమా}) \times \text{యోవ}\}$$ సమశోధనము చేయగా

$$(\text{వఅ} \times \text{యామా}) - (\text{యామా} \times \text{యోవ}) = \{(\text{కామా} + \text{నీమా}) \times \text{యోవ}\} - \{(\text{వక} \times \text{కామా}) + (\text{వగ} \times \text{నీమా})\} = \text{యామా}(\text{వఅ} - \text{యోవ})$$

$$= (\text{కామా} + \text{నీమా}) \times \text{యోవ} - (\text{వక} \times \text{కామా} + \text{వగ} \times \text{నీమా})$$

$$\therefore \text{యామా} = \frac{(\text{కామా} + \text{నీమా}) \times \text{యోవ} - (\text{వక} \times \text{కామా} + \text{వగ} \times \text{నీమా})}{\text{వఅ} - \text{యోవ}}$$

ఇట్లీసూత్రముపపన్నమగుచున్నది.

ఉదాహరణం

దశేందువర్ణాగుణచంద్రమాషాఃకించిత్తథాషోడశకస్య తేషాం।
జాతంయుతౌద్వాదశకంసువర్ణంకతీహ తేషోడశవర్ణమాషాః॥ ౫౧॥

న్యాసః

౧౦	౧౪	౧౨
౧	౧	

ఆవర్తితోవర్ణః ౧౬ లబ్ధంమాషమానమ్

తా॥ 10 వన్నెగలబంగారము 3 మాషములు 14 వన్నెబంగారము 1మాషము మరియొకబంగారమునకు 16 వన్నెగలదు. దానిపరిమాణము తెలియదు. మూడు బంగారములను కలుపగానగుబంగారమునకు 12 వన్నెయైనది ఆతెలియనిబంగారమెంత ?

సూత్రప్రకారము:—యోగజవర్ణము 12 ను స్వర్ణయోగము $3+1=4$ చే గుణించి సువర్ణతద్వర్ణవధయోగమును దానివలనతీసివేయగా $12 \times 4 - (10 \times 3 + 14 \times 1) = 4$ శేషము దీనిని అజ్ఞాతసువర్ణముయొక్కవర్ణమునకును యోగజవర్ణమునకునైన యంతరము $16 - 12 = 4$ చే భాగింప లబ్ధము 1 ఇదిబంగారముయొక్క పరిమాణము

సువర్ణజ్ఞానాయాన్యత్కరణసూత్రంవృత్తం

సాధ్యేనోనోఽనల్పవర్ణోవిధేయస్సాధ్యోవర్ణస్స్వల్పవర్ణోనితశ్చ।
ఇష్టఘ్నౌశేషకేస్వర్ణమానే స్యాతాంస్వల్పానల్పయోర్వర్ణయోస్తే॥ ౫౩

టీ॥ అనల్పవర్ణః = అధికమగువన్నె, సాధ్యేన = సాధింపదగినవన్నెచే, ఊనః = తీసివేయబడినదైచేయగగినది, సాధ్యః = సాధింపదగిన, వర్ణః = వర్ణము స్వల్పవర్ణోనితః = తక్కువసంఖ్యగలవన్నెచే తీసివేయబడినదై చేయదగినది, శేషకే=ఆశేషములు, ఇష్టఘ్నౌ = ఇష్టసంఖ్యచే గుణింపబడినవియై స్వల్పానల్పయోర్వర్ణయోః = అల్పము అధికము అయినవర్ణములసంబంధములగు స్వర్ణమానే=స్వర్ణపరిమాణములై, స్యాతాం = అగుచున్నవి.

133. ప్ర. తా॥ రెండుబంగారములయొక్క వేర్వేరువన్నెలును వానిని కరిగింపగానగు బంగారముయొక్కవన్నెయు తెలిసినచో ఆబంగారముల పరిమితుల నెరుంగుట. యోగజవర్ణము సాధ్యవర్ణము దానినివర్ణములలో పెద్దసంఖ్యవలనతీసి

వేయవలయును అట్లుసాధ్యవర్ణమువలన చిన్నసంఖ్యనుతీసివేయవలయును. ఆ శేషములను ఇష్టసంఖ్యచేగుణింపనగుసంఖ్యలు బంగారపుపరిమాణములు

ఉదాహరణం

హాటకగుటికే షోడశదశవర్ణే తద్యుతౌ సఖే జాతం।
ద్వాదశవర్ణం స్వర్ణం బ్రూహి తయోః స్వర్ణమానే మే॥ ౫౨॥

న్యాసః ౧౬ | ౧౦ / ౦ | ౦ సాధ్యోవర్ణః ౧౨ కల్పిత మిష్టం ౧ లబ్ధేస్వర్ణమానే ౧౬ | ౧౦ / ౨ | ౪

అథవాద్వికేనేష్టేన ౪,౮ అర్ధగుణితేనవా ౧. ౨ ఏవంబహుధా.

తా॥ రెండుబంగారుగుటికలుగలవు ఒకదానికి 16 వన్నె రెండవదానికి 19 వన్నె రెండిటినికలిపికరిగింప ఆముద్దకు 12వన్నె ఆగుటికలెంతెంతయుండును?

ఇందు సాధ్యవర్ణము 12 అల్పవర్ణము 10 అధికవర్ణము 16

16—12 = 4, 12—10 = 2 శేషములు 4, 2 వీటిని 1టి ఇష్టముని దానిచేగుణింప 4, 2 ఇష్టము 2 అగునో 8, 4 ఇష్టము $\frac{1}{2}$ అగునో 2, 1 ఇవిక్రమముగ అల్పాధికవర్ణసువర్ణపరిమాణములు అనగా పెద్దసంఖ్య తక్కువవన్నెగలబంగారమునకు చిన్నసంఖ్య ఎక్కువవన్నెగల బంగారమునకును పరిమాణములగును. ఇట్లు ఇష్టాంకముకొలదియు పరిమాణము మారుచుండును. కావున ఈప్రశ్నయునందును నియతమగు ప్రత్యుత్తరము లభింపదు.

ఉపపత్తి—అ, క వర్ణమానములు యా, కా సువర్ణమానములు ఇట్లుకల్పించి వీటిచే యోగజసువర్ణవర్ణమానము (130 ప్ర చే)

$$\frac{\text{యా} \times \text{అ} + \text{కా} \times \text{క}}{\text{యా} + \text{కా}} = \text{యోవ}$$

∴ యా. అ + కా. క = యోవ. యా + యోవ. కా. సమశోధనము చేయగా

యా. అ — యోవ. యా = యోవ కా — కా. క

$$\therefore \text{యా} = \frac{\text{కా}(\text{యోవ} - \text{క})}{\text{అ} - \text{యోవ}}$$

ఈసమీకరణమువలన (యోవ—క) ఈసంఖ్యను కామానముచేగుణించి (అ — యోవ) ఈసంఖ్యచే భాగింప యామానమగునని తెలియుచున్నది. కావున

కామానము గుణకము యామానములబ్ధి ఇట్లు బీజగణితమందనేకవర్ణసమీకరణములోనిదగుటచే కుట్టకము చేయవలయును. అందు ఇచట భాజ్యగుణకభాజకములు మాత్రమేగలవు క్షేపము (కలుపదగినదిగాని తీసివేయదగినదిగాని)లేదు కావున "క్షేపాభావోథవా యత్ర క్షేపశ్శుద్ధ్యేద్ధరోద్ధృతః।జ్ఞేయ శ్శూన్యం గుణస్తత్ర" అనుసూత్రముచే క్షేపము శూన్యమగుటచే గుణకము శూన్యము. ఆకారణముచే లబ్ధము శూన్యము. కాని "ఇష్టాహతస్వస్వహారేణ యుక్తే తేవా భవేతాం బహుధా గుణాప్తీ" అనుసూత్రముచే కల్పితఇష్టాంకముచే హారభాజ్యములగుణించి అందుశూన్యమితములగు గుణకలబ్ధులను చేర్పగా నగుసంఖ్యలు క్రమముగ గుణకలబ్ధములగును.

కావున ఇ × హా + గు = (అ—యోవ) × ఇ + 0 = కా = గుణకము
ఇట్లు ఇ × భా + ల = (యోవ — క) × ఇ + 0 = యా = లబ్ధము

ఇచట యోవ = సాధ్యవర్ణము అ = అధికవర్ణము క = అల్పవర్ణము యా = అధికవర్ణముగలసువర్ణము కా = అల్పవర్ణముగలసువర్ణము అని సంజ్ఞ చేయబడెను ఇందు సాధ్యవర్ణమువలన అల్పవర్ణమును తీసివేసి ఇష్టసంఖ్యచే గుణింప అధికవర్ణసువర్ణమున్ను అధికవర్ణమువలన సాధ్యవర్ణమును తీసివేసి ఇష్టాంకముచేగుణింప అల్పవర్ణసువర్ణమున్ను అగునని స్పష్టమగుచున్నది.

విశేషము – పైయుదాహరణమునందు రెండువర్ణములగూర్చి ప్రశ్నముగలదు రెండిటికంటె వర్ణములధికములగునపుడును రెండిటికిరెండిటికి సాధించి పరిమాణముల నెరుంగవలయును అందుఒకదానికి రెండుమూడువిధముల పరిమాణము వచ్చుచో ఆపరిమాణముల యోగము దానిపరిమాణమగును ఏదియైన ఋణపరిమాణమగుచో ధనపరిమాణములయోగములో ఋణపరిమాణమునుతీసివేసిన ఆఅంతరమే దానిపరిమాణమగును పైఉపపత్తిప్రకారము అధికవర్ణములున్నపుడు చేయగా—

వర్ణములు అ | క | గ / పరిమాణములు, యా | కా | నీ పైప్రకారము

$$\text{యోవ} = \frac{\text{యా}.\text{అ} + \text{కా}.\text{క} + \text{నీ}.\text{గ}}{\text{యా} + \text{కా} + \text{నీ}}$$

∴ యోవ. యా + యోవ. కా + యోవ. నీ = యా అ + కా. క + నీ. గ

సమశోధనముచేయగా

$$\text{యోవ},\text{యా}-\text{యా}.\ \text{అ}=\text{కాక}+\text{నీ},\text{గ}-\text{యోవ},\text{కా}-\text{యోవ},\ \text{నీ లేక}$$

$$\text{యా}(\text{యోవ}-\text{అ})=\text{కా}(\text{క}-\text{యోవ})+\text{నీ}(\text{గ}-\text{యోవ})$$

$$\therefore \text{యా}=\frac{\text{కా}(\text{క}-\text{యోవ})+\text{నీ}(\text{గ}-\text{యోవ})}{\text{యోవ}-\text{అ}}$$

$$\text{పైసమీకరణమునుబట్టియే కా}=\frac{\text{యా}(\text{యోవ}-\text{అ})-\text{నీ}(\text{గ}-\text{యోవ})}{\text{క}-\text{యోవ}}$$

$$\text{ఇట్లు}\quad \text{నీ}=\frac{\text{యా}(\text{యోవ}-\text{అ})-\text{నీ}(\text{క}-\text{యోవ})}{\text{ర}-\text{యోవ}}$$

దీనిచే రెండురెండువర్ణములకు సాధింపవలయుననియు ఒకటిమిశ్రితము అగు మానమగుచున్నదనియు స్పష్టము. కావుననే అల్పాధికవర్ణములగ్రహించుటలో ఒకకానిపరిమాణము రెండుమూడువిధములుగవచ్చుటయు సంభవమగుచున్నది.

ఇందులకు మ. మ. పం. సుధాకరద్వివేదిగారి సూత్రోదాహరణములు.

శ్లో॥ సువర్ణవర్ణా బహవో యదాస్స్యుర్ద్వయోర్ద్వయో స్తత్రి మితీప్రసాధ్యా।
శ్రీభాస్కరోక్త్యాథ మితిప్రయోగాన్స్వర్ణమానాని భవన్తి తాని।
స్వర్ణప్రమాణానివిలోమశుద్ధ్యా యద్యత్రతత్ర్వాంతరశ్చాతాని।
మానాని సాధ్యాని యథాధనాని తథావిచార్యం బహుధాస్వబుద్ధ్యా॥

దీనితాత్పర్యముపైనవ్రాయబడినది.

(1) ఉదాహరణము

అష్టాదశాష్టీశనవమాప్రణా వర్ణాహి యేషాం యుతితశ్చ తేషాం।
అగ్నీందువర్ణం యదిజాతరూపం స్యాత్స్వర్ణమానాని తదావదాశు॥

18, 16, 11, 9 వర్ణములుగల బంగారముల కరగింప 13 వన్నెగల బంగారమైనయెడల నాబంగారపుపరిమాణము లెంతెంతయుండుమ? ఇందు 18, 11 ఈ రెండిటిని ముందుగ్రహించి సాధ్యవర్ణము 13 గావున దానిచే 18—13 = 5 అట్లు 13—11 = 2 ఈసంఖ్యలను ఇష్టాంకము 1 టిచే గుణింప 18 వర్ణముగల బంగారము 2 మాషములు 11 వన్నెగలది 5 మాషములు ఇట్లు 16, 9 వీటిచేచేయగా 16—13 = 3 అట్లు 13 — 9 = 4 కావున 16 వన్నెగలది 4 మాషములు 9 వన్నెగలది 3 మాషములు అనిచెప్పదగియున్నది.

(2) ఉదాహరణము

కేయూర కర్ణాభర ణాంగుళీయ కంకణాన్నైజై స్త్రిహరిణా వరాంగమే।
వేణీకృ తేశాంకనగేంద్రవర్ణకై ర్యానాని తేషాం రవివర్ణజేన వై॥

కేయూరవర్ణము 11 కర్ణాభరణవర్ణము 9 అంగుళీయకవర్ణము 7 కంకణవర్ణము 14 ఈఆభరణముల కరిగింపనగు బంగారముయొక్కవర్ణము 12 ఆఅలంకారములపరిమాణములెంత? ఇందు పైప్రకారము 1 ఇష్టాంకముగకల్పించిచేయగా 14, 11 వర్ణములుగలసువర్ణముల పరిమాణము 1, 2 ఇట్లు 14, 9 వర్ణసువర్ణముల పరిమితి 3, 2 ఇట్లు 14, 7 వర్ణసువర్ణములపరిమితి 5, 2 ఇట్లుచేయుటచే 14 వర్ణముగల బంగారమునకు 1, 3, 5 పరిమాణములు వేరుగవచ్చినవి వీటియోగము 9 కావున 11, 9, 7, 14 వీటివర్ణముల పరిమాణములు క్రమముగ 2, 2, 2, 9 అగుచున్నవి. ఇట్లుధనపరిమాణములగునట్లు ఆలోచించిచేయవలయును.

ఈప్రశ్నములందు (130 ప్ర) ప్రకారము యోగజవర్ణముపచ్చునట్లు పరిమాణములనెరుంగుట యగుచున్నది గాని నియతపరిమాణము రానేరదు. ఇష్టమునుబట్టియు అల్పాధికవర్ణగ్రహణమునుబట్టియు పరిమాణములు భేదించును.

వ్యక్తిభేదగణితము

అథఛందశ్చిత్యాదాకరణసూత్రింశ్లోకత్రియం

ఏకాద్యేకోత్తరా అంకా వ్యస్తా భాజ్యాః క్రమస్థితైః।
పరః పూర్వేణ సంగుణ్యా స్తత్పర స్తేన తేనచ॥ ౨౮॥
ఏకద్విత్ర్యాదిభేదా స్స్యు రిదం సాధారణం స్మృతం।
ఛందశ్చిత్యుత్తరే ఛంద స్యుపయోగోస్య తద్విదాం॥ ౨౯॥
మూషా(ఖా)వహానభేదాదౌ ఖండమేరౌచ శిల్పకే।
వైద్యకే రసభేదీయే త న్నోక్తం విస్తృతే ర్భయాత్॥ ౩౦॥

టీ॥ క్రమస్థితైః (ఏకాద్యేకోత్తరాంకైః) =క్రమముగానున్న ఒకటిమొదలగుఏకోత్తరములగునంకెలచే, వ్యస్తాః ఏకాద్యేకోత్తరాః అంకాః భాజ్యాః=తలక్రిందుగవ్రాయబడిన ఒకటిమొదలగునేకోత్తరములగునంకెలు భాగింపదగినవి పూర్వేణపరఃసంగుణ్యాః = మొదటిసంఖ్యచే దానికితరువాతనుండుసంఖ్య గుణింప

దిగినది. తేనతత్పరస్సంగుణ్యః=ఆగుణింపగానగుసంఖ్యచే దానికిపరమందలిసంఖ్య గుణింపదగినది తేనచ=ఇట్లుఆయాగుణింపగానగుసంఖ్యచే దానికిపరమందలిసంఖ్య గుణింపదగినది. ఏకద్విత్ర్యాదిభేదాస్స్యుః=(మొదటిసంఖ్యయుక్రమముగానైనగుణనఫలములున్ను) ఒకటిరెండుమూడు మొదలగువ్యక్తులచేనగు భేదములు అగుచున్నవి. ఇదంసాధారణంస్మృతం=ఇదిసాధారణముగ చెప్పబడినది. అస్య ఛందశ్చిత్యుత్తరే ఛందసి తద్విదాముపయోగః = ఈగణితమునకు ఛందఃప్రస్తారప్రశ్నోత్తరమువిషయమై ఛందశ్శాస్త్రమునందు ఆశాస్త్రవేత్తల కుపయోగము. శిల్పకే = శిల్పశాస్త్రమునందు * ఖండమేరౌచ = ఖండమేరువు అనుగణితమునందును మూషా (ఖా) వహనభేదాదౌ = (మూషము లేక మూఖముఅనగా గవాక్షమని వ్యాఖ్యానములందుగలదు) గవాక్షములచేతను మేడలయొక్క అంతరముల చేతనునగు భేదములు మొదలగువాట్లవిషయమునను లేక గవాక్షములయొక్క తెరచుటచేతనగుభేదములు మొదలగువాట్లయందును వైద్యకేరసభేదేయేచ=వైద్యశాస్త్రమునందు ఆయారసభేదములను సంబంధించినగణితమునందును (అస్యఉపయోగః=ఈసూత్రమునకుపయోగము)తత్ విస్తృతేర్భయాన్నోక్తం=ఆవిషయము గ్రంథవిస్తరమగుననుభయమువలన (సాకల్యముగ) చెప్పబడలేదు.

134. ప్ర. (1) ఛందశ్శాస్త్రమునందు 26 ఛందస్సులలో క్రమముననుసరించి ఏఛందమువెన్నవదియో ఆఛందమువలన ఆసంఖ్యనుబట్టి వృత్తభేదములుత్పన్నమైనట్లు ప్రస్తారముచే చెప్పబడినది. అట్టివ్యక్తిభేదసంఖ్యను ప్రస్తరించకయే చెప్పుటకు గణితపద్ధతి:—

---

* ఛందశ్శాస్త్రమునందు ఏకద్విత్ర్యాదిగురులఘువులుగల వృత్తవ్యక్తిభేదసంఖ్యనెరుంగుటకై మేరుప్రస్తారము చెప్పబడినది. సంఖ్యాఖండములచే మేరువువలెనుండునది గాన మేరుసంజ్ఞయగుచున్నది.

† ఆవహనము=మేడలయొక్క పైపైఅంతరములుఅని దుర్గాప్రసాదవ్యాఖ్యానము కాని మూఖ=గవాక్షములయొక్క ఆవహన=తెరచుట అనునర్థము గ్రంథకర్తృసమ్మతమనుట ఉదాహరణమునందలి "మూఖావహనభేదాః"అనుపదముచే తోచుచున్నది.

(2) ఏఛందస్సు ఎన్నవదియో ఆసంఖ్యపదము. పదసంఖ్య మొదలు క్రమముగ తలక్రిందుగ ఒకటివరకు అంకెలనువ్రాసి, వాటిని క్రమముగ ఒకటి మొదలు క్రమముగ పదమువరకు వ్రాయబడిన యంకెలచే భాగింపుము.

(3) అట్లుభాగింపనగు సంఖ్యలలో మొదటిది, పదమును 1 టిచే భాగింపనగుసంఖ్య రెండవది ఏకోనపదమును రెండుచే భాగింపనగునది. ఇట్లు క్రమముగనున్న సంఖ్యలలో మొదటిదానిచే రెండవదానిని గుణింపుము. ఈగుణనఫలముచే మూడవదానిని గుణింపుము. ఇట్లు వెనుకటిగుణనఫలముచే, గుణింపబడిన సంఖ్యకు ముందున్న సంఖ్యను గుణించుము.

(4) మొదటిసంఖ్యయు (భాగింపబడినసంఖ్యలలో మొదటిది) అటనుండి ఆయాగుణనఫలసంఖ్యలును క్రమముగ ఏకద్విత్ర్యాదివ్యక్తిభేదములుఅగును. అనగా మొదటిసంఖ్య ఏకగురువ్యక్తిసంఖ్య. రెండవది ద్విగురువ్యక్తిసంఖ్య. మూడవది త్రిగురువ్యక్తిసంఖ్య. ఇట్లుక్రమముగనగును.

(5) ఇదిసాధారణపద్ధతి. అనగా దీనివలన గురులఘుప్రస్తారముచేనైన సమవృత్తసంఖ్యయే తెలియుచున్నది. మాత్రాప్రస్తారాదివిశేషములు ఛందశ్శాస్త్రమున చాలచెప్పబడినవి.

(6) ఇందు పాదాక్షరపరిమితసంఖ్య అవధియగుటచే నదియ పదముగ గ్రహింపబడెను. ఇట్లు ఆయావ్యక్తిభేదములను తెలియవలసినచో అందలిఅవధిసంఖ్యను పదముగ గ్రహించి పైప్రకారము గణితముచేయవలయును. ఈగణితము శిల్పశాస్త్రమునందు ఇట్లుసంఖ్యాఖండములచే గణితముచేయవలసినపు డుపయోగించును. ఒకగృహమునకు కొన్నిగవాక్షములు గలవనుకొందము. వాటిలో ఒక్కొకదానిని తెరచినచో నెన్ని భేదములగును? రెండిటిని రెండిటిని తెరచినచో నెన్ని భేదములగును? మూటినిమూటిని తెరచినచో ఎన్ని భేదములగును ? ఇట్టిభేదపరిజ్ఞానమునం దుపయోగించును. ఇట్లు వాస్తుశాస్త్రమునందు చతుశ్శాలాదిగృహభేదములలో ఆయాశాలలందుద్వారస్థితిద్వారాభావములచే నగు రూపభేదములు తెలియును. వైద్యశాస్త్రమునందు షడ్రసములలో ఏకరసవస్తుభేదములు రసద్వయవస్తుభేదములు మొదలగునవి తెలియును. నలువైపులందు నిండ్లుండుట కొన్నికొన్నివైపులందుమాత్రమే యుండుట, ఇట్టిప్రకారములచేనగు గృహభేద

ములు తెలియును సంగీతశాస్త్రమునందును దీనియుపయోగముగలదు. ఇట్లు ఆయావ్యక్తిభేదముల నెరుంగవలసిన గణితములందెల్ల నుపయోగించును. ఇందు ఆయాపదార్థములనొకచో చేర్చుటచేనగు భేదములే గ్రహింపబడుచున్నవి. స్థాన వ్యత్యయము చేసనగు భేదములు గ్రహింపబడవు.

తత్రిఛందశ్చిత్యుత్తరే కించి దుదాహరణమ్.

ప్రస్తారే మిత్ర గాయత్ర్యాస్స్యుః పాదవ్యక్తయః కతి।
ఏకాదిగురవ శ్చాశు కతి క థ్యుచ్యతాం పృథక్॥ ౫౩॥

ఇహహి షడక్షరోగాయత్రిచరణోత్ర షడంతానా మేకాద్యేకోత్తరాంకానాం వ్యస్తానాం క్రమస్థానాంచ న్యాసః.

౬	౫	౪	౩	౨	౧
౧	౨	౩	౪	౫	౬

యథోక్తకరణేన లబ్ధా ఏకగురువ్యక్తయః ౬ ద్విగురవః ౧౫ త్రిగురవః ౨౦ చతుర్గురవః ౧౫ పంచగురవః ౬ షడ్గురుః ౧ అథైక స్సర్వలఘుః ౧ ఏవమాసామైక్యం పాదవ్యక్తిమితిః ౬౪. ఏవంచతుశ్చరణాక్షరసంఖ్యాకా నంకా న్యథోక్తం విన్యస్య ఏకద్విత్ర్యాదిగురు భేదానానీయ తేషామైక్యం సైకం కృత్వా జాతాగాయత్రివృత్తవ్యక్తిసంఖ్యా ౧౬౭౭౭౨౧౬ ఏవముక్తాద్యుత్కృతిపర్యంతం ఛందసాం వ్యక్తిమితిజ్ఞానం.

తా॥ మిత్రమా ! గాయత్రీఛందస్సును ప్రస్తరించుటయందు ఎన్నిపాద భేదములగును ? ఏకగురువులెన్ని ? ద్విగురువులెన్ని ? త్రిగురువులెన్ని ? ఇట్లు ఆయాభేదములెన్నెన్నియగును ? వేర్వేరుగ శీఘ్రముగ చెప్పుము.

వేదముకంటె భిన్నమగుభాషయందు గాయత్రీఛందము ఛందస్సులలో నారవది, కావున 6 ఇదిపదము ఇదిమొదలుతలక్రిందుగ 1 టి వరకునైనసంఖ్యలను 1 టి మొదలు పదము 6 వరకునైనసంఖ్యలచే భాగింపవలెను. అట్లు భాగింప $\frac{6}{1}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{6}$ ఇట్లుభాగింపనగుసంఖ్యలలో మొదటిసంఖ్య $\frac{6}{1}$ దీనికిపూర్వమందేసంఖ్యయులేకుండుటచే దీనికిగుణకములేదు, కాననిదియే ఏకగురువ్యక్తిసంఖ్య 6 దీనిచే ఏతదుత్తరసంఖ్య $\frac{5}{2}$ ను గుణింప. $\frac{6}{1} \times \frac{5}{2} = 15$ ద్విగురువ్యక్తిసంఖ్య.

ఇట్లు $\frac{15}{1} \times \frac{4}{3} = 5 \times 4 = 20$ త్రిగురువ్యక్తిసంఖ్య $\frac{20}{1} \times \frac{3}{4} = 15$ చతుర్గురువ్యక్తిసంఖ్య $\frac{15}{1} \times \frac{2}{5} = 6$ పంచగురువ్యక్తిసంఖ్య. $\frac{6}{1} \times \frac{1}{6} = 1$ షడ్గురువ్యక్తిసంఖ్య.

ఇట్లు గాయత్రీఛందఃప్రస్తారమునందలి పాదభేదములందొకొక్కదానియందు 6 అక్షరములుండును. అందు ఎన్నిగురువులగునో వాటికంటెతక్కినవి లఘువులు అగుచున్నవి. కావున ఏకద్విత్ర్యాదిగురువులవలననైనభేదములే పంచచతుస్త్ర్యాదిలఘువులవలననగు భేదములగుచున్నవి. అట్లు సర్వగురుభేదమొకటియైనట్లు సర్వలఘుభేదమొకటియగును కావున సర్వభేదసంఖ్య $= 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 + 1 = 64$ అగుచున్నది.

ఈప్రకారము గాయత్రీఛందమునందు పాదమునకు 6 అక్షరములు చొప్పున నాలుగుపాదములకు 24 అక్షరములు కావున 1టి మొదలు 24 వరకు క్రమముగనైన సంఖ్యలచే 24 నుండి 1టివరకు ఉత్క్రమముగవ్రాయబడిన యంకెలను భాగింపగానగు ఏకద్విత్ర్యాదిగురుభేదములను అన్నిటినికలిపి అందుసర్వలఘుభేదమగు 1టిని గలిపినచోనైన గాయత్రీవృత్తవ్యక్తిసంఖ్య 16777216 అగుచున్నది. ఇట్లు ఉక్తయనెడు మొదటిఛందము మొదలు ఉత్కృతియను 26 వ ఛందమువరకునైన వృత్తవ్యక్తుల నెరుంగవలయును. ఈప్రకారము వృత్తాక్షరమితాంకములచే నగు ఏకద్విత్ర్యాదిభేదము లీదిగువ క్రమముగ చూపబడుచున్నవి.

24, 276, 2024, 10626, 42504, 134596, 346104, 735471, 1307504 1961256, 2496144, 2704156, 2496144, 1961256, 1307504, 735471, 346104, 134596, 42504, 10626, 2024, 276, 24, 1 సర్వలఘువు 1 అన్నిటిని కలుపగా 16777216 అగుచున్నది.

ఉక్త మొదలు 26 ఛందస్సులపేర్లుగల శ్లోకములు వృత్తరత్నాకరమందు

ఉక్తా త్యుక్తా తథామధ్యా ప్రతిష్ఠా సుప్రతిష్ఠితా।
గాయ త్ర్యుష్ణి గనుష్టుప్చ బృహతీ పంక్తిరేవచ॥
త్రిష్టుప్చ జగతీచైవ తథాతిజగతీ మతా।
శక్వరీ సాతిపూర్వాస్యా ద ష్ట్యత్యష్టీ తత స్స్మృతే॥
ధృతి శ్చాతిధృతిశ్చైవ కృతిః ప్రకృతి రాకృతిః।
వికృతి స్సంకృతి శ్చైవ తథాతికృతి రుత్కృతిః॥

1 ఉక్త 2అత్యుక్త 3మధ్య 4ప్రతిష్ఠ 5సుప్రతిష్ఠ 6గాయత్రి 7 ఉష్ణిక్ 8అనుష్టుప్ 9బృహతి 10పంక్తి 11 త్రిష్టుప్ 12జగతి 13అతిజగతి 14శక్వరి 15అతిశక్వరి 16అష్టి 17అత్యష్టి 18ధృతి 19అతిధృతి 20కృతి 21ప్రకృతి 22ఆకృతి 23వికృతి 24సంకృతి 25అతికృతి 26ఉత్కృతి. ఈ 26 ను ఛందస్సులు.

ఏఛందమెన్నవదియో ఆఛందమువలనబుట్టినవృత్తములయొక్క పాదాక్షరములన్నియుండును. పాదాక్షరములసంఖ్యనుబట్టి ప్రస్తరించినచో సమవృత్తములగును 1, 3 పాదములొకవిధముగను 2, 4 పాదములొకవిధముగను ఉండునవి అర్ధసమవృత్తములు. వీటిసంఖ్య తెలియవలసినచో అర్ధవృత్త (పాదద్వయ)మునందలి అక్షరసంఖ్యనుబట్టి ప్రస్తరించి అందుసమవృత్తసంఖ్యను తీసివేయ అర్ధసమవృత్తసంఖ్యఅగును. సమవృత్తములు, అర్ధసమవృత్తములు, గానివి విషమవృత్తములు. వీటికై శ్లోకాక్షర (పాదచతుష్టయ) సంఖ్యనుబట్టి ప్రస్తరించి ఆసంఖ్యవలన సమవృత్త అర్ధసమవృత్తసంఖ్యల వ్యవకలింప విషమవృత్తసంఖ్యఅగును. ఇందువృత్తరత్నాకరమున నారాయణీయవ్యాఖ్యయందు

"అర్ధసమస్యప్రస్తారే అర్ధప్రస్తారఃకార్యః ...... ప్రస్తుతభేదకారీవికల్పః ప్రస్తారక్రియాయాతోపి వర్జనీయః" "విషమప్రస్తారే పాదచతుష్టయస్య ప్రస్తారః కార్యః...తత్రాపి సమార్ధసమరూపత్వేన ప్రస్తుతవిషమప్రస్తారభేదకారిత్వాత్ ...వర్జనీయాః" అనియున్నది. ఈలక్షణముగల అర్ధసమ విషమ వృత్తసంఖ్యలను తీసుకొనివచ్చుటకు శ్రేఢీవ్యవహారమున చెప్పియున్నారు (145 ప్ర. చూ)

ఉపపత్తి:— మొదటప్రస్తరించుక్రమము ఛందశ్శాస్త్రసంప్రదాయముచే వ్రాయబడుచున్నది.

ఽ ఇది గురుచిహ్నము | ఇది లఘుచిహ్నము. ఎన్నవఛందమో పాదమునందన్ని యక్షరములుండును. కావున అన్ని (పాదాక్షరమితములగు) గురువులను మొదట ఒకపాదముగ ఒకఅడ్డపంక్తియందు వ్రాయవలయును. పిమ్మట ఆపంక్తియందు ఎడమవైపునుండి మొదటిగురువునకు క్రిందుగ నొకలఘువు దానిక్రిందగురువు ఇట్లుగురులఘువులను వ్రాయవలయును. రెండవగురువునకు క్రిందుగగురువువ్రాసి దానిక్రింద నిలువుచాలుగ రెండుగురువులు రెండులఘువులు ఉండునట్లు వ్రాయవలయును మూడవగురువునుండి నిలువుచాలుగ 4 గురువులు 4 లఘువులు

ఉండునట్లు వ్రాయవలయును ఇట్లు పూర్వపునిలువుపంక్తికంటె రెండవనిలువుపంక్తియందు రెట్టింపై గురువులులఘువులుఒక్కొకచోనుండునట్లువ్రాయవలయును. ఇట్లుతుదకు అన్నిలఘువులు ఒకఅడ్డపంక్తియందుండునట్లు వ్రాయవలయును. ఇది ప్రస్తారక్రమము.

(1) ఆప్రకారము మధ్యయను 3వ ఛందమును ప్రస్తరింపగా

∪	∪	∪
|	∪	∪
∪	|	∪
|	|	∪
∪	∪	|
|	∪	|
∪	|	|
|	|	|

ఒక్కొకపంక్తి ఒక్కొకవృత్తభేదమైనది. అట్టివృత్తములలో ఏకగురువృత్తములు ఎన్నవఛందమో అన్నియనియు, రెండుగురువులుగలవృత్తములు ఏకోనపదసంఖ్యను పదముచేగుణించి రెండుచేభాగింపనగు సంఖ్యతో సమములనియు, మూడుగురువులుగలవృత్తములు 2చే తీసివేయబడిన పదసంఖ్యను 3చే భాగించి రెండవభేదసంఖ్యచే భాగింపనగు సంఖ్యతో సమమనియు, ఇట్లుక్రమముగ ఆయాభేదములసంఖ్య యగుననియు తెలియుచున్నది.

మరియు నీప్రస్తారమునుచూడగా ఒకటవఛందమువలన 2 వృత్తములు రెండవఛందమువలన 4 వృత్తములు మూడవఛందమువలన 8 వృత్తములును అగుటచే రెండునకు, ఎన్నవఛందమో ఆసంఖ్యను ఘాతమాపకాంకముగాజేయ నగు ఘాతముతో సమమైన భేదములు ఆయాఛందములవలన నగుచున్నవియనియు తెలియుచున్నది. ఈవిషయము నిలువుపంక్తియందు ఒకదానికంటె మరియొకదానియందు పూర్వపూర్వద్విగుణముగ గురులఘువిన్యాసమువలన స్పష్టము.

(2) లేక అ, క, గ, చ మొదలగు 'యా' పరిమితవర్ణములు గలవనుకొనుము. అట్టివర్ణములలో ఒక్కొక్కవర్ణముచేనగు స్వరూపములు, రెండేసివర్ణములచేతను, మూడువర్ణములచేతను, ఇట్లు 'యా' పరిమితసంఖ్యవరకు నగువర్ణములచేతను, నగు స్వరూపభేదములను తెలిసికొనవలయుననుకొందము. ఇపుడు ఒక్కొకవర్ణముచేనగుభేదములు ఎన్నివర్ణములుగలవో అన్ని అగుచున్నవి. కావున ఆభేదములు=యా. పరిమితములగును.

ఇట్లు రెండువర్ణములుగలభేదములను విచారింపగా! అవర్ణమును తదితరవర్ణములతోకూర్ప (యా—1) పరిమితభేదములగును. అట్లు క వర్ణమును తదితరవర్ణ

ములతో గూర్పగానగు భేదములు (యా—1) అగుచున్నవి. ఇట్లు ప్రతివర్ణమున కును అగుచున్నవి గాన వర్ణపరిమితిసంఖ్యఅగు 'యా' దీనిచే (యా—1) దీనిని గుణింపవలయును. కాని 'అ' వర్ణముతో 'క' వర్ణమునుకూర్ప 'అక' అగును. ఇట్లు క వర్ణముతో 'అ' వర్ణమునుకూర్పగా కఅ యగుచున్నది. ఇట్లు పరస్పర సంబంధమువలన ప్రతిభేదమునందును రూపద్వయము గలుగుచున్నది. ఈకారణముచే ఇందు స్థానవ్యత్యయముచేనగు భేదములు గణింపబడవు కావున భేదసంఖ్య (యా—1)ను పూర్వభేదసంఖ్యయగు (యా)చే గుణించి 2చే భాగింపవలెను. అట్లుచేయగా వర్ణద్వయభేదసంఖ్య $= \dfrac{\text{యా}(\text{యా}-1)}{2}$ అగుచున్నది.

ఇట్లు అక ఈభేదమునందు ఇందలివర్ణద్వయముకంటె నితరములగు వర్ణముల నొక్కొకటిని చేర్పగానగుభేదములు వర్ణత్రయజనితభేదములు అకగ', అకచ మొదలగునవి. ఇట్టిభేదములు 'అక' దీనిచే (యా—2) పరిమితములగును. పూర్వమందైన వర్ణద్వయభేదము లొక్కొక్కదానిచేతను ఇన్నిభేదములు అగుచున్నవి కావున పూర్వభేదసంఖ్యచే గుణింపవలయును. కాని ఇందును 'అక' భేదముతో 'చ' ను కూర్చుటచే అకచ ఇట్లు 'అచ' తో 'క' ను కూర్చుటచే అచక అట్లు 'చక' తో 'అ'ను కూర్చుటచే చఅక ఈమూడు భేదములును ఒకేవిధమైనవగుటచే 3 చే భాగింపవలయును అట్లుచేయగా వర్ణత్రయభేదసంఖ్య $= \dfrac{\text{యా}(\text{యా}-1)}{2} \times \dfrac{(\text{యా}-2)}{3}$ అగుచున్నది.

ఇట్లువర్ణచతుష్టయభేదసంఖ్య $= \dfrac{\text{యా}(\text{యా}-1) \times (\text{యా}-2) \times (\text{యా}-3)}{2 \times 3 \times 4}$ అగును.

ఇట్లు వైపరీకారము చేయుచురాగా తుదకు సకల (యా) వర్ణభేదసంఖ్య=

$$= \frac{\text{యా}(\text{యా}-1) \times (\text{యా}-2) \times (\text{యా}-3) \ldots \{\text{యా}-(\text{యా}-1)\}}{2 \times 3 \times 4 \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{యా}}$$

ఇందు $\text{యా}-(\text{యా}-1)=1$ అనియు $\text{యా} = \dfrac{\text{యా}}{1}$ అనియు స్పష్టమగుటచే సూత్రపద్ధతిఅంతయు ఉపపన్నమగుచున్నది. అన్నిటియొక్కయుయోగము సర్వభేదయోగము గాగలదు. ఇందు అ, క ఇత్యాదివర్ణములను ప్రథమద్వితీయాది గురువులనుకొనుచో ఏకవర్ణభేదసంఖ్య ఏకగురువ్యక్తిసంఖ్య యగును. ఒకటిగురు

వగుచో ఆపాదమునందు తక్కినవిలఘువులనుట గ్రహింపదగినవిషయము ఇట్లా యాభేదములందు గ్రహింపదగియున్నది. అట్లుసర్వవర్ణాభావముచే నొకభేదమను నట్లు ఇందుసర్వగుర్వభావము సర్వలఘువ్యక్తియగుచున్నది గాన నిం దదియు గ్రహింపదగియున్నది.

ఇట్లువర్ణములను గురువులనుకొనినట్లు గవాక్షములు లేకరసములు ఇట్లుభేదముల గణింపదగిన పదార్థములుగ భావించుచో ఆపదార్థములను సంబంధించిన ప్రశ్నములన్నియు నీసూత్రమునకు విషయములగుననుట తెలియుచున్నది.

ఉదాహరణం శిల్పే

ఏకద్విత్ర్యాదిమూషా(ఖా)వహనమితి మహో బ్రూహి మే భూమిభర్తు
ర్హర్మ్యే రమ్యేష్టమూషే(ఖే)చతురవిరచితే శ్లక్ష్ణశాలావిశాలే।
ఏకద్విత్రాదియుక్త్యా మధురకటుకషాయామ్లకక్షారతిక్తై
రేకస్మిన్ షడ్భిరస్యైర్గణక కతివద వ్యంజనే వ్యక్తిభేదాః॥ ౫౪॥

న్యాసః							
౮	౭	౬	౫	౪	౩	౨	౧
౧	౨	౩	౪	౫	౬	౭	౮

లబ్ధా ఏకద్విత్ర్యాదిమూషావహనసంఖ్యాః ౮, ౨౮, ౫౬, ౭౦, ౫౬, ౨౮, ౮, ౧ ఏవమష్టమూషే (ఖే) రాజగృహేమూషా(ఖా) వహనభేదాః ౨౫౫

అథద్వితీయోదాహరణేన్యాసః॥ $\dfrac{౬}{౧}, \dfrac{౫}{౨}, \dfrac{౪}{౩}, \dfrac{౩}{౪}, \dfrac{౨}{౫}, \dfrac{౧}{౬}$

లబ్ధావ్యంజనసంఖ్యా ఏకాదిరసయోగేన ౬, ౧౫, ౨౦, ౧౫, ౬, ౧
సర్వభేదాః ౬౩

ఇతిమిశ్రవ్యవహారః

తా॥ గణకుడా! నేర్పరులగుశిల్పులచే నిర్మింపబడినదియును సుందరములగు శాలాప్రదేశములచే విశాలమైనదియు రమ్యమైనదియునగు 8 గవాక్షములు గల రాజగృహమునందు 1, 2, 3 మొదలగు ఆయాగవాక్షములను తెరచుటచేనగు భేదములసంఖ్యను చెప్పుము.

ఒకవ్యంజనము (భోజనపదార్థములలోనిది) నందు 1 తీపి 2కారము 3వగరు 4పులుసు 5ఉప్పు 6చేదు ఈరసములలో 1, 2, 3 మొదలగు ఆయారసములయొక్క సంబంధముచే నెన్ని భేదములగును? చెప్పుము.

మొదటిప్రశ్నమునందు సూత్రానుసారము $\frac{8}{1}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{1}{8}$పూర్వగుణనఫలముచే నుత్తరోత్తరసంఖ్యను గుణింపుచురాగా క్రమముగానైన ఏకద్విత్ర్యాదిభేదములు 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1 వీటియోగము 255 భేదములు.

ఛందః ప్రస్తారోదాహరణమునందు సర్వగుర్వభావము సర్వలఘుభేదమగుటచే 1టి అదనముగ గ్రహింపబడెను. అట్లు సర్వగవాక్షములను మూయుటచే నగుభేదమున్ను, సర్వరసాభావముచేనగు భేదమున్ను గ్రహింపబడలేదు. గవాక్షములను తెరచుటచేనగు భేదములనుగూర్చియే ప్రశ్నింపబడెను. మూయుటచేనగు భేదముప్రశ్నింపబడలేదు. రసప్రశ్నమునకును గాయత్రీప్రస్తారప్రశ్నమునకును ఇదియే భేదము కావున అగణితము చూపబడలేదు. ఈప్రశ్నమునకు వైద్యశాస్త్రమునందు సూత్రస్థానమున ఉపయోగముగలదు.

ఇది మిశ్రవ్యవహారము. 13 వ ప్రకరణము.

---

14 ప్రకరణము.

శ్రేఢీవ్యవహారము.

135. ప్ర. (1) ఈప్రకరణమునందు చెప్పబోవుప్రకారములయుపపత్తినిగూర్చి ఉపయోగించునవియగుటచే మ. మ. పం. బాపుదేవశాస్త్రిగారి శ్లోకములు మొదటవివరింపబడుచున్నవి.

శ్రేఢ్యాః ప్రత్యేకరాశీనాం తత్తదుత్తరరాశితః।
శోధనే యాభవే దన్యశ్రేఢీ సాద్యపరంపరా॥
పునస్తస్యా ద్వితీయాద్యా అపి సాధ్యాః పరంపరాః।
తత శ్రేఢీపదా దేకద్వ్యాదిభేదా న్ప్రసాధ్య తే॥
శ్రేఢ్యాః పరంపరాణాం చ క్రమే ణాద్యై స్సమాహతాః।
కార్యా స్తేషాం చ సంయోగ శ్శ్రేఢ్యా స్సర్వధనం భవేత్॥

తా॥ (1) ఒకసంఖ్య మొదలు మరియొకసంఖ్యవరకు నైసంఖ్యలు వాటి సంకలితములు, వర్గములు, ఘనములు, ఆసంఖ్యలలోని విషమాంకములు, సమాంక

ములు క్రమముగ వృద్ధినొందినసంఖ్యలు, ఇట్లు ఏదోఒకక్రమము ననుసరించిన సంఖ్యాశ్రేణి, శ్రేఢియని చెప్పబడుచున్నది.

2) అట్లు క్రమముగా నివ్వబడిన శ్రేఢీరాసులలో ప్రత్యేకముగ నాయా రాశిని దానికిముందున్నరాశివలన తీసివేయుము. అట్టి అంతరముల శ్రేణి ఒక పరంపర.

(3) ఆపరంపరయందును ప్రథమాంతరమును ద్వితీయాంతరమువలన, ద్వితీయాంతరమును తృతీయాంతరమువలన ఇట్లు ఒక్కొకదానిని దానికిముందున్న దానివలన తీసివేయుము. ఈఅంతరముల శ్రేఢి రెండవపరంపర.

(4) ఇట్లు రెండవపరంపరవలన ఒక్కొకరాశిని తత్తదగ్రిమరాశివలన తీసివేయుచు మూడవపరంపరను, మూడవదానివలన నాలవపరంపరను, ఇట్లుఒకపరంపరవలన మరియొకపరంపరను, తుదిపరంపరయందు ఒక్కరాశియగువరకును గనుగొనుము.

(5) పిమ్మట శ్రేఢిగా మొదటనివ్వబడినసంఖ్య లెన్నిగలవో వాటిసంఖ్యను పదముగా భావించి "ఏకాద్యేకోత్తరా అంకా" ఇత్యాది సూత్రము (134 ప్ర) చే ఏకద్విత్ర్యాదిభేదములను సాధించి ఈభేదములను క్రమముగ శ్రేఢియొక్కయు దానివలననైనపరంపరలయొక్కయు ఆద్యరాసులచే గుణింపుము.

(6) ఈగుణనఫలముల యోగమున్ను శ్రేఢీసర్వధనమగును.

(1) ఉదా:—కల్పనచే యా, కా, నీ, పీ శ్రేఢీరాసులు,

పైపద్ధతిప్రకారము—యా + కా, —కా + నీ, —నీ + పీ ప్రథమపరంపర
ఇట్లు +యా—2కా + నీ, +కా—2నీ + పీ రెండవపరంపర
ఇట్లు —యా+3కా—3నీ+పీ మూడవపరంపర

పైశ్రేఢీపరంపరలయొక్క ఆద్యరాసులు (1) యా (2) —యా + కా (3) +యా—2కా + నీ (4)—యా+3కా—3. నీ+పీ వీటిని శ్రేఢీరాశిసంఖ్య 4 వలననైన ఏకద్విత్ర్యాదిభేదసంఖ్యచే గుణింపవలయును. కావున ఏకద్విత్ర్యాదిభేదములు 4, 6, 4, 1 వీటిచే శ్రేఢీపరంపరల ఆదులను గుణించి కలుపగా శ్రేఢీసర్వధనమగును.

4యా + 6(కా — యా) + 4 (యా — 2కా + నీ) + (— యా + 3కా — 3నీ + పీ)
= సర్వ

(2) ఉదా: ఈవిషయము స్పష్టప్రతిపత్తికై అంకెలచే చూపబడుచున్నది.

1^2, 2^2 3^2 4^2 5^2 ఇది శ్రేఢి యనుకొనుము.

శ్రేఢీరాసులు	1, 4, 9, 16, 25
ప్రథమపరంపర	3, 5, 7, 9
ద్వితీయపరంపర	2, 2, 2
తృతీయపరంపర	0, 0
చతుర్థపరంపర	0

కావున శ్రేఢీపరంపరలయొక్క ఆద్యరాసులు 1, 3, 2, 0, 0 వీటిని శ్రేఢీరాసులసంఖ్య 5 వలననైనఏకద్విత్ర్యాదిభేదసంఖ్యలచే గుణింపవలయును. $\frac{5}{1}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{5}$ వీటివలన ఏకద్విత్ర్యాదిభేదములు 5, 10, 10, 5, 1 వీటిచే శ్రేఢీపరంపరాదులను క్రమముగ గుణించి కలుపగా $(5 \times 1)+(10 \times 3)+(10 \times 2)+(5 \times 0)+(1 \times 0)=5+30+20+0+0=55$ అగుచున్నది.

అట్లు శ్రేఢీరాసులనుకలుపగా $1+4+9+16+25=55$ అగుచున్నది.

ఈపద్ధతికి యుక్తి: యా, కా, నీ, పీ శ్రేఢీరాసులు.

పై (1) ఉదాహరణమునందు చూపబడినప్రకారము శ్రేఢీపరంపరలయొక్క ఆద్యరాసులు (1) యా (2) — యా + కా (3) + యా — 2 కా + నీ (4) — యా + 3కా — 3నీ + పీ ఇపుడు (1) యా (2) ప్ర = — యా + కా (3) ద్వి = + యా — 2కా + నీ (4) తృ = — యా + 3కా — 3 నీ + పీ

ఈసమీకరణములచే వీటింబట్టి 'కా' ది వర్ణమానములు.

(1) యా

(2) కా = ప్ర + యా

(3) నీ = ద్వి + 2 ప్ర + యా

(4) పీ = తృ + 3ద్వి + 3ప్ర + యా

సర్వయోగము = 4 యా + 6 ప్ర + 4 ద్వి + 1 తృ = యా + కా + నీ + పీ అగుచున్నది.

ఇందు శ్రేఢియొక్కయు పరంపరలయొక్కయు ఆద్యరాసులు శ్రేఢీరాశిసంఖ్యవలననైన ఏకద్విత్ర్యాదిభేదసంఖ్యలచే గుణింపబడి కలుపబడినచో శ్రేఢీరాశియోగము అనగా సర్వధనము అగునని స్పష్టముగ కనుపించుచున్నది.

(2) దానింబట్టి శ్రేఢీఅంత్యధనానయనమునకు మ.మ. పం.బాపుదేవశాస్త్రి గారిశ్లోకము.

ఆద్యాం పరంపరాం శ్రేఢీం మత్వా స్యేకపదం పదం।
ఫలం సాధ్యం తదాస్యాద్యం శ్రేఢ్యా అంత్యధనం భవేత్॥

పైప్రకారము సాధింపబడిన పరంపరలలో మొదటిపరంపరను శ్రేఢిగా భావించి శ్రేఢీపదమువలన 1 టిని తీసివేయనగుసంఖ్యను పదముగ భావించి సాధింపబడినఫలమునందు శ్రేఢీరాసులలో మొదటిరాశిని కలిపినచో శ్రేఢీరాసులందలిఅంత్యధనము అగును.

ఈవిషయము పైసమీకరణవిమర్శనముచే బయలుపెడలుచున్నది.

ఎట్లనగా యా, కా, నీ, పీ ఇవిశ్రేఢీరాసులుగ భావింపబడినవి. అట్లు సమీకరణాదికము చేయగా 'పీ' ప్రమాణము. = తృ + 3 ద్వి + 3ప్ర + యా అగుచున్నది. ఉదాహరణముగ గ్రహింపబడిన శ్రేఢీరాసులలో 'పీ' వర్ణము అంత్యధనమైయున్నది. దీనిప్రమాణమును తెలియుచేయు ప్ర, ద్వి, తృ, పరంపరాదులకు శ్రేఢీపదమగు 4లో 1టినితీసివేయనగు 3వలననైన ఏకద్వ్యాదిభేదసంఖ్యలు గుణకములగుచున్నవి. ఇందు శ్రేఢీరాసులకు ముఖమగు 'యా' వర్ణము కలుపబడినది. ఇట్లీసూత్రము పపన్నమగుచున్నది.

ఉదా:— పైన (2) ఉదాహరణమునందు చూపినవర్గశ్రేఢివలననైన ప్రథమపరంపర 3,5,7,9 దీనివలననైనపరంపరల ఆద్యరాసులు.

3,2,0,0 వీటిని శ్రేఢీపదము 5 లో 1టినితీసివేయగానగు 4 యొక్క ఏకద్వ్యాదిభేదములచేగుణింప $(3 \times 4)+(2 \times 6)+(0 \times 4)+(0 \times 1)=24$ ఇందు శ్రేఢీముఖమగు 1 టిని కలుప $24+1=25$ ఇది శ్రేఢిలోని తుదిసంఖ్య.

అథశ్రేఢీవ్యవహారస్తత్రసంకలితైక్యకరణసూత్రంవృత్తం

సైకపదఘ్నపదార్ధమథైకాద్యంకయుతిః కిల సంకలితాఖ్యా।
సాద్వియుతేనపదేనవినిఘ్నీ స్యాత్త్రిహృతాఖలు సంకలితైక్యం॥౫౭॥

టీ॥ అథ = పిమ్మట, సైకపదఘ్నపదార్ధం = ఒకటితోఁగూడినపదముచే గుణింపబడినపదముయొక్క సగము, సంకలితాఖ్యా = సంకలితమను పేరుగల, ఏకాద్యంకయుతిః కిల = ఒకటిమొదలుగాగల అభీష్టసంఖ్యవరకునైన అంకముల యోగముగదా !

పా = ఆసంకలితమను పేరుగల ఏకాద్యంకయుతి, ద్వియుతేనపదేన వినిఘ్నీ = 2 చే కలుపబడినపదముచే గుణింపబడినదై, త్రిహృతా = 3 చే భాగింపబడినదై, సంకలితైక్యం స్యాత్ఖలు = సంకలితములయోగమగునుగదా !

ఏకాద్యంకముల సంకలితమును తెలియుపద్ధతి.

136. ప్రి. (1) ఒకటిమొదల్కొని ఉద్దేశింపబడినసంఖ్యలలో తుది యంకె పదము. పదమునందు 1 టిని కలుపుము. ఆసంఖ్యచే పదమును గుణింపుము. దీనిని 2 చే భాగింపుము. అట్లుగుణించి భాగింపగా నగు లబ్ధము ఒకటి. మొదలు అభీష్టసంఖ్యవరకునైన అంకముల యోగమగును. ఈయోగమునకు సంకలితమని పేరు.

సంకలితముల యోగమును తెలియుపద్ధతి.

(2) ఆసంకలితమును 2తో కలుపబడినపదముచే గుణించి 3 చే భాగింప సంకలితములయోగమగును. అనగా ఒకటిమొదలు అభీష్టసంఖ్యవరకునైన సంకలితముల యోగమగును.

ఉదాహరణం

ఏకాదీనాం నవాంతానాం పృథక్సంకలితాని మే।
తేషాం సంకలితైక్యాని ప్రిచక్ష్వ గణక ద్రుతమ్॥ ౫౫॥

న్యాసః ౧, ౨, ౩, ౪, ౫, ౬, ౭, ౮, ౯ లబ్ధాన్యేతాని సంకలితాని ౧, ౩, ౬, ౧౦, ౧౫, ౨౧, ౨౮, ౩౬, ౪౫ ఏషామైక్యాని ౧, ౪, ౧౦, ౨౦, ౩౫, ౫౬, ౮౪, ౧౨౦, ౧౬౫.

తా॥ ఒకటిమొదలు 9వరకునైనసంఖ్యలకు వేర్వేరసంకలితములను చెప్పుము. గణకుడా! ఆఒకటిమొదలు 9 వరకునైనసంఖ్యలయొక్క సంకలితముల యోగముల నున్నశీఘ్రముగ చెప్పుము.

ఉదా:— 1టిమొదలు 9 వరకును సంకలితములు ? వాటియోగములు ? ఇందు తుదిసంఖ్య 9 కావున నిదియే పదము. సూత్రప్రకారము

$$\frac{\text{ప} \times (\text{ప}+1)}{2} = \frac{9 \times (9+1)}{2} = \frac{9 \times 10}{2} = 45$$ ఇది సంకలితము.

అనగా $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$ అగుచున్నది.

ఇట్లుపదసంఖ్య 2 అగుచో సంకలితము 3 అగును. పదము 3అగుచో సంకలితము 6 అగును. పదము 4 అగుచో సంకలితము 10 అగును. అట్లు ఒకటిమొదలు 9వరకునైనసంఖ్యలు పదములగుచో నైన ఆయాసంకలితములు క్రమముగా చూపబడినవి.

అంకములు 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

వీటిసంకలితములు 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45 వీటియోగము నెరుంగవలసినచో $$\frac{\text{సం} \times (\text{ప}+2)}{3} = \frac{45 \times (9+2)}{3} = \frac{45 \times 11}{3} = 165$$ =సం. యో యో ఇది 9 వరకునైన అంకెల సంకలితముల యోగ మగుచున్నది.

ఇట్లు 5 వరకునైన అంకెలసంకలితముల నెరుంగవలసినచో 5 వరకునైన అంకెల సంకలితము 15 దీనిని పదము 5 నందు 2 ను కలుపగానగుసంఖ్య 7 చే గుణించి 3 చే భాగింపవలయును. $$\frac{15 \times (5+2)}{3} = \frac{15 \times 7}{3} = 5 \times 7 = 35$$ సంకలితయోగము.

ఇట్లు 9 వరకునైన సంకలితములయోగములు 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84 120, 165.

ఈపద్ధతి- ఒకసమభుజ త్రిభుజప్రదేశమునందు తుల్యవ్యాసముగల గోలములపరచి క్రమముగ పేర్చిననగు గోలరాశిసంఖ్యను తెలియుటకుపయోగించును అందు శిఖరమున 1 గోలము. దానికిక్రింద 2వ వరసలో 3 గోలములు 3వ వరసలో 6 గోలములు. ఇట్లు ఆయావరసలలోని గోలములు, పైవరసలోనిఒక్కొక గోలము క్రిందివరసలోని 3 గోలముల నాశ్రయించియుండును. కావున సంకలిత

రాశిసమములగుచున్నవి కావున 1టి మొదలు పదసంఖ్యవరకునగు సంకలితైక్యము రాశియగును.

(1) ఉపపత్తి—ఒకటిమొదలు అభీష్టపదమువరకునైన సంఖ్యలకు సంకలితములు వలసినచో ఆసంఖ్యలవలన (135 ప్రి) ప్రకారము పరంపరలయొక్క ఆద్యరాసులు.

1, 1, 0. 0 ఇత్యా. ఇందు ఆద్యరాసులలో అంకములు రెండుమాత్రమే అగుచున్నవి. తక్కినవి శూన్యమితములగుటచే వాటిని ఏసంఖ్యచే గుణించినను శూన్యమేయగును కావున పరంపగల ఆద్యరాసులకు గుణకములు ఏకద్వ్యాదిభేదములసంఖ్యలలో మొదటిరెండుసంఖ్యలే గ్రహింపదగియున్నవి. 134 ప్రి. చే ఏకద్వ్యాదిభేదానయనము.

$$\frac{ప}{1},\quad \frac{ప-1}{2},\quad \frac{ప-2}{3}\ \text{ఇత్యా}$$

ఇందు పూర్వగుణనఫలముచే నుత్తరోత్తరసంఖ్యను గుణింప $\frac{ప}{1}$, $\frac{ప\times(ప-1)}{2}$ ఇత్యా. వీటిచే పరంపరలఆద్యరాసులను 1, 1 గుణించి కలుపగాసంకలితమగును.

$$\left(\frac{ప}{1}\times 1\right)+\left(\frac{ప\times(ప-1)}{2}\times 1\right)=\frac{ప}{1}+\frac{ప\times(ప-1)}{2}$$

$$=\frac{2ప+ప^2-ప}{2}=\frac{ప^2+ప}{2}=\frac{ప(ప+1)}{2}$$

ఈతుదిస్వరూపమునందు సంకలితానయనపద్ధతి స్పష్టముగ గాన్పించుచున్నది.

(2) సంకలితయోగానయనోపపత్తి

సంకలితములు 1, 3, 6, 10, 15 ఇత్యా. వీటివలన పరంపరలు

ప్రథమపరంపర 2, 3, 4, 5

ద్వితీయపరంపర 1, 1, 1

తృతీయపరంపర 0, 0

∴ పరంపరల ఆద్యరాసులు 1, 2, 1, 0 ఇత్యా. "ఏకాద్యేకోత్తరా అంకాః" ఇత్యాదిసూత్రము (134 ప్రి) చే ఏకద్వ్యాదిభేదములు.

$$\frac{ప}{1},\quad \frac{ప\times(ప-1)}{2},\quad \frac{ప\times(ప-1)}{2}\times\frac{ప-2}{3},\ \text{ఇత్యా.}=ప,\ \frac{ప^2-ప}{2},$$

$\frac{ప^3-3ప^2+2ప}{6}$ ఇత్యా. వీటిని పరంపరాద్యరాసులచే గుణించి కలుప

$$\frac{ప}{1}+\frac{2ప^2-2ప}{2}+\frac{ప^3-3ప^2+2ప}{6}=ప+ప^2-ప+$$

$$\frac{ప^3-3ప^2+2ప}{6}=\text{సం యో}=\frac{6ప+6ప^2-6ప+ప^3-3ప^2+2ప}{6}$$

$$=\frac{ప^3+3ప^2+2ప}{6}=\frac{(ప^3+2ప^2)+(ప^2+2ప)}{6}=\frac{ప^2(ప+2)+ప(ప+2)}{6}$$

$$=\frac{(ప^2+ప)\times(ప+2)}{6}=\frac{ప(ప+1)\times(ప+2)}{2\times 3}=\frac{ప(ప+1)}{2}\times\frac{ప+2}{3}$$

$=\text{సంకలిత}\times\frac{ప+2}{3}$ అగుచున్నది. ఇచట సంకలితమును రెండుతో కలుపబడిన పదముచే గుణించి 3చే భాగింప సంకలితయోగము అగునని స్పష్టముగ గనుపించుచున్నది.

(3) సంకలితానయనపద్ధతికి ప్రకారాంతరముచే ఉపపత్తి:—

ఏకాదిసంఖ్యలను క్రమముగవ్రాయగా 1, 2, 3, 4,....ప

అట్లుపదమునుండి తలక్రిందుగవ్రాయగా ప, ప—1, ప—2, ప—3....1

క్రమముగవ్రాయబడిన అంకెలనున్ను తలక్రిందుగవ్రాయబడినయంకెలనున్ను క్రమముగకలుపగా ప్రతియోగమున్ను ప+1, ప+1ఇట్లు అగుచున్నది. ఇట్టియోగములు పదసంఖ్యఎంతయోఅన్నిగలవుకావున అన్నిటియొక్కయు యోగము. ప (ప+1) అగుచున్నది. ఇదిక్రమముగను తలక్రిందుగను వ్రాయబడిన అంకెలయోగముల యోగము అగుటచే పదమువరకునైన అంకములయోగమునకు ద్విగుణమగుచున్నది. కావున రెండుచే భాగింప $\frac{ప(ప+1)}{2}$ సంకలితమగుచున్నది.

(4) సంకలితయోగమునకు ప్రకారాంతరోపపత్తి;—

పూర్వోక్తసంకలితానయనముచే $\text{సం} = \frac{\text{ప}(\text{ప}+1)}{2} = \frac{\text{ప}^2+\text{ప}}{2} = \frac{\text{ప}^2}{2} + \frac{\text{ప}}{2}$ అగుచున్నది.

ఇందు పదసంఖ్యను ఏసంఖ్యగా భావించిన నాసంఖ్యవరకు ఒకటిమొదలుగాని ఐనఅంకముల యోగమగుచున్నది. కావున పదసంఖ్య 1టి అగుచో

(1) $\text{సం} = \frac{1^2}{2} + \frac{1}{2} = 1$, ప= 2 అగుచో (2) $\text{సం} = \frac{2^2}{2} + \frac{2}{2} = 3$

ప=3 అగుచో (3) $\text{సం} \frac{3^2}{3} + \frac{3}{2} = 6$ అట్లు ప=4 అగుచో

$(4)\text{సం} = \frac{4^2}{2} + \frac{4}{2} = 10 \ldots 1+3+6+10 \ldots\ldots = \text{సంయో}$ కావున

$$= \left(\frac{1^2}{2} + \frac{2^2}{2} + \frac{3^2}{2} + \frac{4^2}{2} \cdots\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} \cdots\cdots\right)$$

$= \frac{\text{వర్గయోగ}}{2} + \frac{\text{సం}}{2}$ కావున చెప్పబోవు “ద్విఘ్నపదంకుయుతంత్రివిభక్తం”

ఇత్యాదిసూత్రముచే, $\text{వర్గయోగ} = \left(\frac{2\text{ప}+1}{3}\right) \times \text{సం} \therefore \frac{\text{వయో} + \text{సం}}{2}$

$$= \frac{\left(\frac{2\text{ప}+1}{3} \times \text{సం}\right) + \text{సం}}{2} = \left(\frac{2\text{ప}+1}{3} \times \frac{\text{సం}}{2}\right) + \frac{\text{సం}}{2} = \frac{\text{సం}}{2}\left(1 + \frac{2\text{ప}+1}{3}\right)$$

$= \frac{\text{సం}}{2} \times \left(\frac{2\text{ప}+4}{3}\right) = \text{సం} \times \frac{\text{ప}+2}{3}$ అగుచున్నది.

తుదిస్వరూపమునందు సంకలితయోగపద్ధతి స్పష్టమగుచున్నది.

కృత్యాదియోగే కరణసూత్రంవృత్తం

ద్విఘ్నపదం కుయుతం త్రివిభక్తం సంకలితేన హతం కృతియోగః।
సంకలితస్య కృతేస్సమ మేకాద్యంకఘనైక్య ముదీరిత మాద్యైః॥

టీ॥ ద్విఘ్నపదం = రెండుచేగుణింపబడినపదము కుయుతం = ఒకటిచే కలుపబడినదై త్రివిభక్తం = 3 చేభాగింపబడినదై సంకలితేనహతం = సంకలితముచేగుణింపబడినదై కృతియోగః = వర్గయోగమగును.

ఏకాద్యంకఘనైక్యం = ఒకటిమొదలగుఅంకెలఘనయోగము సంకలితస్యకృతేః= సంకలితము యొక్క వర్గమునకు సమం = సమమై ఆద్యైఃఉదీరితం= పూర్వులచేచెప్పబడినది.

137. ప్ర॥ (1) మొదలు పదమువరకునైనఅంకెల వర్గయోగమునుగూర్చి పద్ధతి. పదమును రెండుచేగుణించి అందొకటిగలిపి 3చే భాగింపనగు లబ్ధమును సంకలితముచే గుణింప వర్గయోగమగును.

[2] ఒకటిమొదలు పదమువరకునైనఅంకెల ఘనములను కలుపవలసినచో పదసంఖ్యసంబంధమగు సంకలితమునకు వర్గమును గనుగొనుము. ఆవర్గము ఏకాది పదాంతములగు అంకెలకు ఘనయోగమగును.

ఉదాహరణమ్.

తేషామేవచ వర్గైక్యం ఘనైక్యం చ వద ద్రుతమ్।
కృతిసంకలనామార్గే కుశలా యది తే మతిః॥ ౫౬॥

న్యాసః. ౧, ౨, ౩, ౪, ౫, ౬, ౭, ౮, ౯, లబ్ధ మేషాం వర్గైక్యం ౧, ౫, ౧౪, ౩౦, ౫౫, ౯౧, ౧౪౦, ౨౦౪, ౨౮౫, ఘనైక్యం ౧, ౯, ౩౬, ౧౦౦, ౨౨౫, ౪౪౧, ౭౮౪, ౧౨౯౬, ౨౦౨౫

తా॥ నీయొక్కబుద్ధి వర్గసంకలనపద్ధతియందు నేర్పుగలదియగుచో ఆఏకాది నవాంతసంఖ్యలకు వర్గయోగమును ఘనయోగమునున్ను శీఘ్రముగచెప్పుము.

[1] ఉదా: 9 వరకునైన వర్గములయోగము సూత్రప్రకారము. పదము 9ను రెండుచేగుణింప 18, ఒకటినిగలుప19, మూడుచేభాగింప $\frac{19}{3}$ దీనినిసంకలితము 45 చే గుణింప $\frac{19}{3} \times \frac{45}{1} = 19 \times 15 = 285$ ఇదివర్గయోగము.

రుజువు. $1+4+9+16+25+36+49+64+81 = 285$ అగుచున్నది.

ఈపద్ధతి, వర్గక్షేత్రమునందు తుల్యవ్యాసముగల గోలములను పరచి క్రమముగ పేర్చబడిన గోలరాశిని తెలియుటకుపయోగించును. అందు శిఖరమున 1టి. దానికిక్రింద 2వ వరుసలో 4 గోలములు. ఇట్లు ఆయావరుసలలో గోలములు, క్రింది వరుసలోని నాలుగిటిని పైవరుసలోని ఒకగోలము ఆశ్రయించియుండుటచే ప్రతి వరుసయందును గోలసంఖ్య ఆయాసంఖ్యయొక్క వర్గసంఖ్యఅగుటచే 1 టి మొదలు వరుససంఖ్యపదముగగల సంఖ్యల వర్గయోగము గోలరాశియగును.

[2] ఉదా: 9 వరకునైన అంకెల ఘనములయొక్క యోగము.

9 వరకునైనఅంకెల సంకలితము 45 దీనివర్గము 2025. ఇది ఏకాదినవాంత సంఖ్యాఘనముల యోగము అగుచున్నది.

[1] ఉపపత్తి: వర్గయోగపద్ధతినిగూర్చి (135 ప్ర. చే)

వర్గరాసులు	1, 4, 9, 16, 25......$ప^2$
ప్రథమపరంపర	3, 5, 7, 9......
ద్వితీయపరంపర	2, 2, 2
తృతీయపరంపర	0, 0

పరంపరాద్యరాసులు 2, 3, 2, 0 వీటిని ఏకద్విత్ర్యాదిభేదములచే గుణించికలుపగా $\frac{ప}{1}+\frac{3ప^2-3ప}{2}+\frac{2ప^3-6ప^2+4ప}{6}=$ వర్గయోగ

$= \frac{6ప+9ప^2-9ప+2ప^3-6ప^2+4ప}{6} = \frac{2ప^3+3ప^2+ప}{6}$ దీనికిరూపాంతరము $= \frac{2ప^3+2ప^2+ప^2+ప}{6} = \frac{2ప(ప^2+ప)\quad(ప^2+ప)}{6}$

$= \frac{(ప^2+ప)\quad(2ప+1)}{6} = \frac{(ప^2+ప)\ (2ప+1)}{2\times3}$

$= \frac{ప^2+ప}{2}\times\frac{2ప+1}{3} = \frac{ప(\ +1)}{2}\times\frac{2ప+1}{3} = సం\times\frac{2ప+1}{3}$ ఇట్లు వర్గయోగపద్ధతి యుక్తియుక్తమగుచున్నది.

ప్రకారాంతముచే (సంకలితైక్యానయన వైపరీత్యముచే)

$\because$ సంయో $= \frac{వర్గయోగ}{2}+\frac{సం}{2}$ (136 ప్ర 4 ఉపపత్తిచూ)

$\therefore \frac{వర్గయో}{2} =$ సంయో $- \frac{సం}{2}$ సమచ్ఛేదముల చేసి ఛేదములు విడువగా

$\therefore$ వర్గయో $= 2$ సంయో $-$ సం.

$\therefore$ వర్గయోగ $= 2(\frac{ప^2+ప}{2}\times\frac{ప+2}{3}) - \frac{ప^2+ప}{2}$

$= \frac{2ప^3+6ప^2+4ప}{2\times3} - \frac{3ప^2+3ప}{2\times3} = \frac{2ప^3+3ప^2+1ప}{2\times3}$

$= \frac{2ప^3+2ప^2+ప^2\quad ప}{2\times3} = \frac{2ప^2(ప+1)+ప(ప+1)}{2\times3}$

$= \frac{(ప+1)\ (2ప^2+ప)}{2\times3} = \frac{(ప+1)}{2}\times\frac{ప}{1}\times\frac{(ప2+1)}{3}$

$= \frac{(ప+1)ప}{2}\times\frac{ప2+1}{3}$ తుదిరూపమువందు సంకలితముచే, ద్విగుణితపదమునందు1టిని కలిపి 3చే భాగింపనగులబ్ధమును గుణింపవలయునని స్పష్టమగుచున్నది. ఇట్లీపద్ధతులు బహుప్రకారములచే ఉపపన్నములగుచున్నవి. విస్తరభీతిచే ఉపపత్తి భేదప్రదర్శనమును చాలించితిని

[2] ఉపపత్తి: ఘనయోగపద్ధతినిగూర్చి (135 ప్ర చే)

ఒకటి మొదలగుఅంకెలయొక్క ఘనశ్రేఢివలన శ్రేఢీపరంపరల ఆద్యరాసులు. 1, 7, 12, 6, 0 వరుసవలన పూర్వప్రకారము ఏకద్విత్ర్యాదిభేదములు.

[1] ప [2] $\frac{ప^2-ప}{2}$ [3] $\frac{ప^3-3ప^2+2ప}{6}$

[4] $\frac{ప^4-6ప^3+11ప^2-6ప}{24}$ ఆద్యరాసులలో 5వ సంఖ్య శూన్యమగుటచే ఈనాలుగుభేదములుమాత్రమే ప్రయోజనముగలవి. క్రమముగా ఈభేదములచే పరంపరల ఆద్యరాసులనుగుణించి కలుప ఘనయోగమగును.

$$\therefore \text{ప} + \frac{7\text{ప}^2 - \text{ప}7}{2} + \frac{12\text{ప}^3 \quad 36\text{ప}^2 + 24\text{ప}}{6} + \frac{6\text{ప}^4 - 36\text{ప}^3 + 66\text{ప}^2 - 36\text{ప}}{24}$$

$$= \text{ఘనయో} = \frac{7\text{ప}^2 - 5\text{ప}}{2} + \frac{2\text{ప}^3 - 6\text{ప}^2 + 4\text{ప}}{1} + \frac{\text{ప}^4 - 6\text{ప}^3 + 11\text{ప}^2 - 6\text{ప}}{4}$$

$$= \text{ఘనయో} = \frac{14\text{ప}^2 - 10\text{ప} + 8\text{ప}^3 - 24\text{ప}^2 + 16\text{ప} + \text{ప}^4 - 6\text{ప}^3 + 11\text{ప}^2 - 6\text{ప}}{4}$$

$= \dfrac{\text{ప}^4 + 2\text{ప}^3 + \text{ప}^2}{4} =$ ఘనయో, ఇచట $\dfrac{\text{ప}^4 + 2\text{ప}^3 + \text{ప}^2}{4} = \left(\dfrac{\text{ప}^2 + \text{ప}^2}{2}\right)$ అగుచున్నది. $\dfrac{\text{ప}^2 + \text{ప}}{2} =$ సంకలితము. కావున సంకలితవర్గ $= \left(\dfrac{\text{ప}^2 + \text{ప}^2}{2}\right)$

$= \dfrac{\text{ప}^4 + 2\text{ప}^3 + \text{ప}^2}{4} =$ ఘనయోగము. ఇట్లీపద్ధతి ఉపపన్నమగుచున్నది

138. ప్ర. ఇట్లు వర్గ వర్గములయొక్కయు, పంచఘాతములయొక్కయు యోగమునుగూర్చి మ. మ. పం బాపుదేవశాస్త్రిగారి సూత్రశ్లోకములు.

[1] వ్యేకం సంకలితం బాణై శ్ఛిన్నం సంకలితేన యుక్।
కృతియోగేన చాభ్యస్తం వర్గవర్గయుతి ర్భవేత్॥

[2] వ్యేకం సంకలితం రామై శ్ఛిన్నం సంకలితేన యుక్।
ఘనయోగేన చాభ్యస్తం పంచఘాతయుతి ర్భవేత్॥

[1] సంకలితములో 1టిని తీసివేసి ఆసంఖ్యను 5చే భాగించి అందు సంకలితమునుకలిపి వర్గయోగముచే గుణించినచో వర్గవర్గయోగమగును.

[2] అట్లు ఒకటిచే తీసివేయబడినసంకలితమును 3చే భాగించి, సంకలితమునుకలిపి ఘనయోగముచే గుణించినచో పంచఘాతయోగమగును.

సంకలితైక్యముల యోగమును తెలియుటకు మ.మ.పం. సుధాకరద్వివేది గారి సూత్రశ్లోకము

[3] రామయుక్తపదాభ్యస్తం భక్తం సంకలితైక్యకం।
వేదై స్సంకలితైక్యానాం యుతిమానం చ తద్భవేత్॥

పదసంఖ్యయందు 3 కలిపి దానిచే సంకలితైక్యమును గుణించి దానిని 4చే భాగింప సంకలితైక్యముల యోగము అగుచున్నది.

ఉదా: 1మొదలు 5వరకునైన సంఖ్యలయొక్క వర్గవర్గయోగములు పంచఘాతయోగములు సంకలితైక్యయోగములును గనుగొనవలయును.

(136 ప్ర. చే) సంకలితములు 1, 3, 6, 10, 15 పైపద్ధతిచే వర్గవర్గయోగ

$= \left(\dfrac{(\text{సం} - 1)}{5} + \text{సం}\right) \times \text{వర్గయో} = \left(\dfrac{15 - 1}{5} + \dfrac{15}{1}\right) \times \dfrac{55}{1}$

$= \dfrac{14 + 75}{5} \times \dfrac{55}{1} = 89 \times 11 = 979.$ రుజువు: $1 + 16 + 81 + 256 + 625 = 98 + 625 = 979$ అగుచున్నది.

ఇట్లుపంచఘాతయోగ $= \left(\dfrac{\text{సం} - 1}{3} + \text{సం}\right) \times$ ఘనయో

$= \dfrac{(15 - 1) + 45}{3} \times \dfrac{225}{1} = \dfrac{14 + 45}{3} \times \dfrac{225}{1} = 59 \times 75 = 4425$ ఇదిపంచఘాతయోగము. రుజువు: $1 + 32 + 243 + 1024 + 3125 = 4425$

ఇట్లుసంకలితైక్యయోగ $= \dfrac{(\text{ప} + 3)\ \text{సంకలితయో}}{4} =$ సంయోగయోగ.

$= \dfrac{(5 + 3) \times 35}{4} = \dfrac{8 \times 35}{4} = 2 \times 35 = 70$

రుజువు: సంకలితైక్యయోగ $= 1 + 4 + 10 + 20 + 35 = 70$ అగుచున్నది.

ఈపద్ధతులకును ఉపపత్తి సంకలిత, వర్గ, ఘన, యోగములందువలె శ్రేఢీపరంపరాద్యములయొక్కయు, ఏకద్విత్ర్యాదిభేదములయొక్కయు గుణనముచే తెలియదగినది యగుటవలన విస్తరభీతిచే వ్రాయబడలేదు

సమవిషమైక్యే కరణసూత్రం

* గచ్ఛకృతిర్విషమాంకయుతి స్స్యాత్సైకపదఘ్న పదంచసమానామ్॥

---

* ఈసూత్రోదాహరణములు నాగరప్రతులందెచటను గానరావు. తెనుగుప్రతియందు వర్గాదియోగసూత్రమునకు పూర్వమున వ్రాయబడియున్నది. వర్గయోగోదాహరణశ్లోకము "తేషామేవచవర్గైక్యం"అనుపదముచే సంకలితోదాహరణముతో సంబంధించియున్నది యని స్పష్టము. కావున ఈశ్లోకోదాహరణములు వాటిమధ్యయందుండుట అసంగతమగుటచే నిచట వ్రాయబడినవి. ఇవి ప్రక్షిప్తములు.

139. ప్ర. [1] ఒకటి మొదలు క్రమముగనైన విషమాంకములను కలుపవలసినచో ఆయంకెలెన్ని గలవో ఆసంఖ్యగచ్ఛయనియు పదమనియు చెప్పబడును. ఆగచ్ఛసంఖ్యయొక్క వర్గము ఒకటి మొదలు విషమాంకములయోగ మగుచున్నది.

[2] రెండు మొదలు సమాంకముల గలుపవలసినచో పదమునందు ఒకటిని కలుపగానగు సంఖ్యను పదముచే గుణింపవలయును.

ఉదాహరణమ్

పదే పంచమితే బ్రూహి తథా నవమితే సఖే।
సమానాం విషమాణాం చ పృథక్సంకలితే ద్రుతం॥

తా॥ ఒకటి మొదలు 5 విషమాంకముల యొక్కయు రెండు మొదలు 5 సమాంకముల యొక్కయు యోగములను వేర్వేర శీఘ్రముగ చెప్పుము.

ఉదా: $1+3+5+7+9$ వీటియోగమెంత? $2+4+6+8+10$ వీటియోగమెంత?

విషమాంకయోగము. 5 సంఖ్యలకు కావలయును కావున 5 యొక్క వర్గము 25 ఇది యోగమగును.

సమాంకయోగము $(5+1)\times 5=6\times 5=30$ ఇది సమాంకయోగమగును.

ఉపపత్తి:—వక్ష్యమాణసూత్రము చే స్పష్టముగాగలదు. (140 ప్ర. చూ.)

యథోత్తరచయేన్త్యాదిధనజ్ఞానాయకరణసూత్రంవృత్తం
వ్యేకపదఘ్నచయోముఖయుక్స్యాదంత్యధనంముఖయుగ్దళితంతత్।
మధ్యధనం పదసంగుణితంతత్సర్వధనం గణితంచ తదుక్తం॥ ౧౬౫॥

టీ॥ వ్యేకపదఘ్నచయః=ఒకటిచే తీసివేయబడినపదముచే గుణింపబడిన వృద్ధి, ముఖయుక్=ఆదిధనముతో కూడినదియై, అంత్యధనంస్యాత్ = అంత్యధనము (తుదదినమున ఇవ్వదగినధనము) అగును. తత్=ఆఅంత్యధనము. ముఖయుక్= ఆదిధనముతో కూడినదియై, దలితం=అర్ధింపబడినదై, మధ్యధనం=మధ్యధనమగును. తత్=ఆమధ్యధనము, పదసంగుణితం=పదసంఖ్యచే గుణింపబడినదై, సర్వధనం= మొత్తపుధనమగును. తత్=ఆసర్వధనము, గణితంచ=గణితమనియు, ఉక్తం = చెప్పబడినది.

140. ప్ర. [1] చెప్పబోవు ఉదాహరణమునందువలె మొదటిదినముకంటె రెండవదినము, రెండవదినముకంటె మూడవదినమున ఇట్లు ఒకదినముకంటె మరియొకదినము క్రమమైన వృద్ధిగల ధనము మొదలగువాటిని సంబంధించిన ప్రశ్నములందు మొదటిదినమునందలియంకము ఆది, ముఖము, ఇత్యాదిపదములచేతను ఆవృద్ధిధనము చయము, వృద్ధి, ఉత్తరము ఇత్యాదిపదములచేతను, తుదిదినమునందలి ధనము అంత్యధనము అనియు, మధ్యదినమునందలిధనము మధ్యధనమనియు, ఆ దినసంఖ్యపదము, గచ్ఛ ఇత్యాదిపదములచేతను, మొదటినుండి తుదివరకు ఐన మొత్తము సర్వధనమనియు, గణితమనియు చెప్పబడును.

[2] పదమువలన 1 టిని తీసివేసి దానిచే చయమునుగుణించి ఆదిధనమును కలిపినచో నది అంత్యధనమగును.

[3] అంత్యధనమునందు ఆదిధనమునుకలిపి అర్ధించిన మధ్యధనమగును.

[4] మధ్యధనమును పదముచే గుణింప సర్వధనమగును.

ఉదాహరణం

ఆద్యేదినే ద్రమ్మచతుష్టయం యో దత్వా ద్విజేభ్యోనుదినం ప్రవృత్తః।
దాతుం సఖే పంచచయేన పక్షే ద్రమ్మాః వద ద్రాక్కతి తేన దత్తాః॥ ౧౬౬॥

న్యాసః. ఆదిః౪ చయః౫ గచ్ఛః౧౫ అత్రాదిధనం౪
మధ్యధనం౩౯ అంత్యధనం౭౪ సర్వధనం౫౮౫

తా॥ మిత్రమా! ఒకదాత మొదటిదినమున 4 ద్రమ్మములను బ్రాహ్మణులకొరకునిచ్చి అటుపిమ్మట ప్రతిదినమందును ఐదైదు అధికముగ నిచ్చుటనారంభించెను. ఆదాత 15 దినములకు ఎన్నిద్రమ్మము లనిచ్చెను? త్వరగ చెప్పుము

ఉదా: ఆదిధనము 4 వృద్ధి 5 పదము 15

సూత్రప్రకారము పదము 15 లో 1 టిని తీసివేయ 14 దీనిచే చయము 5 ను గుణింప 70, ముఖము లేక ఆదిధనమగు 4 ను కలుప 74, ఇది అంత్యధనము. ఇందు ఆదిధనము 4 ను కలుప 78 దీనిని అర్ధింప 39 మధ్యధనము. దీనిని పదముచే గుణింప $39\times 15=585$ సర్వధనము.

అనగా $\frac{(\text{ప}-1)\text{చ}+\text{ఆ}+\text{ఆ}}{2}\times \text{ప}=\frac{14\times 5+4+4}{2}\times 15=39\times 15=585$ సర్వ

[1] ఉపపత్తి: ఈప్రశ్నమునందు దాత మొదటిదినమునందు ఆదిధనము నే యిచ్చెను. రెండవదినమున ఏకగుణితచయముతోఁగూడిన ఆదిధనమును, మూడవ దినమున ద్విగుణితచయముతోఁగూడిన ఆదిని......ఇట్లు చూడగా తుదిదినమున ఒకటిచే తీసివేయబడిన పదముచే గుణింపబడిన చయమును ఆదినిన్ని యిచ్చెను. కావున అంత్యదినధనము $\{(\text{ప}-1)\text{చ}+\text{ఆ}\}$ అగుచున్నది. ఇట్లు మధ్యదినము అనగా 15 దినములలో మధ్యదినము 8 అగుచున్నదికావున 8 వ దినము నాటి ఈవి (ఇచ్చినధనము) (7 చయ + ఆ) అగుచున్నది.

$$\therefore (7\times\text{చ})+\text{ఆ}=\left(\frac{15-1}{2}\times\text{చ}\right)+\text{ఆ}=\frac{(\text{ప}-1)\text{చ}}{2}+\text{ఆ}$$

$$=\frac{\text{ఆ}+\text{ఆ}+\text{చ}(\text{ప}-1)}{2}=\text{మధ్యధన.}$$

సర్వధనము అనగా ప్రతిదినము ఇవ్వబడినధనముయొక్క మొత్తముకావున పదమెంతయో ఆసంఖ్యచే గుణింపబడిన ఆదిధనమున్ను (ప -1) ఈసంఖ్యయొక్క సంకలితముతో సమమైన చయమున్ను కలిపినచో సర్వధనమగుచున్నది.

$$\therefore (\text{ప}-1)\text{యొక్క సంకలితము}=\frac{\text{ప}(\text{ప}-1)}{2}\ (136\ \text{ప్ర. చూ}).$$

$$\therefore \text{ప}\times\text{ఆ}\quad\frac{(\text{ప}-1)\text{చ}\times\text{ప}}{2}=\text{సధ}=\frac{(\text{ప}\times\text{ఆ}2)\quad(\text{ప}-1)\text{చ}\times\text{ప}}{2}$$

$$=\frac{\text{ఆ}2+(\text{ప}-1)\text{చ}}{2}\times\text{ప}=\frac{\text{ఆ}+\text{ఆ}+\text{చ}(\text{ప}-1)}{2}\times\text{ప}=\text{మధ్యధన}\times\text{ప}=\text{సర్వధన}$$

[2] ప్రకారాంతరోపపత్తి: అంత్యధనానయనమునుగూర్చి [135 ప్ర 2 చూ]

ఇచట శ్రేఢీరాసులు	4, 9. 14, 19, 24......
ప్రథమపరంపర	5, 5, 5, 5......
ద్వితీయపరంపర	0, 0, 0

ఇందు ప్రథమపరంపరను శ్రేఢిగాభావించి వ్యేకపదమును పదముగభావించియు సాధించినఫలము (ప-1) 5 ఇందు శ్రేఢీరాసులలో ఆదిధనము 4ను కలుపగా $(\text{ప}-1)5+4=(\text{ప}-1)\text{చ}+\text{ఆ}=$ అంత్యధనము. ఆసూత్రము

(135 ప్ర 1) చేతనే సర్వధనానయనముచే శ్రేఢీపరంపరాద్యములు 4, 5 ఏకద్వ్యాదిభేదములచే గుణించికొనుచు $\frac{\text{ప}}{1}\times\frac{4}{1}+\frac{(\text{ప}-1)\text{ప}\times 5}{2}$

$$=\text{ప}\times\text{ఆ}+\left(\frac{(\text{ప}-1)\text{చ}}{2}\times\text{ప}\right)=\frac{\text{ప}\times\text{ఆ}2}{2}+\frac{\text{ప}\times(\text{ప}-1)\text{చ}}{2}$$

$$=\text{ప}\times\frac{2\text{ఆ}+(\text{ప}-1)\text{చ}}{2}=\text{సర్వధనము.}$$ ఇట్లు ఉపపన్నముగుచున్నది.

[3] ఈసూత్రము చేతనే 139 ప్ర. విషయముసిద్ధించుచున్నది. ఎట్లనగా:- 1టి మొదలు 9వరకు విషమాంకములు 5 కావున ఆది 1 చయము 2 పదము 5 సూత్రపద్ధతిచే సర్వధనము $\left\{\frac{(\text{ప}-1)\text{చ}}{2}+\text{ఆ}\right\}\times\text{ప}=\text{సధ}$ ఇందుచయ$=2$, ఆది$=1$ కావున $\left\{\frac{(\text{ప}-1)2}{2}+\text{ఆ}\right\}\times\text{ప}=\{(\text{ప}-1)+1\}\times\text{ప}=\text{ప}\times\text{ప}=\text{ప}^2$ అగుచున్నది.

[4] ఇట్లు సమాంకయోగమువిషయమై ఆది 2 చ 2 ప5 పైప్రకారము సర్వధన$=\left\{\frac{(\text{ప}-1)2}{2}+\text{ఆ}\right\}\times\text{ప}=\{(\text{ప}-1)+\text{ఆ}\}\times\text{ప}=(\text{ప}+1)\text{ప}$ అగుచున్నది.

[5] ఇట్లుఏకాదిసర్వాంకసంకలనముచేయువలసినపుడు ఆది$=1$ చయ$=1$ కావున సర్వధన$=\left\{\frac{(\text{ప}-1)1}{2}+1\right\}\times\text{ప}=\frac{\text{ప}+1}{2}\times\text{ప}$ అగుచున్నది.

ఇట్లు ఈసూత్రముచే ఏఅంకెనుండి అంకయోగముగాని విషమాంకయోగముగాని సమాంకయోగముగాని కావలయునో, ఆఅంకె ఆదియనియు ఆయాఅంకెల అంతరము చయమనియు భావించి చేయవలయును.

ఉదాహరణాంతరమ్.

ఆది స్సప్త చయః పంచ గచ్ఛోష్టౌ యత్ర తత్ర మే।
మధ్యాంత్యధనసంఖ్యే కే వద సర్వధనం చ కిం॥ ౫౮॥

న్యాసః ఆదిః౭ చయః౫ గచ్ఛః౮ అత్ర మధ్యధనం $\frac{౪౯}{౨}$ అంత్యధనం ౪౨ సర్వధనం ౧౯౬॥ అత్ర సమదినేగచ్ఛే మధ్యదినాభావాన్మధ్యా త్పూర్వపరదినధనయో ర్యోగార్ధం మధ్యధనం భవితుమర్హతీతి ప్రతీతి రుత్పాద్యా.

తా॥ ఆది7 చయము5 గచ్ఛము(పదము)8యు నైనచో అచట మధ్యధనమెంత? అంత్యధనమెంత? సర్వధనమెంత? నాకుచెప్పుము.

పైప్రకారము పదము 8 లో 1టినితీసివేయ 7, దీనిని చయము5చే గుణింప 35, ఇందు ఆదినిగలుప 42, అంత్యధనము. ఇందుతిరుగ ఆదిధనము 7ను కలిపిఅర్ధింప $\frac{49}{2}$ మధ్యధనము. దీనినిపదముచే గుణింప $\frac{49}{2}\times\frac{8}{1}=49\times4=196$ సర్వధనము

ఇచట పదసంఖ్య సరియంకె (సమాంకము) అగుటచే మధ్యదినములేదు. ఐనను, 4 వ దినమునందలి ధనముయొక్కయు 5వ దినమునందలిధనముయొక్కయు యోగములోసగము అనగా పూర్వాపరదినధనములయోగార్ధము మధ్యదినధనమనుట సర్వధనాయనార్ధము తెలుసుకొనవలయును.

ముఖజ్ఞానాయకరణసూత్రంవృత్తార్ధం

గచ్ఛహృతే గణితే వదనం స్యాద్వ్యేకపదఘ్నచయార్ధవిహీనే।

టీ॥ గణితే=సర్వధనము, గచ్ఛహృతే=పదముచేభాగింపబడి, వ్యేకపదఘ్నచయార్ధవిహీనే=ఒకటిచే తీసివేయబడినపదముచే గుణింపబడిన చయముయొక్క సగముచే తీసివేయబడినచో, వదనం=ఆదిధనము, స్యాత్=అగును.

ఉపపత్తి: $\text{సర్వధన}=\text{ప}\times\frac{2\text{ఆ}+(\text{ప}-1)\text{చ}}{2}$ (140 ప్ర. మా)

$\therefore\frac{\text{సర్వధన}}{\text{ప}}=\text{ఆ}+\frac{(\text{ప}-1)\text{చ}}{2}$ ఇపుడు సమశోధనము చేయగా

$\frac{\text{సర్వధన}}{\text{ప}}-\frac{(\text{ప}-1)\text{చ}}{2}=$ ఆదిధనము అగుచున్నది.

141. ప్ర. సర్వధనమున్ను గచ్ఛయున్ను చయమున్ను తెలిసి ఆది తెలియనిచో సర్వధనమును గచ్ఛచే భాగించి దానివలన, ఒకటిచే తీసివేయబడిన పదమునుచయముచేగుణించి రెండుచేభాగింప నగులబ్ధమునుతీసివేసినచో ఆశేషము ఆదిధన మగుచున్నది.

ఉదాహరణమ్.

పంచాధికం శతం శ్రేఢీఫలం సప్త పదం కిల।
చయం త్రయం వయం విద్మో వదనం వద నందన॥౫౯॥

న్యాసః. చయః౩ గచ్ఛః౭ ఫలం ౧౦౫ లబ్ధమాదిః ౬

తా॥ సర్వధనము105 పదము7 చయము3 వీటిని మేము ఎరుంగుదుము. ఆదిధనము తెలియదు. పుత్రా! ఆదిధనమును చెప్పుము.

సర్వధనము 105 ను పదము 7చె భాగింప 15లబ్ధము

పదము7 వలన 1టిని తీసివేసి చయము 3చే గుణించి 2 చే భాగింప 9లబ్ధము. దీనిని పూర్వలబ్ధము 15 వలన తీసివేయగా శేషము 6 ఆదిధనము. కావున ఆది 6 చయము3 పదము7 అంత్యధనము24 మధ్యధనము15 సర్వధనము 105.

చయజ్ఞానాయకరణసూత్రమ్

గచ్ఛహృతంధనమాదివిహీనం వ్యేకపదార్ధహృతంచచయస్స్యాత్॥౬౦

టీ॥ ధనం=సర్వధనము, గచ్ఛహృతం=పదముచే భాగింపబడినదై, ఆదివిహీనం=ఆదిధనముచే తీసివేయబడి వ్యేకపదార్ధహృతంచ = ఒకటిచే తీసివేయబడినపదముయొక్క సగముచే భాగింపబడియును చయఃస్యాత్=చయమగును.

142 ప్ర. ఆది, పదము, సర్వధనము, తెలిసి చయముతెలియనిచో సర్వధనమును పదముచే భాగించి ఆలబ్ధమువలన ఆదిధనమును తీసివేయుము. ఆశేషమును పదమువలన 1టిని తీసి అర్ధించిననగుసంఖ్యచే భాగించినచో లబ్ధము చయమగును.

ఉపపత్తి: పూర్వ (141 ప్ర) సూత్రముచే

$$\text{ఆది}=\frac{\text{సధ}}{\text{ప}}-\frac{(\text{ప}-1)\text{చ}}{2}$$

$$\therefore \frac{\text{సధ}}{\text{ప}} = \text{ఆది} + \frac{(\text{ప}-1)\text{చ}}{2}$$

$$\therefore \frac{\text{సధ}}{\text{ప}} - \text{ఆది} = \frac{(\text{ప}-1)\text{చ}}{2} = \frac{\text{సధ}}{\text{ప}} - \text{ఆది} = \text{చ} \times \frac{\text{ప}-1}{2}$$

$$\therefore \left(\frac{\text{సధ}}{\text{ప}} - \text{ఆది}\right) \div \frac{\text{ప}-1}{2} = \text{చయము అగుచున్నది.}$$

ఉదాహరణం.

ప్రథమ మగమ దహ్నా యోజనే యో జనేశ
స్తదను నను కయాసౌ బ్రూహి యాతోర్ధ్వవృద్ధ్యా।
అరికరిహరణార్థం యోజనానా మశీత్యా
రిపునగర మవాప్త స్సప్తరాత్రేణ ధీమన్?॥ ౬౦॥

న్యాసః. ఆదిః ౨ గచ్ఛః ౭ చయః ? ధనం ౮౦

లబ్ధముత్తరం ౨౨/౭, అంత్యధనం ౧౪౬/౭, మధ్యధనం ౧౧౩

తా॥ బుద్ధిమంతుడా! ఒకరాజు మొదటిదినమున 2 యోజనములు ప్రయాణముచేసెను. పిమ్మట క్రమముగ నడకను హెచ్చించి నడచెను. ఇట్లు క్రమముగ వృద్ధిబొందినగమనముచే శత్రువులయొక్క ఏనుగులను తీసికొనివచ్చుటకై 80 యోజనముల దూరమునగల శత్రునగరమును 7 దినములలో చేరెను. ఆ క్రమముగ పెరిగినవృద్ధి యెంత ?

ఇందు ఆది2 గచ్ఛ7 సర్వధనము 80 చయ మెంత ? అని ప్రశ్నము.

పైసూత్రప్రకారము సర్వధనము 80 ను గచ్ఛ7చే భాగింప $\frac{80}{7}$ దీనివలన ఆది 2ని తీసివేయ $\frac{80}{7} - 2 = \frac{80-14}{7} = \frac{66}{7}$ దీనిని పదమువలన 1టిని దీసివేయగా 6ను రెండుచే భాగింపనగు 3చే భాగింప $\frac{66}{7} \div \frac{3}{1} = \frac{66}{7} \times \frac{1}{3}$

$= \frac{22}{7}$ ఇదిచయము.

గచ్ఛజ్ఞానాయ కరణసూత్రం వృత్తమ్

శ్రేఢీఫలాదుత్తరలోచనఘ్నా చ్చయార్ధవక్త్రాంతరవర్గయుక్తాత్।
మూలంముఖోనంచయఖండయుక్తంచయోద్ధృతంగచ్ఛముదాహరన్తి॥

టీ॥ ఉత్తరలోచనఘ్నాత్ = చయము చేతను 2చేతను (అనగా ద్విగుణిత చయముచే) గుణింపబడినదియు, చయార్ధవక్త్రాంతరవర్గయుక్తాత్ = చయార్ధము యొక్కయు ఆదియొక్కయు అంతరమునకైన వర్గముతో గూడినదియునగు, శ్రేఢీఫలాత్ = సర్వధనమువలన మూలం = మూలము, ముఖోనం = ఆదిచేతీసివేయబడినదై చయఖండయుక్తం = చయార్ధముతో కలుపబడినదై, చయోద్ధృతం = చయముచే భాగింపబడినదగునెడ (తత్ = అలబ్ధమును) గచ్ఛం = పదమునుగ (పూర్వాచార్యులు) ఉదాహరంతి = చెప్పుచున్నారు.

143. ప్ర. తా. ఆది, చయ, సర్వధనములు తెలిసి పదము తెలియనిచో —

సర్వధనమును చయము చేతగుణించి దానిని 2చే గుణింపుము. అందు చయార్ధముయొక్కయు ఆదిధనముయొక్కయు అంతరముయొక్క వర్గమును కలుపుము. అట్లుకలుపగానైనసంఖ్యయొక్క వర్గమూలమువలన ఆదిధనమునువ్యవకలించి చయార్ధమునుకలుపుము. దానిని చయముచే భాగింపుము. భాగింపనైనలబ్ధము పదము అగును

ఉదాహరణమ్.

ద్రమ్మత్రయంయః ప్రథమేహ్ని దత్వాదాతుంప్రవృత్తోద్విచయేన తేన
శతత్రయంషష్ట్యధికంద్విజేభ్యోదత్తం కియద్భిర్దివసైర్వదాశు॥ ౬౧॥

తా॥ ఒకదాత మొదటిదినమున బ్రాహ్మణులకు రెండుద్రమ్మములనిచ్చి రెండవదినమున 4 ద్రమ్మములను మూడవదినమున 6 ద్రమ్మములను ఇట్లుపూర్వదినముకంటె పరదినమున 2 ద్రమ్మము లధికముఅగునట్లు ఇచ్చుటనారంభించి, కొన్ని దినములవరకు నిచ్చెను. తుదకు వానికి 360 ద్రమ్మములు వ్యయమైనవి. ఆతడు ఎన్నిరోజులిచ్చెను ? త్వరగచెప్పుము.

న్యాసః. ఆ౩ చ౨ గణితం౩౬౦ లబ్ధంగచ్ఛః౧౮

ఉదా: ఆ3 చ2 సర్వధనము360. ఇచటసర్వధనము 360 ను చయము 2చే గుణింప 720, దీనిని 2చే గుణింప 1440 చయార్ధము $\frac{2}{2}$ యొక్కయు ఆది 3 యొక్కయు అంతరము 3—1=2 నకైన వర్గము 4ను కలుప 1444 దీనిమూలము 38లో ఆది3ని తీసివేయ 35, చయార్ధము1టిని కలుప36, చయము2చే భాగింప 18 ఇదిపదము.

$$\text{ప}=\frac{\sqrt{\text{సధ}\times\text{చ}\times 2+(\frac{\text{చ}}{2}\sim\text{ఆ})^2}-\text{ఆ}+\frac{\text{చ}}{2}}{\text{చ}}$$

$$=\frac{\sqrt{360\times 2\times 2+(3-1)^2}-3+1}{2}=18$$

ఉపపత్తి: ఆది=ఆ, చయ=చ, పద=ప 140 ప్ర. చే.

$$\text{సధ}=\text{ప}\times\frac{2\text{ఆ}+(\text{ప}-1)\text{చ}}{2}=\frac{2\text{ప.ఆ}+\text{ప}^2.\text{చ}-\text{పచ}}{2}$$

∴ $2\text{సధ}=2\text{ప.ఆ}+\text{ప}^2.\text{చ}-\text{ప.చ}$ ఇది వర్గసమీకరణము. ఇందు తెలియనిది (అవ్యక్తము) పదము. అవ్యక్తపక్షమునకు మూలమువచ్చునట్లు రెండుపక్షములందును గుణనాదికమునుచేసి మూలమునుగనుంగొని సమీకరణముచేయవలయును. అపుడవ్యక్తమానము తెలియును. కావున రెండుపక్షములను చయముచేగుణింప

$2\text{సధ.చ}=\text{ప}^2.\text{చ}^2+2\text{ ప.చ.ఆ}-\text{ప.చ}^2$ (7ప్ర.2సి.చూ)

రెండుపక్షములందును $(\text{ఆ}-\text{చ})^2$ దీనినికలుపగా

$$2\text{సధ.చ}+(\text{ఆ}-\frac{\text{చ}}{2})^2=\text{ప}^2.\text{చ}^2+(2\text{ప చ.ఆ}-\text{ప.చ}^2)+(\text{ఆ}-\frac{\text{చ}}{2})^2$$

∴ మూలానయనముచే $\sqrt{2\text{సధ.చ}+(\text{ఆ}-\frac{\text{చ}}{2})^2}=\text{ప.చ}+(\text{ఆ}-\frac{\text{చ}}{2})$

∴ $\text{ప.చ}=\sqrt{2\text{సధ.చ}+(\text{ఆ}-\frac{\text{చ}}{2})^2}-(\text{ఆ}-\frac{\text{చ}}{2})$ పక్షద్వయమును చయముచే భాగింప $\frac{\text{ప.చ}}{\text{చ}}=\frac{\sqrt{\text{సధ.చ.}2+(\text{ఆ}-\frac{\text{చ}}{2})^2}-\text{ఆ}+\frac{\text{చ}}{2}}{\text{చ}}=$ పదము అగును.

ఈస్వరూపమునందు పైపద్ధతియంతయు స్పష్టముగ కనుపించుచున్నది.

అథద్విగుణోత్తరాదివృద్ధౌఫలానయనేకరణసూత్రంసార్ధార్యా.

విషమేగచ్ఛే వ్యేకే గుణక స్థాప్యస్సమేర్ధితేవర్గః।
గచ్ఛక్షయాంతమంత్యా ద్వ్యస్తంగుణవర్గజంఫలంయత్తత్॥౬౨॥
వ్యేకంవ్యేకగుణోద్ధృతి మాదిగుణంస్యాద్గుణోత్తరేగణితం॥

టీ॥ గచ్ఛే=గచ్ఛ(పదము) విషమే=విషమమగుచో వ్యేకే=ఒకటిచేతీసి వేయబడగా (గచ్ఛస్థానమున) గుణకః=గుణకము (అని) స్థాప్యః = వ్రాయతగినది. సమే=సమమగుచుండగా అర్ధితే=అర్ధింపబడినపుడు వర్గః=వర్గము (అని) వ్రాయదగినది. గచ్ఛక్షయాంతం=గచ్ఛ ముగియువరకు(నిట్లుచేయదగినది). అంత్యాత్= అంత్యమైనదగుసంఖ్యనుండి వ్యస్తం=తలకిందుగనైన యత్ = ఏ గుణవర్గజం = గుణకవర్గములవలనైన ఫలం=ఫలముగలదో తత్=ఆఫలము వ్యేకం=ఒకటిచే తీసివేయబడినదై వ్యేకగుణోద్ధృతం=ఒకటిచేతీసివేయబడిన గుణకముచేభాగింపబడినదై ఆదిగుణం=ఆదిధనసంఖ్యచే గుణింపబడినదై గుణోత్తరే = గుణోత్తరశ్రేఢియందు గణితంస్యాత్=సర్వధనమగును.

144. ప్ర॥ గుణోత్తరశ్రేఢీఫలానయనపద్ధతి. (50ప్ర. స్మరింపుము)

(1) చయము గుణకమగుచో అనగాప్రథమదినధనమును గుణకముచేగుణింప ద్వితీయధనము. దానినిగుణకముచేగుణింప తృతీయధనము. ఇట్లుగుణకగుణితపూర్వదినధనము ఉత్తరదినధనమగుచో ఆశ్రేఢి గుణోత్తరశ్రేఢి.

(2) అపుడు గచ్ఛసంఖ్య నొక్కచోవ్రాసిఆసంఖ్య బేసియంకెయగుచో ఆగచ్ఛవలన 1 టినితీసివేసి ఆసంఖ్యనుదానిక్రిందవ్రాయుము. ఆగచ్ఛకుఎదుట సమీపమున గుణకమనుగుర్తుకొరకు గుణనచిహ్నమునుగాని 'గు' అక్షరమునుగాని వ్రాయుము.

(3) సరియంకెయగుచో ఆసంఖ్యను అర్ధించివ్రాసి వర్గమనుగుర్తుకొరకు 'వ' అనివ్రాయుము.

(4) ఇట్లుబేసియగుచో ఒకటితీసివేసి, క్రిందవ్రాసి ఎదుట 'గు' అనియు, సమమగుచో, అర్ధించివ్రాసి 'వ' అనియు గచ్ఛశూన్యమగువరకును ఒకదానికిక్రిందమరియొకటియుండునట్లు వ్రాయుము. ఇవన్నియు ఘాతమాపకములని తెలియుము.

(5) తుదకు శూన్యమైనస్థానమున 1టిని శూన్యమునకుతిన్నగ వ్రాయుము.

(6) ఒకటిమొదలగు ఆయాసంఖ్యలను క్రిందినుండి పైన తొలుతవ్రాయబడినగుర్తువరకును 'గు' గుర్తుగలపుడు గుణకముచేగుణించుటయు 'వ' గుర్తుగలపుడు వర్గమును చేయుటయు అనుకృత్యములను క్రమముగచేయుచురాగా, తుదకు సిద్ధించినసంఖ్య గుణవర్గజఫలము.

(7) ఆసంఖ్యవలన 1టిని తీసివేయుము. దానిని గుణకమువలన ఒకటిని తీసి వేయగానగుసంఖ్యచే భాగింపుము.

(8) ఆలబ్ధమును ఆదిధనముచేగుణింప గుణోత్తరశ్రేఢియందుసర్వధనమగును.

ఉదాహరణమ్.

పూర్వం వరాటకయుగం యేన ద్విగుణోత్తరంప్రతిజ్ఞాతం।
ప్రత్యహ మర్థిజనాయ స మాసే నిష్కాన్దదాతికతి॥ ౬౨॥

న్యాసః. ఆదిః ౨ ఉత్తరగుణః ౨ గచ్ఛః ౩౦ లబ్ధావరాటకాః ౨౧౪౭౪౮౩౬౪౬ నిష్కవరాటకైర్భక్తా జాతా నిష్కాః ౧౦౪౮౫౭ ద్రమ్మాః ౯ పణాః ౯ కాకిణ్యౌ ౨ వరాటకాః ౬

తా॥ ఒకడు ఒకదినముకంటె మరియొకదినమున రెట్టింపువరాటకముల (గవ్వల)నిచ్చునట్లు ప్రతిజ్ఞ చేసి మొదటిదినమున 2 గవ్వలనిచ్చెను. ఆతడు ఒక నెల అగుసరికి యాచకులకు ఎన్ని నిష్కములనిచ్చును ?

ఇచట ఆది 2 గుణకమగుచయము2 గచ్ఛ(పదము) 30

(50 ప్ర చూ) గచ్ఛ సరిసంఖ్య అగుటచే తొలుత అర్ధింపవలెను.

	30 వ,	$32768^2=1073741824$
	15 గు,	$16384 \times 2=32768$
	14 వ,	$128^2=16384$
	7 గు,	$64 \times 2=128$
	6 వ,	$8^2=64$
	3 గు,	$4 \times 2=8$
	2 వ,	$2^2=4$
	1 గు,	$1 \times 2=2$
తుదిఘాతమాపకము	0 వ,	1

క్రిందినుండి గుణనవర్గములుచేయగానైన గుణవర్గజఫలము 1073741824 దీనివలనఒకటినితీసివేసి దానిని ఒకటిచేతీసివేయబడినగుణకము చే భాగింపవలయును. గుణకము 2 వలన 1 టినితీసివేయ 1భాజకముగాన 1073741823ఫల మగుచున్నది

దీనిని ఆది2చే గుణింప 2147483646సర్వధనము. ఇన్ని వరాటకములు 30రోజులలో నియ్యబడినవి. వీటిని నిష్కమునకగు వరాటకములు20480చే భాగింప నిష్కములు 104857 శేషము12286ను ద్రమ్మవరాటకములు1280చే భాగింప ద్రమ్మములు 9 శేషము766ను పణవరాటకములు80చే భాగింప పణములు9 శేషము46ను కాకిణీవరాటకములు20చే భాగింప కాకిణులు2 శేషము 6 వరాటకములు.

ఉపపత్తి:—ప్రశ్నప్రకారము ప్రథమద్వితీయాది ధనములయోగము—

$$\text{ఆ} + \text{ఆ.గు} + \text{ఆ.గు}^{2} + \text{ఆ.గు}^{3} + \ldots\ldots \text{ఆ.గు}^{\text{ప}-1} = \text{సర్వధన}$$

మొదటిదినమున ఆదిధనము,రెండవదినమున గుణకగుణితఆదిధనము. మూడవదినమున గుణకగుణితద్వితీయదినధనము అనగా $\text{ఆ.గు} \times \text{గు} = \text{ఆ.గు}^{2}$ అగుచున్నది. ఇట్లుక్రమముగాద్విఘాతత్రిఘాతాదులు గుణకమునకగుచున్నవి.కాని మొదటిదినమున కేవలము ఆదిధనమే యగుటచే అంత్యదినమున ఏకోనపదసంఖ్యయే గుణకమునకు ఘాతమాపకమగుచున్నదియని తెలియవలయును.

పైరెండుపక్షములను (గు—1)ఈసంఖ్యచే గుణింప

$$\text{సధ}(\text{గు}-1) = \text{ఆ.గు} - \text{ఆ} + \text{ఆ.గు}^{2} - \text{ఆగు} + \text{ఆగు}^{3} - \text{ఆగు}^{2} + \ldots$$

$\text{ఆగు}^{\text{ప}} - \text{ఆగు}^{\text{ప}-1}$ ఇందు ద్వితీయపక్షమునందలి ధనఋణములకు అంతరమైన యోగముచేయగా

$$\text{సధ}(\text{గు}-1) = \text{ఆ.గు}^{\text{ప}} - \text{ఆ} = \text{ఆ}(\text{గు}^{\text{ప}} - 1)$$

$$\therefore \text{సర్వధన} = \frac{\text{ఆ}(\text{గు}^{\text{ప}} - 1)}{\text{గు} - 1} \text{ అగుచున్నది.}$$

దీనింబట్టి గుణకమునకు పదమితఘాతమును చేసి దానివలన 1టిని తీసివేసి ఏకోనగుణకముచేభాగించి ఆదిచే గుణింపవలయునని స్పష్టమగుచున్నది. గుణకసంఖ్యకు పదమితఘాతమునుచేయుటయే బేసియగుచో 1టిని తీసివేసియు, సరియగుచో నర్ధించియు, గుణవర్గజఫలము గనుగొనుట యగుచున్నది. ఈవిషయము ఘాతప్రకరణమున అభీష్టఘాతమును గనుంగొను పద్ధతియొక్క ఉపపత్తిలో (50.ప్ర.ఉ) చూడనగును. అట్టిపద్ధతి యుపపన్నమగుచున్నది.

ఉదాహరణాంతరం

ఆది ర్ద్వయం సఖే వృద్ధిః ప్రత్యహం త్రిగుణోత్తరా।
గచ్ఛ స్సప్తదినం యత్ర గణితం తత్ర కిం వద॥ ౬౩॥

న్యాసః. ఆదిః ౨ గుణకచయః 3 గచ్ఛః ౭ లబ్ధంగణితం ౨౧౮౬.

తా॥ మిత్రమా! ఆదిధనము 2 ఉత్తరదినమునందు పూర్వదినధనమునకు 3 గుణకము అగు చయము· పదము 7 అచట సర్వధనమెంత ? చెప్పుము.

ఆది 2 గుణకచయము 3 గచ్ఛ 7 విషమసంఖ్య కావున

7	×	2187
6	వ	729
3	×	27
2	వ	9
1	×	3
0	వ	1

గుణవర్గజఫలము 2187 అగుచున్నది. ఇందు 1టి తీసివేసి (గు—1)=3—1=2 చే భాగింప 2186 ÷ 2=1093 దీనిని ఆది ధనము 2చే గుణింప 2186 సర్వధనము అగుచున్నది.

సమాదివృత్తజ్ఞానాయకరణసూత్రంసార్ధార్యా.

పాదాక్షరమితగచ్ఛే గుణవర్గఫలం చయేద్విగుణే॥ ౬3॥
సమవృత్తానాం సంఖ్యా తద్వర్గో వర్గవర్గశ్చ।
స్వస్వపదోనౌ స్యాతా మర్ధసమానాంచ విషమాణామ్॥ ౬౪॥

టీ॥ పాదాక్షరమితగచ్ఛే=ఎన్ని అక్షరములుగలపాదములో ఆఅక్షరములు పాదాక్షరములు. పాదాక్షరతుల్యమగుసంఖ్య గచ్ఛయగుచుండ ద్విగుణే=రెండు గుణకమైన చయే=చయమగుచుండగానైన గుణవర్గఫలం=(పూర్వప్రకారము సాధింబడిన)గుణవర్గజఫలము సమవృత్తానాం=సమవృత్తములయొక్క సంఖ్యా=సంఖ్య యాగుచున్నది.

తద్వర్గః=సమవృత్తసంఖ్యావర్గమున్ను వర్గవర్గశ్చ=సమవృత్తసంఖ్యా వర్గవర్గమున్ను స్వస్వపదోనౌ=(క్రమముగ) తమతమవర్గమూలములచే తీసివేయబడినవై (క్రమముగ) అర్ధసమానాం = అర్ధసమవృత్తములయొక్కయు విషమాణాంచః విషమవృత్తములయొక్కయు (సంఖ్యలై) స్యాతాం=అగుచున్నవి.

145. ప్ర. (1) ఇదివరలో (134 ప్ర) ఆయాఛందములవలన పుట్టిన సమవృత్తములసంఖ్య , నెరుంగుపద్ధతియు ఏకద్విత్ర్యాదిగురుభేదసంఖ్య నెరుంగుటయు చెప్పబడినది. అందు సమవృత్తసంఖ్య విఛందమెన్నవదియో ఆసంఖ్యఘాతమాపకముగాగల 2 వలననైన ఫలముతో సమమగుచున్నదియనియు సూచింపబడినది. అది స్పష్టముగ చెప్పబడుచున్నది. 2 గుణకచయము. పాదాక్షరసంఖ్య గచ్ఛ. అట్లుభావించి చేయగానగు గుణవర్గజఫలము సమవృత్తసంఖ్య యగును.

(2) సమవృత్తసంఖ్యావర్గమువలన సమవృత్తసంఖ్యను తీసివేయగానగు శేషము అర్ధసమవృత్తసంఖ్య యాగును.

(3) సమవృత్తసంఖ్యావర్గవర్గమువలన సమవృత్తసంఖ్యావర్గమును తీసివేయగానగు శేషసంఖ్య విషమవృత్తసంఖ్య అగుచున్నది.

ఉదాహరణమ్

సమానా మర్ధతుల్యానాం విషమాణాం పృథక్పృథక్।
వృత్తానాం వద మేసంఖ్యా మనుష్టుప్ఛందసి ద్రుతమ్॥౬౪॥

న్యాసః. ఉత్తరోద్విగుణః ౨ గచ్ఛః ౮ లబ్ధాసమవృత్తానాం సంఖ్యా ౨౫౬ తథాఅర్ధసమానాంచ ౬౫౨౮౦ విషమాణాంచ ౪౨౯౪౯౦౧౭౬౦.

ఇతి శ్రేఢీ వ్యవహారః.

అనుష్టుప్ఛందమునందగు సమవృత్తములు అర్ధసమవృత్తములు విషమవృత్తములు వాటిసంఖ్యను నాకు వేర్వేర శీఘ్రముగ చెప్పుము.

గుణకచయము 2		
8	వ	256
4	వ	16
2	వ	4
1	×	గుణకము 2
0	వ	1

గచ్ఛ 8 ఇది సమసంఖ్యకావున 256 సమవృత్తసంఖ్య. దీనివర్గము 65536 వలన 256 ను వ్యవకలింప 65280 అర్ధసమవృత్తసంఖ్య. అట్లు సమవృత్తసంఖ్యా 256 వర్గవర్గము 65536 యొక్క వర్గము. 4294967296 వలన 65536 ను తీసివేయ 4294901760 ఇది విషమవృత్తసంఖ్య యగుచున్నది యని తాత్పర్యము.

ఉపపత్తి:— సమవృత్తసంఖ్య, పాదాక్షరసంఖ్య ఘాతమాపకముగాగల 2 వలననైన ఘాతఫల మగునని యిదివరలో చెప్పబడినది. (134 ప్ర. ఉ1 చూ)

సమాదివృత్తలక్షణము వృత్తరత్నాకరమునందు

శ్లో॥ అంఘ్రయోయస్యచత్వారస్తుల్యలక్షణలక్షితాః।తచ్ఛందశ్శాస్త్రతత్వజ్ఞాస్సమ వృత్తం ప్రచక్షతే॥ ప్రథమాంఘ్రిసమోయస్య తృతీయశ్చరణోభవేత్।ద్వితీయస్తుర్యవద్వృత్తంతదర్ధసముచ్యతే॥ యస్యపాదచతుష్కేపిలక్ష్మభిన్నం పరస్పరం। తదాహుర్విషమంవృత్తంఛందశ్శాస్త్రవిశారదాః॥

తా॥ ప్రతిశ్లోకమునకును 4 పాదములుండును. ఆనాలుగుపాదములునుఒకే లక్షణముగలవియగుచో ఆవృత్తము సమవృత్తము. ప్రథమ తృతీయపాదములు ఒక లక్షణముగలవి. ద్వితీయ చతుర్థపాదములు మరియొకలక్షణముగలవియగుచో నా వృత్తము అర్ధసమవృత్తము. నాల్గుపాదములు భిన్నలక్షణములుగలవియగుచో విషమ వృత్తము. అట్టి అర్ధసమవృత్తములు సమవృత్తసంఖ్యనుబట్టి ఎట్లగునను ప్రశ్నము నందు వక్ష్యమాణమాణమగు అంకపాశవ్యవహారముచే ఉత్తరము చెప్పదగియున్నది. అందు అర్ధసమవృత్తలక్షణమునుబట్టి రెండుపాదములొకవిధముగను తదితరపాదము లురెండును మరియొకవిధముగను ఉండుటయని ఫలితముగావున స్థానసంఖ్య 2అగు టచే సమవృత్తభేదసంఖ్య=యా అనుకొనుచో అంకపాశమునందలి "స్థానాంత మేకాపచితాంతిమాంకఘాతః" ఇత్యాదిసూత్రముచే యా(యా — 1)=అర్ధసమ వృత్తసంఖ్య అగుచున్నది. (217 ప్ర. చూ)

∴ యా(యా — 1) = యా^{2} — యా = సమవృత్తసంఖ్య^2 — సమవృత్త సంఖ్య=అర్ధసమవృత్త. విషమవృత్తములు రెండువిధములనవచ్చును [1] సమవృత్త ములును అర్ధసమవృత్తములును కానివి [2] నాల్గుపాదములును పరస్పరభిన్న లక్షణములు గలిగియుండునవి. వృత్తరత్నాకరమునందలి పైశ్లోకమునందు ఈలక్ష ణమే చెప్పబడినది. భాస్కరాచార్యోక్తసూత్రముచే ఈ [2] విషమవృత్తసంఖ్య తెలియబడదు. అందులకై మ. మ. పం. సుధాకరులసూత్రము.

సమవృత్తజభేదేన ద్విగుణేన విహీనితః।
అర్ధతుల్యజభేదో హి సైక స్తత్కృతి రూనితః॥
శశినా విషమాణాంత ద్భేదపివాస్తి విద్వర।
వృత్తరత్నాకరోక్తానాం తతోన్యో భాస్కరోదితః॥

తా॥ అర్ధసమవృత్తసంఖ్యవలన సమవృత్తసంఖ్యను రెట్టించి తీసివేయుము శేషమునందొకటికలిపి వర్గింపుము. ఆవర్గమువలన 1టి తీసివేయుము. అదివిషమ వృత్తసంఖ్య వృత్తరత్నాకరోక్తలక్షణముచేనగును.

ఉపపత్తి: సమవృత్తసంఖ్య = యా పైనచూపిన అంకపాశసూత్రముచే

యా × (యా — 1) × (యా — 2) × (యా — 3)=విషమవృత్తసంఖ్య

= {యా × (యా — 3)} × {(యా — 1) × యా — 2)}

= (యా^{2} — యా3) × (యా^{2} — యా3 + 2)

= (యా^{2} — యా3 + 1) × (యా^{2} — యా3 + 1) — 1

= (యా^{2} — యా — 2యా + 1) × (యా^{2} — యా — 2 యా + 1) — 1

(యా^{2} — యా)=అర్ధసమవృత్తసంఖ్య అగుటచే

= (అర్ధసమవృసం — 2 సమవృసం + 1)^2 — 1=వివృసం. అగుచున్నది. ఇట్లు సుధాకరసూత్ర ముపపన్నమగుచున్నది.

భాస్కరాచార్యులవారు మూలసూత్రమందు చెప్పినపద్ధతి [1] విషమ వృత్తముల సంఖ్యను తెలియచేయుచున్నది. కానిఈవిషమవృత్తలక్షణము వృత్త రత్నాకరలక్షణముకంటె భిన్నమగుచున్నది. వృత్తరత్నాకరవ్యాఖ్య (నారాయ ణీయము) అందు సమవృత్తములు అర్ధసమవృత్తములును కానివి విషమవృత్తము లనియే చెప్పబడినది (ఉదాహరణశ్లోకము 53 టీక చూ)

అట్టివిషమవృత్తసంఖ్య యా = సమవృత్తసంఖ్య అనుకొనుచో

(యా^{2} — 1)యా^{2}=యా^{4} — యా^{2}=సమవృసం^{4} — సమవృసం^{2} అగుచున్నది. వివరమునుగూర్చి అంకపాశమును చూడవలెను.

శ్రేఢీవ్యవహారమును సంబంధించినవిశేషములు.

146. ప్ర. ప్ర. గుణోత్తరశ్రేఢీఫలానయనమందును ఘాతప్రకరణమం దును (144 ప్ర. 50 ప్ర) చెప్పబడిన అభీష్టఘాతానయనము చక్రవృద్ధియందు నుపయోగించును.

ఉదా: సంవత్సరము 1టికి రూ 100 కి వడ్డీ రూ 5 లు చొ॥ రూ600లకు 11 సంవత్సరములకును ఎంతయగును ?

ఈప్రశ్నమునందు ఒకవర్షమునకైనవృద్ధి మూలధనములో నెన్నవవంతగు చున్నదో అన్నవవంతుధనమును ప్రతివర్షమునను స్వాంశానుబంధవిధిచే మూలధన ముతో కలుపవలయును. (75 ప్ర). 1 విశే. చూ) అట్లుచేయగా

ఒకసంవత్సరమునకు రూ 600 లకు 30 రూపాయిలు వడ్డీ. మూలధనములో $\frac{30}{600} = \frac{3}{60} = \frac{1}{20}$ వంతు అగుచున్నది. కావున స్వాంశానుబంధము చే

$$600 + \text{స్వ}\frac{1}{20} + \text{స్వ}\frac{1}{20} + \text{స్వ}\frac{1}{20} + \text{స్వ}\frac{1}{20} + \text{స్వ}\frac{1}{20} + \text{స్వ}\frac{1}{20} + \text{స్వ}\frac{1}{20} + \text{స్వ}\frac{1}{20} + \text{స్వ}\frac{1}{20} + \text{స్వ}\frac{1}{20} + \text{స్వ}\frac{1}{20} = \frac{600}{1} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20}$$ (75 ప్ర. చూ)

ఇచట $\frac{21}{20}$ ఈసంఖ్యను ఏకాదశ (11) ఘాతముచేసి దానిని 600చే గుణింపవలెను. అని స్పష్టమగుచున్నది.

147. ప్ర. గుణోత్తరశ్రేఢియందును ఆది, చయ, పద, సర్వధనములలో మొదటిమూటినిబట్టి సర్వధనానయనము చెప్పబడినది (144 ప్ర. చూ) అట్లు ఏమూడు తెలిసినను నాలవదానిని తెలుసుకొనవచ్చును. ఆది తెలియనిచో

$$\because \text{సర్వధన} = \frac{\text{ఆ}(\text{గు}^{\text{ప}} - 1)}{\text{గు} - 1} \therefore \text{సర్వధన}\ (\text{గు} - 1) = \text{ఆ}(\text{గు}^{\text{ప}} - 1)$$

$$\therefore \frac{\text{సధ} \times (\text{గు} - 1)}{\text{గు}^{\text{ప}} - 1} = \text{ఆదిఅగుచున్నది.}$$

అట్లు పదము తెలియనిచో పైసమీకరణము ననుసరించి

$$\because \text{సధ} \times (\text{గు} - 1) = \text{ఆ}\ (\text{గు}^{\text{ప}} - 1) \therefore \frac{\text{సధ} \times (\text{గు} - 1)}{\text{ఆ}} + 1 = \text{గు}^{\text{ప}}$$

అట్లు వచ్చినసంఖ్యను గుణకముచే ఎన్నిసార్లు భాగించినచో తుదకు 1కి లబ్ధమువచ్చునో ఆపర్యాయసంఖ్య పదమగునని తెలియదగియున్నది.

148. ప్ర. తడకమళ్ళ వెంకటకృష్ణరాయ ప్రణీతాంధ్ర లీలావతియందు శ్రేఢీవ్యవహారసంబంధముగ కొన్నిపద్ధతులు చూపబడినవి. అందు కొన్ని చూపబడుచున్నవి.

(1) యా అనువాడు రోజునకు 8 మైళ్ళు నడచును. కా అనువాడు రోజునకు 32 మైళ్ళు నడచును. యా అనువాడు బయలువెడలిన 12 దినములకు కా అనువాడు బయలుదేరినచో యా అనువానిని ఎన్నిదినములలో కలియును?

ఇచట యా అనువానికంటె కా అనువాడు దినమునకు 32 — 8 = 24 మైళ్ళు ఎక్కువనడచును. కాని యా అనువాడు 8 × 12 = 96 మైళ్ళునడిచినపిమ్మట కా

బయలుదేరెను. దినమునకు 24 మైళ్ళు ఎక్కువనడచుచో 96 మైళ్ళు ఎన్నిదినములకు ఎక్కువనడచును ? 96 ÷ 24 = 4 దినములకు, ఈత్రైరాశికముచే ప్రశ్నోత్తరము సిద్ధించును.

[2] ఒకఅడవియందు ఒకఏనుగులగుంపు గలదు. ఆగుంపునందలి ఏనుగులు మూడుభాగములుగ విడి బయలుదేరినవి. తిరుగకలసి 5 భాగములుగవిడి 5 చెరువులందును నీరుద్రాగినవి. తిరుగకలసి 7 భాగములుగవిడి 7 పర్వతములందును సంచరించినవి. అవికలసి 9 భాగములుగవిడి 9 ప్రదేశములందు విశ్రమించినవి. అవికలసి 11భాగములుగవిడి మేతమేసి అవితిరుగకలసి 13 భాగములుగవిడి స్వస్థానమునువచ్చి తుదకు కలిసియున్నవి. ఆఏనుగులెన్ని ?

ఈప్రశ్నము లఘుతమాపవర్త్యముచే నుత్తరింపదగినది. ప్రశ్నోత్తరము బహువిధములుగ వచ్చును. అందు సర్వాల్పమగు అభిన్నసంఖ్య లఘుతమాపవర్త్యము.

[3] ఒకడు ప్రథమదినమున 3మైళ్ళునడచి ప్రతిదినమునకు 8 మైళ్ళు వృద్ధిగ నడచుచుండెను. మరియొకడు ప్రతిదినమును 21 మైళ్ళు సమానగతిచే నడచుచుండెను. ఇద్దరును ఒక్కమారు బయలుదేరినచో ఎన్నిరోజులకు కలియుదురు? ఈప్రశ్నము నియతసంకలితగతులసమీకరణమున కుదాహరణముగ గణితాసారసంగ్రహమున నియ్యబడినది. ఇచట ఇద్దరును బయలుదేరినదిమొదలు కలియువరకునైన దినసంఖ్య 'ప' అనుకొందము. ఇదిపదము. కావున (140 ప్ర. చే)

$$\text{సధ} = \left\{(\text{ప} - 1) \times \frac{\text{చ}}{2} + \text{ఆ}\right\} \times \text{ప} = \text{ప} \times \text{నియతగతి}$$

$$\therefore (\text{ప} - 1) \times \frac{\text{చ}}{2} + \text{ఆ} = \text{నియతగతి}$$

$$\therefore \text{ప} - 1 = (\text{నియతగతి} - \text{ఆ}) \div \frac{\text{చ}}{2}$$

$$\therefore \text{ప} = (\text{నియతగతి} - \text{ఆ}) \div \frac{\text{చ}}{2} + 1 \text{ అగుచున్నది.}$$

నియతగతివలన అనియతగతిగలవాని ప్రథమదినగతిని తీసివేసి చయార్ధముచే భాగించి అందు ఒకటికలిపినచో ఇద్దరును కలియు దినసంఖ్య అగుచున్నదని తెలియుచున్నది.

దీనిని సంబంధించిన ప్రశ్నములు.

I ఒకడు మొదటిదినమున రూ 2 లనుఇచ్చి ప్రతిదినమును $\frac{3}{2}$ హెచ్చుగ నిచ్చుచుండెను. మరియొకడు ప్రతిదినమును రూ 18 లను సమానముగ ఇచ్చుచుండెను. ఇద్దరును సమానవ్యయముగలవారు ఎంతకాలమున కయ్యెదరు ?

II ఒకవరాహము 1 నిమిషమునకు 100 గజములదూరము నడచుచుండెను. దానినిపట్టుకొనుటకై జాగిలము మొదటినిమిషమున 1గజమునడచి, రెండవనిమిషము 2గజములు, 3వ నిమిషములో 3 గజములు ఇట్లు ఏకోత్తరవృద్ధిగ నడచుచుండెను. ఎన్నిగంటలలో ఆజాగిలము వరాహమును పట్టుకొనును ?

[4] ఒకడు మొదటిదినమున రెండురూపాయిలను వ్యయముచేసి ప్రతిదినమును 8 వృద్ధిగ వ్యయముచేయుచుండెను. మరియొకడు మొదట రూ 10 లను వ్యయముచేసి ప్రతిదినమును 2 వృద్ధితో వ్యయముచేయుచుండెను. ఇద్దరును సమానవ్యయముగలవా రెప్పటి కయ్యెదరు ?

ఇచట మొదటివాని ఆది 2=ఆ, చయము 8=చా } అనుకొందము.
రెండవవాని ఆది10=అ, చయము 2=చ } పదముసమానము.

$$\therefore (\text{ప}-1)\times\frac{\text{చా}}{2}+\text{ఆ}=(\text{ప}-1)\times\frac{\text{చ}}{2}+\text{అ} \text{ సమశోధనము చేయగా}$$

$$(\text{ప}-1)\times\frac{\text{చా}}{2}=(\text{ప}-1)\times\frac{\text{చ}}{2}+(\text{అ}-\text{ఆ})$$

$$\therefore (\text{ప}-1)\times\frac{\text{చా}}{2}-(\text{ప}-1)\times\frac{\text{చ}}{2}=\text{అ}-\text{ఆ}$$

$$\therefore (\text{ప}-1)\times\left(\frac{\text{చా}-\text{చ}}{2}\right)=\text{అ}-\text{ఆ}$$

$$\therefore \text{ప}=\frac{(\text{అ}-\text{ఆ})}{\frac{\text{చా}-\text{చ}}{2}}+1=\frac{\text{ఆదిధనాంతరం}}{\text{చయాంతరార్ధం}}+1=\text{పదము అగుచున్నది.}$$

ఇట్టిప్రశ్నములందు ఆదిధనాంతరమును, చయాంతరమును అర్ధింపనగు సంఖ్యచే భాగించి, అందొకటికలిపినచో పదము తెలియును అని గ్రహింపదగియున్నది.

[5] ఒకభూపతి కొందరు బ్రాహ్మణులకు మొదటివానికి రూ 4 లను రెండవవానికి రు 10 ను, మూడవవానికి రూ 16 లను ఇట్లు ఒకనికంటె మరియొకనికి రూ 6 లు హెచ్చుగునట్లు అనగా 6 చయముగ నిచ్చెను. ఆబ్రాహ్మణులందరును కలసి తమధనములనన్నిటిని కలిపి సమముగపంచుకొనగా ఒక్కొకనికి రూ 25 లు వచ్చినవి. బ్రాహ్మణులెందరు ? ఈప్రశ్నము పై (3) నియతసంకలితగతుల సమీకరణమువలె చేయదగియున్నది. ఎట్లనగా :— ఇందు ఆది 4 చయము 6 బ్రాహ్మణసంఖ్యయే పదము. సమధనము 25 నియతగతి. అట్లుభావించినచో ప్రశ్నోత్తరము రాగలదు.

(పై 3 వి. చే) $25-4\div\frac{6}{2}+1=21\div 3+1=8$ బ్రాహ్మణసంఖ్యఅగుచున్నది.

$$\text{లేక } (\text{సమధన}-\text{ఆ})\div\frac{\text{చ}}{2}+1=\text{ప కావున}$$

$$(\text{ప}-1)\times\frac{\text{చ}}{2}=\text{సమధన}-\text{ఆ అగుటచే}$$

$$(\text{ప}-1)\text{చ}=(\text{సమధన}-\text{ఆ})\;2 \text{ అగుచున్నది.}$$

$$\therefore \text{చ}\times\text{ప}-\text{చ}=(\text{సమధన}-\text{ఆ})\times 2$$

$$\therefore \text{ప}=\frac{(\text{సమధన}-\text{ఆ})\times 2+\text{చ}}{\text{చ}} \text{ అగుచున్నది.}$$

సమధనమువలన ఆదినివ్యవకలించి 2చే గుణించి అందు చయముకలిపి దానిని చయముచే భాగింప పదములభించునని ప్రాచీనగణకసూత్రము (పావులూరిగణితములోనిది) ఆంధ్రలీలావతియందు వ్రాయబడినది.

[6] ఒకఆయతక్షేత్రమునందు తుల్యవ్యాసములగు గోలములపరచి పేర్చబడిన గోలరాశిని తెలియుటకు పద్ధతి:—

అందుపైశిఖరమునందు ఒకపంక్తిగ గోలములుకొన్నియుండును. దానిక్రింది 2వ వరసలో పొడవుగనున్న ప్రతిపంక్తియందును పైపంక్తికంటె నొక్కొకటి యధికముగనుండును. ఇట్లు ప్రతివరసయందును పైవరసలోని పొడవుపంక్తికంటె క్రిందివరసలోని పొడవుపంక్తియందు 1టి అధికముగనుండును. అట్టిపంక్తులు ప్రతి వరసయందును మొదటివరసయందు 1టి, రెండవవరసయందు రెండు, మూడవవరసయందుమూడు, ఇట్లు వరససంఖ్యనుబట్టియుండును. అనగాఎన్నవవరసయో అన్ని గోలములు ఆవరసలో పెడలుపుగనుండును.

దానివలన శిఖరగోలములు=యా వరససంఖ్య=వ అనుకొనుచో ప్రతివరసయందును గోలసంఖ్య ఈక్రిందిపద్ధతిగా నగుచున్నది.

$$\text{మొదటివరస గోలములు} = \text{యా} = \text{యా}\ 1$$

$$2\ \text{వ వరస గో} = (\text{యా} + 1)\ 2 = \text{యా}\ 2 + (2 \times 1)$$

$$3\ \text{వ వరస గో} = (\text{యా} + 2)\ 3 = \text{యా}\ 3 + (3 \times 2)$$

— — — — — — — —

$$\text{ఇట్లు తుదివరస గో} = \left\{\text{యా} + (\text{వ} - 1)\right\}\text{వ} = \text{యావ} + \left\{(\text{వ} - 1)\text{వ}\right\}$$

$$\therefore \text{గోలరాశి} = \text{యా} + \text{యా}\ 2 + \text{యా}\ 3 \ldots\ldots\ldots + \text{యావ}$$

$$+ (2 \times 1) + (3 \times 2) + (4 \times 3) \ldots (\text{వ} - 1)\ \text{వ}$$

ఇందు $\text{యా}(1 + 2 + 3 \ldots \text{వ}) = \text{యా} \times \frac{(\text{వ}+1)\text{వ}}{2}$ (136 ప్ర. చూ)

ఇచట వ=పద ఇట్లు $\text{వ}\ (\text{వ} - 1) = \text{వ}^2 - \text{వ}$ కావున

$$(2 \times 1) + (3 \times 2) + (4 \times 3) \ldots\ldots + \text{వ}\ (\text{వ} - 1)$$

$$= (2^2 - 2) + (3^2 - 3) + (4^2 - 3) \ldots\ldots + (\text{వ}^2 - \text{వ})$$

$$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \ldots\ldots + \text{వ}^2) - (1 + 2 + 3 + 3 \ldots\ldots \text{వ})$$

$$= (137\ \text{ప్ర.}\ 136\ \text{ప్ర. చే}) \left\{\frac{2\text{వ}+1}{3} \times \frac{(\text{వ}+1)\text{వ}}{2}\right\} - \left\{\frac{(\text{వ}+1)\text{వ}}{2}\right\}$$

$$\therefore \text{గోలరాశి} = \text{యా} \times \frac{(\text{వ}+1)\text{వ}}{2} + \left\{\frac{2\text{వ}+1}{3} \times \frac{(\text{వ}+1)\text{వ}}{2}\right\} - \left\{\frac{(\text{వ}+1)\text{వ}}{2}\right\}$$

$$= \frac{(\text{వ}+1)\text{వ}}{2} \times \left\{\text{యా} + \frac{2\text{వ}+1}{3}\right\} - \left\{\frac{(\text{వ}+1)\text{వ}}{2}\right\}$$

$$= \frac{(\text{వ}+1)\text{వ}}{2} \times \left\{\frac{\text{యా}3 \times 2\text{వ}+1}{3} - 1\right\}$$

$$= \frac{(\text{వ}+1)\text{వ}}{2} \times \left(\frac{\text{యా}\ 3 + 2\ \text{వ} - 2}{3}\right)$$

$$= \text{వ.సం} \times \frac{2(\text{యా} + \text{వ} - 1) + \text{యా}}{3} = \text{గోలరాశి}$$

దీనింబట్టి ఆయతక్షేత్రమందలి గోలరాశియొక్క శిఖరగోలసంఖ్యాయందు వరససంఖ్యనుకలిపి అందు 1టిని వ్యవకలించి 2 చే గుణించి అందుశిఖరగోల సంఖ్యనుకలిపి 3చే భాగించి వరసంఖ్యాకైన సంకలితముచేగుణింప గోలరాశియగు నని తెలియుచున్నది.

ఉదా: శిఖరరాశి 6 వరసలు 5 గోలరాశియెంత ?

$$\text{పైపద్ధతిచే} \frac{2(6 + 5 - 1) + 6}{3} \times \frac{(5+1)5}{2} = \text{గోలరాశి}$$

$$= \frac{2 \times 10 + 6}{3} \times \frac{6 \times 5}{2} = \frac{26 \times 6 \times 5}{3 \times 2} = 26 \times 5 = 130\ \text{గోలరాశి}$$

ఇందు మొదటివరస 6, రెండవవరస 14, మూడవవరస 24, నాలవవరస36, ఐదవవరస 50, మొత్తము 130 ఆగుచున్నది.

శ్రేఢీవ్యవహారము 14 ప్రకరణము
సమాప్తము.

---

15 వ ప్రకరణము.

క్షేత్రవ్యవహారము.

149. ప్ర. క్షేత్రవ్యవహారమునందుపయోగించు కొన్ని ముఖ్యములగు రేఖాగణితపరిభాషలు ఈదిగువ వ్రాయబడుచున్నవి.

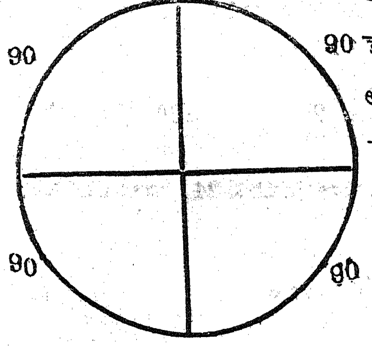
ప (1) వెడలుపున్ను పొడవున్ను లేనిదియు విభజించుటకు అర్హముగానిదియు నగు పదార్థము బిందువు అనిచెప్పబడును. . ఇదిబిందువు.

ప (2) పొడవుమాత్రమేగలిగి వెడలుపులేనిది రేఖ లేఖ గీటు. — ఇది రేఖ. ఈరేఖ బిందువులయొక్కచాలు (పంక్తి)యగుచున్నది. కావున రేఖయొక్క కొనలు బిందురూపములు. ఈరేఖ సరలరేఖ యనియు వక్రరేఖయనియు రెండు విధములు.

(3) వెడలుపున్ను పొడవున్నుగలది భూతలము (లేక,ధరాతలము) అని చెప్పబడును. ధరాతలముయొక్క ప్రాంతభాగములు రేఖారూపములై యుండును.

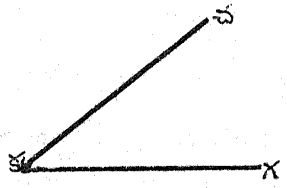
(4) అట్లు సరలములుగాని వక్రములుగానియైన రేఖారూపములగు ప్రాంతభాగములు (అవధులు లేక హద్దులు) గల భూతలము క్షేత్రమని చెప్పబడును.

(5) ఏక్షేత్రమునందు మధ్యయందలి బిందువునకు సమమైనదూరమందుండెడురేఖ చుట్టును ఆవరించియున్నదో ఆక్షేత్రము వృత్తక్షేత్రము. అందలి ఆబిందువునకు కేంద్రమని పేరు. ఆకేంద్రమునకు సమదూరమున నావరించియున్న రేఖ పరిధి.



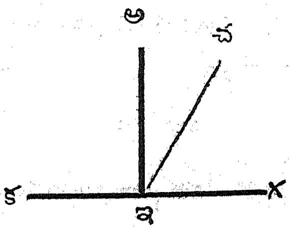
ఆపరిధియందలి ఒకబిందువునుండి బయలువెడలి కేంద్రముమీదుగావెళ్లి పరిధితో కలసిన సరలరేఖ ఆవృత్తమునకు వ్యాసమని చెప్పబడును. ఆవ్యాస రేఖయందు కేంద్రమునుండి పరిధియందలి ఒకానొకబిందువువరకునైన ఖండము అనగా ఆవ్యాస రేఖయొక్క సగభాగము వ్యాసార్ధమనియు త్రిజ్యయనియు చెప్పబడును. ఏవ్యాసమైనను ఆవృత్తక్షేత్రమును రెండు సమభాగములుగ విభజించును. ఈచూపబడిన వృత్తక్షేత్రచిత్రమునందు తూర్పుపడమర దిక్కులుగ బోవు నొకవ్యాసరేఖయు దక్షిణోత్తరములుగబోవు వ్యాసరేఖయు రెండు చూపబడియున్నవి. ఆరెండిటియొక్కయు సంయోగబిందువు కేంద్రము. కావున నొకవృత్తక్షేత్రమందలి వ్యాసరేఖలకన్నిటికిని కేంద్రమునందు సమానమగుచున్నది. మరియు వైస్పృత్తక్షేత్రమునందు చక్రాకారముగ నుండురేఖయే పరిధియని చెప్పబడును. ఈపరిధిరేఖ కేంద్రమునుండి ఎటుచూచినను సమదూరమునన్నది. ఆవ్యాసరేఖచే వృత్తక్షేత్రము ఇరువైపులనుండు రెండుఖండములుగ విభజింపబడుచున్నది. అట్టి వృత్తక్షేత్రఖండములు అర్ధవృత్తమని చెప్పబడును. ప్రతివృత్తక్షేత్రమునను పరిధి 360 సమభాగములుగ విభజింపబడినచో నైన ఆభాగములు భాగలని చెప్పబడుచున్నవి. ఆభాగలు అర్ధవృత్తమునందు 180 భాగలును వృత్తచతుర్థాంశమునందు 90 భాగలును పరిధియందుండును.

(6) ఒకధరాతలమందు రెండురేఖల కలయికచే నగు సూదిమొనవంటి ప్రదేశము కోణమని చెప్పబడును. 'చ' అనుస్థానము నుండి బయల్వెడలిన 'చ' రేఖయు 'గ' స్థానమునుండి బయల్వెడలిన 'గ' రేఖయు క బిందువునందు కలియుటచే ఆవైపున సన్నముగ సూదిమొనవలెనుండు ప్రదేశము కోణమని చెప్పబడును. ఈకోణమును చకగ కోణమనియు గకచ కోణమనియును వ్యవహరించు



చున్నారు. ఇందు చ రేఖయు గ రేఖయు గకచ కోణమునకు ఉత్పాదకములగుటచే గకచ కోణోత్పాదకరేఖలని చెప్పబడును. ఈ గకచ కోణమును క కోణమనియును వ్యవహరింపవచ్చును.

(7) ఒకసరలరేఖయందు మరియొకసరలరేఖయొక్క పడుటచే ఆఆధార రేఖయొక్క ఒకవైపునసైన కోణములు రెండును పరస్పరము సమానములగుచో ఆకోణములు సమకోణములని చెప్పబడును. అట్లు సరలరేఖయందు ఏరేఖయొక్క పతనముచే కోణములైనవో ఆపతితరేఖ ప్రథమరేఖయందు లంబమని చెప్పబడును. ఇందు కగ సరలరేఖయందు అఇ రేఖ ఇ బిందుప్రదేశమునకలియుచున్నది. అట్లు కలియుటచేనైన అఇక కోణమున్ను అఇగ కోణమున్ను పరస్పరము సమములగుటచే అఇ రేఖ కగ రేఖయందు లంబరేఖ యగుచున్నది. కావుననే అఇక, అఇగ కోణములు సమకోణములని చెప్పబడును. అటు కగ రేఖయందు ఇ బిందువునందు చఇ రేఖయొక్క కలయికచే, చఇక కోణమున్ను చఇగ కోణమున్ను గలుగుచున్నవి. ఇవిరెండును పరస్పరము సమములు గాక, ఒకటిపెద్దదియు నొకటి చిన్నదియు నగుటచే నివి సమకోణములు కానేరవు. చఇ రేఖయు లంబరేఖ కానేరదు. అందు చఇకకోణము సమకోణముకంటె పెద్దదియగుటచే అధికకోణమని చెప్పబడును. చఇగ కోణము సమకోణముకంటె చిన్నదియగుటచే అల్పకోణమని చెప్పబడును. అట్లు అఇచ కోణమున్ను అల్పకోణమనియే చెప్పబడును.



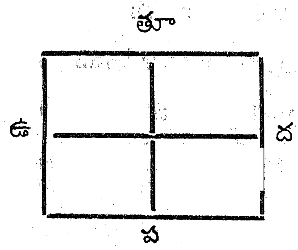
దీనిని ఇట్లు గ్రహింపవచ్చును.

ఇదివరలో చూపిన వృత్తక్షేత్రము (5 ప్ర. చూ) నందు పూర్వాపర వ్యాసమునందు దక్షిణోత్తరవ్యాసరేఖయొక్క కలియుటచే కేంద్రమునందు 4 కోణము లుత్పన్నములగుచున్నవి. అందుఒకవైపునందలి రెండుకోణములు పరస్పరము సమములగుచున్నవి. అట్లుసమములగుటచేతనే పూర్వాపరవ్యాసమందు దక్షిణోత్తరవ్యాసము లంబరూపమగుచున్నది. దీనింబట్టి కోణబిందువునందు కర్కటయంత్రము (కంపాను) యొక్క ఒకముల్లునునిచి ఇష్టవ్యాసార్థముచే రెండవముల్లును త్రిప్పుటచేనైన వృత్తముయొక్కపరిధి చతుర్థాంశము (90భాగలు

ఆకోణోత్పాదక రేఖలయొక్క మధ్యభాగమైనచో ఆకోణము సమకోణమగుచున్నది యని తెలియదగియున్నది. కోణోత్పాదకరేఖలలో ఒకరేఖనుండి మరియొకరేఖవరకునైన దూరము అవృత్తమునందు 90 భాగలకంటె అధికమగుచో అధికకోణమనియు అల్పమగుచో అల్పకోణమనియు గ్రహింపదగినది.

ఇట్లు కోణముయొక్క అల్పత్వాధికత్వసమత్వములు 180 భాగములచే చిహ్నితమైన అర్ధవృత్తముచే తెలియనగును. ఆఅర్ధవృత్తముయొక్క కేంద్రము కోణబిందువునందుండునట్లునిచి కోణోత్పాదకరేఖల యంతరభాగల నెరుంగుట సులభమగుపద్ధతి.(ఈ అర్ధవృత్తమే పెద్దదియై దూరదర్శిన్యాద్యుపకరణసహాయము గలదియగుచో ఎట్టికోణమునైనను సూక్ష్మముగ వేధింపవచ్చును. ఇది కోణ మాపకయంత్రము)

సర్వసాధారణముగ భూములను కొలుచునపుడు సమకోణమగుటయు కాక పోవుటయు తెలియుటచే క్రియానిర్వాహము గాగలదు. అది లంబజ్ఞాపకము (క్రాస్టాపు) చేతనే తెలియుచున్నది.



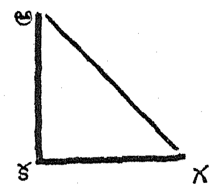
కర్ర మొదలగువాటిచే చేయబడిన సమచతురమగు బిళ్లయందు మధ్యభాగమునందు తూర్పునుండి పడమరకును, ఉత్తరమునుండి దక్షిణమునకును,ఉండునట్లుగంపముచే కోయబడిన రెండుగాళ్లు గలిగినట్లు తయారుచేయబడిన పదార్థముయొక్క చిత్రము ఇచట చూపబడినది. ఇందు ఒకగాడియందు, రెండవగాడి లంబరూపమగుచున్నది. ఈబిళ్ల ఒకతిన్ననిఊచ (లేక కఱ్ఱ) యొక్క పైభాగమున అమర్చబడుచున్నది. ఇదియే లంబజ్ఞాపకము (క్రాస్టాపు) అని చెప్పబడుచున్నది. ఈ లంబజ్ఞాపకమును పైనచూపిన క్షేత్రమునందు ఇ బిందువునందునిచి ఒకగాడిని, క గ రేఖగ త్రిప్పితి మనుకొనుము. అనగా క బిందువు వైపుననిలబడి ఆగాడినుండి చూచినచో గ బిందువువైపుననున్న జెండాగాని మనుష్యుడుగాని కనుపింపవలయును. అట్లు గ బిందువువైపునుండి చూచినచో క బిందువువైపుననున్న వ్యక్తి కనుపింపవలయును. అపుడు ఆగాడి క గ రేఖకు తిన్నగనున్నది యగుచున్నది. పిమ్మట మరియొకగాడినుండి అ బిందువువైపున

నున్న వ్యక్తి కనుపించునట్లు చూడుము. అట్లుచూడగా అ బిందువు కనుపించెనేని అ ఇ రేఖ క గ రేఖయందు లంబరూపమని తెలియును. ఇట్లు లంబజ్ఞానము సుఖముగ గలుగుచున్నది. దానిచే నాకోణము సమకోణమైనదియు కానిదియు తెలియును. అట్లు కోణపరిమాణము తెలియకపోయినను సమకోణము కంటె అల్పమైనదియు అధికమైనదియు తెలిసికొనవచ్చును.

(8) సరలరేఖలచేనైన క్షేత్రము బుజాభుజక్షేత్రము. ఆక్షేత్రమునందు ప్రాంతభాగములు (లేక అంచులు)గ నున్న సరలరేఖలు భుజములని చెప్పబడును.

(9) మూడుభుజములుగలక్షేత్రము త్రిభుజము, నాల్గుభుజములుగలది చతుర్భుజము. ఇట్లెన్నిభుజములున్న ఆసంఖ్యనుచెప్పు శబ్దము పూర్వమందుగల భుజ శబ్దముచే ఆక్షేత్రము చెప్పబడును.

(10) త్రిభుజక్షేత్రమునందు ఒకకోణము సమకోణమగుచో నాక్షేత్రము జాత్యక్షేత్రమని చెప్పబడును. అందు సమకోణమునకు సమ్ముఖమునందుండు భుజమునకు కర్ణమని పేరు. తక్కిన రెండిటిలో ఒకటిభుజయనియు రెండవది కోటి యనియు చెప్పబడును. అగ కర్ణము. కగ భుజ. అక కోటి, అకగ కోణము సమకోణము.



(11) జాత్యముకంటె నితరములగు త్రిభుజములన్నియు త్రిభుజములనియే చెప్పబడును. అందు 3 భుజములు సమములగుచో సమభుజత్రిభుజమనియు రెండుపరస్పరముసమములై ఒకటి విషమమగుచోసమద్విబాహుకత్రిభుజమనియు, మూడును పరస్పరవిషమములగుచో విషమత్రిభుజమనియు చెప్పబడుచున్నవి. అందు ఒకకోణము ఊర్ధ్వముగ నుండిన ట్లుంచబడిన త్రిభుజములకు ఆ ఊర్ధ్వ కోణము శీర్షకోణమనియు శీర్షకోణాభిముఖభుజము ఆధారము (లేకభూమి) అనియు తక్కినభుజములు బాహువులనియు చెప్పబడును.

(12) ఒకకోణము సమకోణముకంటె నధికమగుచో నాత్రిభుజ మధిక కోణత్రిభుజము. మూడును సమకోణముకంటె తక్కువయుండుచో, నదిఅల్పకోణ త్రిభుజము.

(13) నాలుగుభుజములును సమానములై సమకోణములుగల చతుర్భుజము వర్గక్షేత్రము.

(14) కోణములు సమకోణములై అభిముఖభుజలుపరస్పరతుల్యములగుచో నాచతుర్భుజము ఆయతము. ఈచతుర్భుజములందును క్రిందిభుజముఆధారమనియు, భూమియనియు చెప్పబడును. పైభుజము ముఖమనియు, ప్రక్కనున్న భుజములు భుజములనియు చెప్పబడును. అన్నిచతుర్భుజములందును ఒకకోణమునుండి దానికభిముఖకోణమువరకునుతీయబడిన సరలరేఖ కర్ణమని చెప్పబడును.

(15) నాల్గుభుజములును సమములై అభిముఖకోణములుమాత్రమే తుల్యములగుచో నాచతుర్భుజము సమభుజచతుర్భుజము.

(16) ఏచతుర్భుజముయొక్కకోణములు నాలుగును ఆక్షేత్రమునందు కల్పింపబడిన కేంద్రమునుండి చేయబడిన వృత్తపరిధిని స్పృశించునో ఆచతుర్భుజము వృత్తాంతర్గతచతుర్భుజము. తక్కినపరిభాషలు ఆయాప్రదేశములందు అవసరమునుబట్టి వివరింపబడును.

అథ క్షేత్రవ్యవహారః

తత్రభుజకోటిస్వరూపం

ఇష్టోబాహు ర్యస్స్యాత్తత్స్పర్ధిన్యాం దిశీతరో బాహుః।
త్ర్యస్రే చతురస్రే వా సాకోటిఃకీర్తితా తజ్జ్ఞైః॥ ౬౭॥

టీ॥ యః = ఏ, ఇష్టః=ఇష్టమైనది, బాహుః=భుజము, స్యాత్ =అగునో, తత్స్పర్ధిన్యాం = ఆభుజమునకెదురుగ (ప్రతికూలముగ)నున్న, దిశి = దిక్కునందు, ఇతరః =రెండవదియగు, బాహుః=భుజము (ఉండును) సా=ఆమరియొక భుజ, తజ్జ్ఞైః = క్షేత్రగణితజ్ఞులచే, త్ర్యస్రే = త్రిభుజక్షేత్రమందుగాని, చతురస్రే వా=చతుర్భుజక్షేత్రమందుగాని, కోటిః=కోటియని,కీర్తితా=చెప్పబడినది.

తా॥ జాత్యత్రిభుజమునందు సమకోణమును సంబంధించిన 2భుజములలోను ఏదోయొకటి భుజయగుచో దానియందు లంబరూపముగు రెండవభుజము కోటియని చెప్పబడును. (149 ప్ర. 10 పరి. చూ).

అథ భుజకోటికర్ణానామన్యతమే౽జ్ఞాతే తదవగమాయ కరణసూత్రంవృత్తం.

తత్కృత్యో ర్యోగపదం కర్ణో దోఃకర్ణవర్గయో ర్వివరాత్।
మూలం కోటిః కోటిశ్రుతికృత్యో రంతరాత్పదంబాహుః॥ ౬౬॥

టీ॥ తత్కృత్యోః = ఆభుజకోటివర్గములయొక్క, యోగపదం = యోగముయొక్కమూలము, కర్ణః = కర్ణము. దోఃకర్ణవర్గయోః = భుజయొక్కయు, కర్ణముయొక్కయు, వర్గములయొక్క, వివరాత్ = అంతరమువలన, మూలం = మూలము, కోటిః = కోటియగును. కోటిశ్రుతికృత్యోః = కోటియొక్కయు కర్ణముయొక్కయు, వర్గముయొక్క. వివరాత్ = అంతరములవలన పదం = మూలము, బాహుః = భుజము అగును.

150. ప్ర. తా॥ జాత్యత్రిభుజమునందు భుజవర్గ కోటివర్గముల కలిపి వర్గమూలమును గనుంగొనినచో నాసంఖ్య కర్ణమగును. కర్ణవర్గమువలన భుజవర్గమును వ్యవకలింప ఆశేషమునకైన వర్గమూలము కోటియగును. కర్ణవర్గమువలన కోటివర్గమును వ్యవకలింపనగు శేషమునకైన వర్గమూలము భుజయగును.

అత్రోద్దేశకః.

కోటి శ్చతుష్టయం యత్ర దో స్త్రయం తత్ర కా శ్రుతిః।
కోటిం దోఃకర్ణతః కోటిశ్రుతిభ్యాం చ భుజం వద॥ ౬౫॥

తా॥ కోటి 4, భుజ 3, అచట కర్ణమెంతయుండును? భుజకర్ణములవలన కోటిని చెప్పుము. కోటికర్ణములవలన భుజమును చెప్పుము.

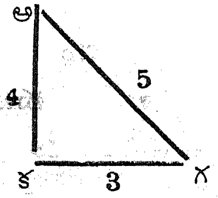
న్యాసః. కోటిః ౪ భుజః 3 భుజవర్గః ౯ కోటివర్గః ౧౬ ఏతయోర్యోగాత్ ౨౫ మూలం ౫ కర్ణోజాతః

అథ కర్ణభుజాభ్యాం కోట్యానయనం

న్యాసః. కర్ణః ౫ భుజః 3 అనయోర్వర్గాంతరం ౧౬ ఏతన్మూలం ౪ కోటిః

అథ కోటికర్ణాభ్యాం భుజానయనం

న్యాసః. కర్ణః ౫ కోటిః ౪ అనయోర్వర్గాంతరం ౯ ఏత న్మూలం ౩ భుజః.



ఈ క్షేత్రమునందు అక = కోటి = 4, కగ = భుజ = 3 అగ = కర్ణము = 5 ఇట్లు భుజకోటికర్ణములు గలవు. ఇందు కర్ణము తెలియనిచో కోటిభుజలచే కర్ణము నెరుంగవచ్చును ఎట్లనగా:—

పైపద్ధతిచే భు^{2} + కో^{2} = క^2

∴ అక^2 + కగ^2 = అగ^2 = $4^2 + 3^2 = 5^2$

కావున కోటి 4 వర్గము 16. భుజ 3 వర్గము 9. రెండిటియొక్కయు యోగము $16 + 9 = 25$ కర్ణవర్గము. కావున 25 యొక్క వర్గమూలము 5 కర్ణమగుచున్నది.

పైక్షేత్రమునందే భుజయును కర్ణమున్ను తెలిసి కోటి తెలియనిచో క^2 — భు^{2} = కో^{2} అగుచున్నది. అనగా అగ^2 — కగ^2 = అక^2 కావున $5^2 - 3^2 = 4^2 = 25 - 9 = 16$ దీనియొక్క మూలము 4 కోటియగుచున్నది.

అట్లు కోటికర్ణములు తెలిసి భుజ తెలియనిచో

క^2 — కో^{2} = భు^{2} ∴ అగ^2 — అక^2 = కగ^2 ∴ $5^2 - 4^2 = 3^2 = 25 - 16 = 9$

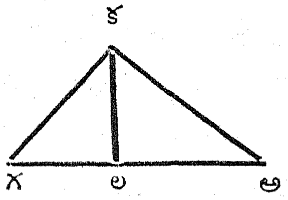
∴ 9 యొక్క వర్గమూలము 3 భుజ యగుచున్నది.

వివరము:— సామాన్యముగ భూములనుకొలుచునపుడు ఒకప్రదేశము దుర్గమమై నిడివికొలుచుటకు వీలులేనిదగుచో ఆప్రదేశముయొక్క నిడివిని ఎట నుండి ఎచటివరకు కొలవవలయునో ఆ రెండుస్థానములందును జండా మొదలగు దూరమునుంచి చూడగగినగుర్తుల నునిచి అనిడివికే ఏదోఒకవైపున లంబజ్ఞాపకము (క్రాస్టాపును)ను నిలుపుము. పిమ్మట ఆలంబజ్ఞాపకముయొక్క రెండుగాళ్ళనుండియు రెండుజండాలును కనుపించునట్లు లంబజ్ఞాపకమును సరిగనుంచి చూడుము అట్లు కనుపింపగనే లంబజ్ఞాపకమునుండి ఒక్కొకజండావరకునైన దూరములను కొలుపుము. ఆదూరములను ఒకటిభుజగను, రెండవది కోటిగను భావించి, వాటివర్గమూలములను కలిపి దానిమూలమును గనుగొనుము. అది కర్ణముగ తెలియును.

ఆవర్గమూలము (కర్ణము) ఆజండాలయొక్క మధ్యయందలి నిడివి యగును. ఇట్లు లంబజ్ఞాపకసహాయముచే దుర్గమప్రదేశమును భుజగగాని, కోటిగగాని, కర్ణముగగాని కల్పించి, తదితరభుజములను కొలచుటచే దుర్గమప్రదేశముయొక్క నిడివి నెరుంగ వచ్చును. ఆదుర్గమప్రదేశమును భుజగ కల్పించినచో, కర్ణకోటులకొలిచి వాటి వర్గాంతరములమూలమునున్ను, కోటిగ కల్పించినచో కర్ణభుజలకొలచి వాటివర్గాంతరములమూలమునున్ను, నిడివిగ తెలిసికొనుము. ఇట్లు కొలవతగనిప్రదేశమును గణితముచే నెరుంగుటకు సామాన్యముగ నీపద్ధతియే విశేషోపకారము గాగలదు. వాటి యుదాహరణములను విస్తరభీతిచే చూపలేదు.

పైపద్ధతియొక్క ఉపపత్తి :—

రేఖాగణిత ప్రథమాధ్యాయము (47 ప్రతిజ్ఞ)న బహుప్రకారములచే దీని యుపపత్తి చెప్పబడియున్నది. విస్తరభీతిచే వాటిని ఇచట చూపదలచలేదు. భాస్కరాచార్యులు బీజగణితమందు చూపిన పద్ధతి చూపబడుచున్నది.



పై ఉదాహరణమునందు చూపబడిన క్షేత్రము ఇచట త్రిప్పిచూపబడినది. అందు కర్ణము ఇందు ఆధారముగ అచటిసమకోణము శీర్షకోణముగనున్నది. 'క' శీర్షకోణమునుండి 'గఅ' ఆధారమునందు 'కల' లంబము చేసితిమనుకొనుము. ఇప్పుడు పెద్దజాత్యత్రిభుజమునందు రెండు చిన్నజాత్యత్రిభుజము లైనవి (రేఖాగణితము 6 అధ్యాయము. 8 ప్రతిజ్ఞచే) పరస్పరసాజాత్యముచే త్రైరాశికముల చేయగా

అగ కర్ణము అగుచో, కగ భుజ, కగ కర్ణమగుచో గల భుజ.

కావున, $\frac{\text{కగ} \times \text{కగ}}{\text{అగ}}$ = గల అగుచున్నది.

ఇట్లు అగ కర్ణమగుచో, అక కోటి, అక కోటియగుచో అల కోటి.

కావున, $\frac{\text{అక} \times \text{అక}}{\text{అగ}}$ = అల అగుచున్నది.

అపుడు అగ = అల + గల ∴ $\frac{\text{కగ} \times \text{కగ}}{\text{అగ}} + \frac{\text{అక} \times \text{అక}}{\text{అగ}}$ = అగ

సమచ్ఛేదములుగ చేసి ఛేదములను విడువగా

$$\frac{(\text{కగ} \times \text{కగ}) + (\text{అక} \times \text{అక})}{\text{అగ}} = \frac{\text{అగ} \times \text{అగ}}{\text{అగ}}$$

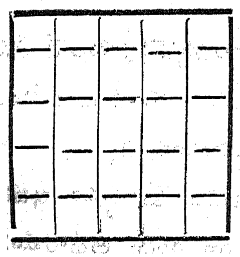
$\therefore \text{కగ}^2 + \text{అక}^2 = \text{అగ}^2$ అనగా $\text{భు}^2 + \text{కో}^2 = \text{క}^2$ అగుచున్నది.

$\therefore \sqrt{\text{కగ}^2 + \text{అక}^2} = \sqrt{\text{భు}^2 + \text{కో}^2} = \sqrt{\text{కర్ణ}^2} = \sqrt{\text{అగ}^2} = \text{కర్ణ}$

$\because \text{భు}^2 + \text{కో}^2 = \text{క}^2 \therefore \text{భు}^2 = \text{క}^2 - \text{కో}^2$ ఇట్లు $\text{కో}^2 = \text{క}^2 - \text{భు}^2$

ఈప్రకారము పద్ధతియంతయు ఉపపన్న మగుచున్నది.

రుజువు : వర్గము సమచతురశ్రమని ఇదివరలో సూచింపబడెను. అనగా పొడవును వెడలుపున్ను సమానముగాగల చతురపుప్రదేశము (13 పరి. 149 ప్ర. చూ) ఇచట 5యొక్క వర్గక్షేత్రము చూపబడినది. ఇది 5 అంగుళములు పొడవును 5 అంగుళములు వెడల్పున్ను గలప్రదేశ మనుకొనుము. ఇందు 25 గళ్ళు అగుపడుచున్నవి. ఒకొక్కగడి ఒక అంగుళమువెడల్పును అంతియపొడవును గలిగియున్నవి. ఇదియే చతురపు అంగుళమని చెప్పబడును. మొత్తము ప్రదేశమునందు 25 చతురపు అంగుళము లున్నవని తెలియుచున్నది. ఇందు ఒక మూలనుండి నిలువుగను అడ్డముగను 3డేసి అంగుళములకు తరువాత ఒక్కొకగుర్తుంచుము. ఆగుర్తులనుండి నిలువుగను అడ్డముగను చేయబడిన గీటులు కలియు ప్రదేశమును గుర్తింపుము. ఈగీటులలకు మధ్యయందలి ప్రదేశమునందు 3యొక్క వర్గము 9 చతురపు అంగుళము లుండును. ఇట్లు నాలుగుఅంగుళములవరకును గుర్తింపుచో 16 చతురపుఅంగుళము లుండును. 16 చతురపుఅంగుళములయొక్కయు 9 చతురపుఅంగుళములయొక్కయు యోగము 25 చతురపుఅంగుళములనుట ఇందు స్పష్టముగ గానవగును. ఇట్లు 5 అంగుళములువెడల్పు 5 అంగుళములు పొడవునుగల ప్రదేశమునందు ఎన్ని చతురపుఅంగుళము లుండును? అను ప్రశ్నమునందు 25 చతురపుఅంగుళములు అని ప్రత్యుత్తరము అగుచున్నది. ఈ 5 అంగుళము లనుకొనినట్లు గజములనుకొనుచో చతురముగజములగును. లింకులనుకొనుచో చతురపులింకులగును. ఇట్లు వెడల్పు పొడవు ఏమానముచేనగునో చతురము ఆమానముచేనగును. దీనినే భాస్కరాచార్యులు ఫలమనియు గణితమనియు



వ్యవహరించియున్నారు. ప్రకృతము విరియాయసియు, చతురమనియు వ్యవహరింపబడుచున్నది.

ప్రకారాంతరేణ తజ్జ్ఞానాయకరణసూత్రం సార్ధవృత్తం

రాశ్యో రంతరవర్గేణ ద్విఘ్నే ఘాతే యుతే తయోః।
వర్గయోగో భవే దేవం తయో ర్యోగాంతరాహతిః॥ ౬౭॥
వర్గాంతరం భవే దేవం జ్ఞేయం సర్వత్ర ధీమతా॥ ౬౭½॥

టీ॥ రాశ్యోః = రెండురాసులయొక్క, ఘాతే = గుణనము, ద్విఘ్నే = రెండుచే గుణింపబడినదై, అంతరవర్గేణ = రాశ్యంతరవర్గముతో, యుతే = కలుపబడినదై, తయోః = ఆరాసులయొక్క, వర్గయోగః = వర్గయోగము, భవేత్ = అగును.

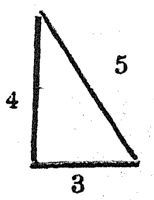
ఏవం = ఈప్రకారముగ, తయోః = ఆరాసులయొక్క యోగాంతరాహతిః = యోగముయొక్కయు అంతరముయొక్కయు గుణనము, వర్గాంతరం = వర్గములయంతరము, భవేత్ = అగును. ఏవం = ఈప్రకారము, ధీమతా = బుద్ధిమంతునిచే, సర్వత్ర = అంతట, జ్ఞేయం = తెలియదగినది.

151. ప్ర. ఏరెండురాసులకు వర్గయోగముచేయవలయునో ఆరెండురాసులను పరస్పరముగుణించి, రెండుచే గుణింపుము. అందుఆరాసులకు అంతరమును గనుగొని, ఆఅంతరముయొక్కవర్గమును కలుపుము. ఇది వర్గయోగమగును.

రెండురాసులకు వర్గాంతరము కావలసినచో రాశియోగమును రాశ్యంతరముచే గుణింపుము. వర్గాంతరమగును. (104 ప్ర. 106 ప్ర. చూ)

ఉపపత్తి: $(\text{యా} + \text{కా}) \times (\text{యా} - \text{కా}) = (\text{యా}^2 - \text{కా}^2)$ ఇది వర్గాంతరోపపత్తి. $(\text{యా} - \text{కా})^2 = \text{యా}^2 + \text{కా}^2 - 2\,\text{యా}\,\text{కా}$ అగుచున్నది.

ఇందు 2 యా కా కలిపినచో $\text{యా}^2 + \text{కా}^2$ ఈవర్గయోగమే మిగులుచున్నది. ఇది వర్గయోగోపపత్తి.



న్యాసః. కోటిశ్చతుష్టయమితి పూర్వోక్తోదాహరణే కోటిః ౪ భుజః 3 అనయోర్ఘాతేన ౧౨ ద్విఘ్నే ౨౪ అంతరవర్గేణ ౧ యుతే వర్గయోగః ౨౫ అస్యమూలం ౫ కర్ణః। అథ కర్ణభుజాభ్యాం కోట్యానయనం,

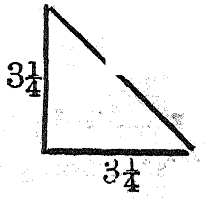
న్యాసః. కర్ణః ౫ భుజః 3 అనయోర్యోగః ౮ పునరేతయోరంతరేణ ౨ హతో వర్గాంతరం ౧౬ అస్యమూలం ౪ కోటిః— అథభుజజ్ఞానం — కోటిః ౪ కర్ణః ౫ ఏవం జాతో భుజః 3.

భుజకోటులు తెలిసి కర్ణము తెలియనిచో కోటి 4 భుజ 3. వీటిగుణనము 12 దీనిని 2చే గుణింప 24. ఇందు కోటిభుజాంతరము 5—4=1. దీనియొక్క వర్గము 1 టిని కలుప 25 కర్ణవర్గమగును. దీనిమూలము 5 కర్ణము. ఇట్లు భుజకర్ణములు తెలిసి కోటి తెలియనిచో రాశియోగము 5+3=8 రాశ్యంతరము 5—3=2 చే గుణింప 8×2=16 దీనివర్గమూలము 4 కోటి. ఇట్లు (5+4)×(5—4) =9 దీనిమూలము భుజయగుచున్నది.

ఉదాహరణమ్.

సాంఘ్రిత్రయమితో బాహుర్యత్ర కోటిశ్చ తావతీ।
తత్ర కర్ణప్రమాణం కిం గణక బ్రూహి మే ద్రుతమ్॥ ౬౬॥

తా॥ భుజ $3\frac{1}{4}$ ఉన్నది. కోటియు $3\frac{1}{4}$ అంతయే యున్నది. ఆ క్షేత్రము నందు గణకుడా! కర్ణమెంతయగును? నాకు శీఘ్రముగ చెప్పుము.



న్యాసః భుజః $\frac{౧౩}{౪}$ కోటిః $\frac{౧౩}{౪}$ అనయోర్వర్గయోగః $\frac{౧౬౯}{౮}$ అస్యమూలాభావాత్ కరణీగతఏవాయం కర్ణః.

ఇచట $\frac{13}{4}$ భుజ, కోటియు $\frac{13}{4}$, ఈరెండింటియొక్కయు వర్గయోగము.

$\left(\frac{13}{4}\right)^2+\left(\frac{13}{4}\right)^2=\frac{169}{16}+\frac{169}{16}=\frac{338}{16}=\frac{169}{8}$ ఈసంఖ్యయొక్క వర్గమూలము లభింపదు. దీనివర్గమూలమే కర్ణమగును. అనగా ఈసంఖ్యకు రేఖాత్మక వర్గమూలము గలదు. అంకాత్మకవర్గమూలము లభింపదు. కావున ఆసన్నమూలమునుగనుగొనవలయును. ఇట్లు వర్గమూలము లభింపని వర్గమూలముకావలసిన సంఖ్య కరణియనిచెప్పబడును. అనగా, క $\frac{169}{16}=\sqrt{\frac{169}{8}}$ అని యర్థము గ్రహింపదగియున్నది. (ఆసన్నమూలమునకు 8 ప్ర. చూడుము.)

అస్యాసన్నమూలజ్ఞానార్థముపాయః కరణసూత్రమ్.

152ప్ర. వర్గేణ మహతేష్టేన హతాచ్ఛేదాంశయోర్వధాత్।
పదం గుణపదక్షుణ్ణచ్ఛిద్భక్తం నికటం భవేత్॥ ౬౮ $\frac{౧}{౨}$

అయంకర్ణవర్గః $\frac{౧౬౯}{౮}$ అస్యచ్ఛేదాంశఘాతః ౧౩౫౨ అయుతఘ్నః ౧౩౫౨౦౦౦౦ అస్యాసన్నమూలం ౩౬౭౭ ఇదంగుణమూల ౧౦౦ గుణితచ్ఛేదేన ౮౦౦ భక్తం లబ్ధమాసన్న పదమ్ ౪ $\frac{౪౭౭}{౮౦౦}$ అయంకర్ణః ఏవంసర్వత్ర.

టీ॥ ఇష్టేన = అభీష్టమగు, మహతా = పెద్దదియగు, వర్గేణ = వర్గముచే, హతాత్ = గుణింపబడిన, ఛేదాంశయోః = హారలవములయొక్క, వధాత్ = గుణనమువలన, పదం = వర్గమూలము, గుణపదక్షుణ్ణచ్ఛిద్భక్తం = గుణకమైన పెద్దవర్గముయొక్కమూలముచే గుణింపబడినహారముచే భాగింపబడినదై, నికటం= నికటమూలము, భవేత్ = అగును. (దీనివివరమునుగూర్చి 81 ప్ర. చూ. అచట వ్రాయబడినది కావున, నిచట వ్రాయబడలేదు.)

ఉదా: కర్ణమునకు కరణీగతమగువర్గము $\frac{169}{8}$ హారముచే లవమునుగుణింప $169\times 8=1352$ దీనిని 100 యొక్క వర్గము 10000 చే గుణింప 13520000 దీని

యొక్క నిరగ్రమూలము 3677, దీనిని హారము 8చే గుణింపబడిన 100 చే భాగింప

$3677 \div 800 = \frac{3677}{800} = 4\frac{477}{800}$ ఇది కర్ణమని తెలియదగియున్నది. దీనిని

దశాంశసంఖ్యలోనికి మార్చినచో 4.596 ఇట్లు అగుచున్నది.

ప్రశ్నములు.

[1] కోటి 400 లింకులు భుజ 300 లింకులు కర్ణమెంత ?

[2] కర్ణము 1000 లింకులు కోటి 800 లింకులు భుజయెంత ?

[3] కర్ణము 1500 లింకులు భుజ 900 లింకులు కోటియెంత ?

[4] ఒకఆయతక్షేత్రమునందు భుజ 600 లింకులు కోటి 800 లింకులు ఉండెను. దానికర్ణమెంతయుండును ?

[5] ఒకవర్గక్షేత్రమునందు భుజప్రమాణము 400 లింకులు. అందలికర్ణములయొక్క ఆసన్నమానమును జెప్పుము.

[6] ఆవర్గక్షేత్రమును కర్ణరేఖచే రెండుభాగములుగచేయుచో ఒక్కొక్క భాగమునందు చతురమెంతయుండును ?

[7] ఒకజాత్యక్షేత్రమునందు కోటి 12 అంగుళములు భుజ 4·7 అంగుళములు. ఆక్షేత్రమునందు కర్ణమెంత ?

[8] ఒకజాత్యక్షేత్రమునందు కర్ణము 1టి యగుచున్నది. అందలి భుజ 0·292372, కోటి యెంతయుండును ?

[9] ఆక్షేత్రమునందు కోటి ·956305 ఉన్నచో భుజయెంత ?

త్ర్యస్రజాత్యే కరణసూత్రం వృత్తద్వయమ్.

ఇష్టోభుజోస్మా ద్ద్విగుణేష్టనిఘ్నా దిష్టస్యకృత్యైకవియుక్తయాప్తం।
కోటిఃపృథక్సేష్టగుణాభుజోనాకర్ణోభవేత్ర్యస్రమిదంహిజాత్యం॥౬౭
ఇష్టోభుజస్తత్కృతిరిష్టభక్తా ద్విస్థాపితేష్టోనయుతార్ధితావా।
తౌకోటికర్ణావితికోటితోవా బాహుశ్రుతీచాకరణీగతేస్తః॥ ౬౮

టీ॥ ఇష్టోభుజః = (ఒక)ఇష్టసంఖ్యభుజ, ద్విగుణేష్టనిఘ్నాత్ = (రెండవ) ఇష్టాంకమునురెట్టించి దానిచేగుణింపబడిన, అస్మాత్ = మొదటిఇష్టాంకమువలన ఏకవియుక్తయా = ఒకటిచే తీసివేయబడిన, అస్యకృత్యా = రెండవఇష్టాంకము యొక్కవర్గముచే. ఆప్తం = భాగింపగావచ్చినలబ్ధము, కోటిః = కోటియగును పృథక్ = వేరుగ(నుంచబడిన) సా = ఆకోటి, ఇష్టగుణా = (రెండవ) ఇష్టాంకముచేగుణింపబడినదియై, భుజోనా = భుజచే తీసివేయబడినదియై, కర్ణః=కర్ణము, భవేత్ = అగును. ఇదం = ఈ త్ర్యస్రం = త్రిభుజము, జాత్యంహి=జాత్యము అగును.

వా = లేక, ఇష్టః = ఇష్టసంఖ్య, భుజః = భుజము. తత్కృతిః = ఆభుజవర్గము, ఇష్టభక్తా = రెండవఇష్టాంకముచే భాగింపబడినదై, ద్విస్థాపితా= రెండుప్రదేశములందుంచబడినదియై, ఇష్టోనయుతా = (రెండవ)ఇష్టాంకముచే, ఒకచో తీసివేయబడినదియు, ఒకచో కలుపబడినదియునై, అర్ధితా = అర్ధింపబడినదైనచో, తౌ = ఆఅర్ధింపగానైన సంఖ్యలు, కోటికర్ణౌ = కోటికర్ణములు. ఇతి= ఈప్రకారము, కోటితఃవా = కోటివలననైనను, అకరణీగతే = కరణీగతములుకాని, బాహుశ్రుతీ = భుజకర్ణములు, స్తః = అగుచున్నది.

133 ప్ర. భుజవర్గముయొక్కయు కర్ణవర్గముయొక్కయు అంతరముయొక్క మూలము కోటియును, కోటివర్గముయొక్కయు కర్ణవర్గముయొక్కయు అంతరముయొక్కమూలము భుజయును, భుజవర్గముయొక్కయు కోటివర్గముయొక్కయు యోగముయొక్కమూలము కర్ణమును, సరియగుసంఖ్యలు (అనగా నిరగ్రమూలసంఖ్యలు లేక ఆసన్నమానసంఖ్యలు కానివి) యగునట్లు జాత్యక్షేత్రమునందలి భుజకోటికర్ణముల కల్పించు మార్గము.

1. రెండు ఇష్టసంఖ్యలను కల్పింపుము. మొదటి ఇష్టసంఖ్యయే భుజము. ఆభుజను ద్విగుణితమైన రెండవయిష్టాంకముచే గుణింపుము. దానిని రెండవయిష్టాంకముయొక్క వర్గమువలన ఒకటితీసివేయగానగు సంఖ్యచే భాగింపగా వచ్చులబ్ధము కోటి. ఆకోటిని రెండవఇష్టాంకముచేగుణించి దానివలన భుజనుతీసివేయనగు శేషము కర్ణము. ఇది జాత్యత్రిభుజ మగును.

2. మొదటిఇష్టసంఖ్య భుజ. ఆభుజవర్గమును రెండవయిష్టాంకముచేభాగించి ఆలబ్ధమువలన ఒకచో రెండవఇష్టసంఖ్యను వ్యవకలింపుము. ఒకచో కలుపుము.

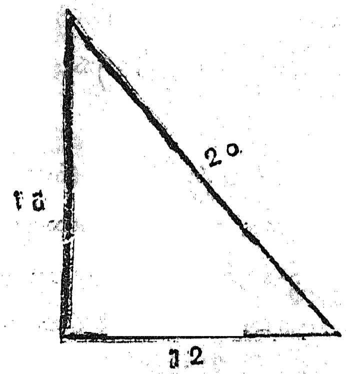
రెండింటినిన్ని అర్ధింపుము. అవి క్రమముగ కోటికర్ణములగును. ఇట్లు కోటివలన నైనను భుజకర్ణము లగును. అనగా వాటివాటి వర్గయోగవర్గాంతరములకు యథా యోగ్యముగ మూలములు లభించును.

ఉదాహరణం.

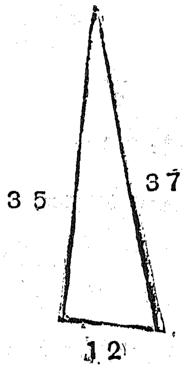
భుజే ద్వాదశకే యౌ యౌ కోటికర్ణా వనేకథా।
ప్రకారాభ్యాం వద క్షిప్రం తౌ తావకరణీగతౌ॥ ౭౫॥

న్యాసః భుజః ౧౨ ఇష్టమ్ ౨ అనేనద్విగుణేన ౪ గుణితో భుజః ౪౮ ఇష్ట ౨ కృత్యా ౪ ఏకోనయా ౩ భక్తో లబ్ధాకోటిః ౧౬ ఇయమిష్టగుణా ౩౨ భుజోనా జాతః కర్ణః ౨౦ త్రికేణేష్టేనవా కోటిః ౯ కర్ణః ౧౫ పంచకేనవా కోటిః ౫ కర్ణః ౧౩ ఇత్యాది॥ అథద్వితీయప్రకారేణ. భుజః ౧౨ అస్యకృతిః ౧౪౪ ఇష్టేనద్వికేన ౨ భక్తాలబ్ధమ్ ౭౨ ఇష్టేన ౨ ఊనం ౭౦ యుతం ౭౪ అర్ధితౌజాతౌకోటికర్ణౌ ౩౫, ౩౭ చతుష్టయేనేష్టేనవా ౧౬, ౨౦ షట్కేనవా ౯ ౧౫.

తా॥ మొదటి ఇష్టాంకము 12 భుజయగుచో అనేకప్రకారములుగ ఏయే కోటికర్ణములగునో ఆయాకోటికర్ణములను కరణీగతములుకానివాటిని శీఘ్రముగ చెప్పుము.



ఇచట12 భుజము అనుకొనుచో. ఇష్టము 2 అగునపుడుఇష్టము 2ను 2చే గుణింప 4 దీనిచే భుజ 12 ను గుణింప 48 దీనిని ఒకటిచేతీసివేయబడిన ఇష్ట 2 వర్గము 4 అనగా 4 — 1 = 3చే భాగింప 16 ఇదికోటి, దీనిని 2చే గుణింప 32 ఇందుభుజనువ్యవకలింప 20 కర్ణము. ఇట్లు 3 ఇష్టసంఖ్యయగుచో అభుజ12వలన కోటికర్ణములు 9, 15అగుచున్నవి. ఇష్టసంఖ్య 4 అగుచో కోటి $\frac{32}{5}$, కర్ణము $\frac{68}{5}$ అగుచున్నవి. ఇష్టసంఖ్య 5 అగుచో కోటి 5 కర్ణము 13 ఇట్లుఇష్టసంఖ్యనబట్టి ఆ 12 భుజమైనప్పుడే కర్ణములు బహువిధములుగ గాగలవు.



(2) ప్రకారము ఇష్టసంఖ్య 2 అగుచో భుజ 12 వర్గము 144 ఇష్టము 2 చే భాగింప 72 ఇష్టముకలుప 74 ఇష్టమును వ్యవకలింప 70 అర్ధింప 37కర్ణము. 35కోటి. ఇట్లు ఇష్టము 4 అగుచో కర్ణము 20 కోటి 16 ఇష్టము 6 అగుచో కోటి 9, కర్ణము15, ఇట్లుఇష్టసంఖ్యనుబట్టి ఒకేభుజయందనేకవిధములగు కోటికర్ణములగును. ఒకటిభుజయనుకొనుచో రెండవదికోటియగును. కాన ఇట్లు కోటివలన ఇష్టసంఖ్యనుబట్టి భుజకర్ణములగును.

(1) ఉపపత్తి: $\text{క} = \text{కో} \times \text{ఇ} - \text{భు}$ ఇట్లు కల్పించినచో

$\text{క}^2 = \text{కో}^2 . \text{ఇ}^2 - 2\, \text{కో}. \text{ఇ}. \text{భు} + \text{భు}^2$ కావున

$$\text{క}^2 - \text{భు}^2 = (\text{కో}^2 . \text{ఇ}^2 - 2\text{కో}. \text{ఇ}. \text{భు} + \text{భు}^2) - \text{భు}^2 = \text{కో}^2 \text{ఇ}^2 - 2\, \text{కో}. \text{ఇ}. \text{భు}$$

$= \text{కో}^2$ రెండుపక్షములను కోటిచేభాగింప $\text{కో}. \text{ఇ}^2 - 2\, \text{ఇ}. \text{భు} = \text{కో}$

$\therefore \text{కో}. \text{ఇ}^2 - \text{కో} = 2\, \text{ఇ}. \text{భు} = \text{కో}(\text{ఇ}^2 - 1) = 2\, \text{ఇ}. \text{భు}$

$\therefore \text{కో} = \frac{2\, \text{ఇ}. \text{భు}}{\text{ఇ}^2 - 1}$ అగుచున్నది.

ఇది మొదటిప్రకారమున కుపపత్తి.

(2) ఉపపత్తి:—భుజ తెలిసినసంఖ్యఅగుటచే ఇష్టసంఖ్య కోటికర్ణాంతరమనుకొనుచో భుజవర్గము రాశిద్వయవర్గాంతరము. ఇష్టసంఖ్య రాశ్యంతరము ఇట్లు రాశిద్వయము తెలియబడును. (104 ప్ర. చూ) ఎట్లనగా:—

వర్గాంతరము $= \text{భు}^2$ రాశ్యంతరం $= \text{ఇ} \therefore \frac{\text{భు}^2}{\text{ఇ}} = \text{యో}$

$$\frac{\text{యో} - \text{ఇ}}{2} = \left(\frac{\text{భు}^2}{\text{ఇ}} - \text{ఇ}\right) \div 2 = \text{కోటి}॥ \frac{\text{యో} + \text{ఇ}}{2} = \left(\frac{\text{భు}^2}{\text{ఇ}} + \text{ఇ}\right) \div 2 = \text{కర్ణము}.$$

అథేష్టకర్ణాత్కోటిభుజానయనే కరణసూత్రం వృత్తం.

ఇష్టేననిఘ్నా ద్ద్విగుణాచ్చకర్ణా దిష్టస్యకృత్యైకయుజా యదాప్తం।
కోటిర్భవే త్సాపృథగిష్టనిఘ్నీతత్కర్ణయోరంతరమత్రబాహుః॥ ౭౬॥

ఇష్టవర్గేణ సైకేన ద్విఘ్నః కర్ణోథవా హృతః।
ఫలోన శ్శ్రవణః కోటిః ఫల మిష్టగుణం భుజః॥ ౭౧

టీ॥ ఇష్టేన = ఇష్టాంకముచే, నిఘ్నాత్ = గుణింపబడినదియు, ద్విగుణాత్ = రెండుచే గుణింపబడినదియునగు, కర్ణాత్ = కర్ణమువలన, ఏకయుజా = ఒకటితో గూడినదగు, ఇష్టస్యకృత్యా = ఇష్టాంకముయొక్క వర్గముచే, యత్ ఆప్తం = (భాగింప) ఎంతలబ్ధమగునో (అది), కోటిః = కోటి, భవేత్ = అగును. సా = ఆకోటి, పృథక్ = వేరుగ, ఇష్టనిఘ్నీ = ఇష్టాంకముచే గుణింపబడినదై (చేయదగినది) తత్కర్ణయోః = ఇష్టగుణితకోటియొక్కయు, కర్ణముయొక్కయు అంతరం = అంతరము, అత్ర = ఈకర్ణముగల క్షేత్రమందు, బాహుః = భుజ.

అథవా = లేక, సైకేన = ఒకటితో గూడిన ఇష్టవర్గేణ = ఇష్టాంకవర్గముచే, ద్విఘ్నః = రెండుచేగుణింపబడిన, కర్ణః = కర్ణము, హృతః = భాగింపబడినదై, చేయదగినది, ఫలోనః = (ఆ)లబ్ధముచేతీసివేయబడిన, శ్రవణః = కర్ణము, కోటిః = కోటి, ఇష్టగుణం = ఇష్టాంకముచే గుణింపబడిన, లబ్ధము, భుజః = భుజ.

154. ప్రి. కర్ణము తెలిసినచో ఇష్టసంఖ్యచే భుజకోటుల నెరుంగుట.

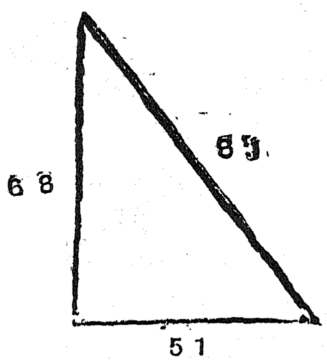
(1) కర్ణమును ఇష్టాంకముచే గుణించి రెండుచే గుణింపుము. దీనిని ఇష్టాంకవర్గమున నొకటినికలిపి ఆసంఖ్యచే భాగింపుము. లబ్ధము కోటి. కోటిని ఇష్టాంకముచే గుణింపనగుసంఖ్యయొక్కయు కర్ణముయొక్కయు అంతరము భుజ.

(2) కర్ణమునురెట్టించి దానిని ఇష్టాంకవర్గమునందొకటి చేర్పవగుసంఖ్యచే భాగింపుము. ఆలబ్ధమును కర్ణమువలన వ్యవకలింప శేషముకోటి. ఆలబ్ధమును ఇష్టాంకముచే గుణింప భుజయు నగును.

ఉదాహరణమ్

పంచాశీతిమితే కర్ణే యా యా వకరణీగతౌ।
స్యాతాం కోటిభుజౌ తౌ తౌ వద కోవిద సత్వరం॥ ౬౮॥

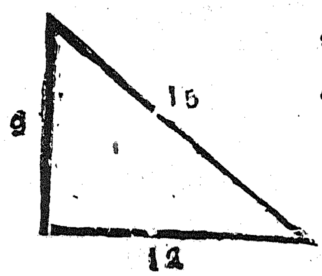
తా॥ కర్ణము 50 యున్నచో కరణీగతములుగాని కోటిభుజములు ఎవ్వెవ్వియగును? ఆయాకోటిభుజములను విద్వాంసుడా! త్వరగ చెప్పుము.



న్యాసః. కర్ణః ౮౫ అయం ద్విగుణః ౧౭౦ ద్వికేనేష్టేనహతః ౩౪౦ ఇష్ట ౨ కృత్వా ౪ సైకయా ౫ భక్తోజాతాకోటిః ౬౮ ఇయమిష్టగుణా ౧౩౬ కర్ణో ౮౫ నితా జాతో భుజః ౫౧ చతుష్కేణేష్టేనవా కోటిః ౪౦ భుజః ౭౫

ద్వితీయప్రకారేణాపి కర్ణః ౮౫ ద్వికేనేష్టేనజాతౌకిలకోటిభుజౌ ౫౧, ౬౮ చతుష్కేణవాకోటిః ౭౫ భుజః ౪౦ అత్ర దోః కోట్యోర్నామభేదఏవ కేవలం న స్వరూపభేదః

(1) కర్ణము 85 దీనిని రెట్టింప 170 ఇష్టాంకమగు 2చే గుణింప **340** ఇష్టాంక 2 వర్గము 4 నందొకటికలిపి 5చే భాగింప 68 కోటి. దీనిని ఇష్టము 2చే గుణింప **136** కర్ణము 85 ను వ్యవకలింప **51** భుజ. ఇష్టాంకము 4 అగుచో కోటి340 భుజ75



(2) ప్రకారము కర్ణము 85 ను రెట్టింప 170 ఇష్టము 2 యొక్క వర్గము 4 నందొకటికలిపి 5 దీనిచే భాగింప 34 లబ్ధము. ఈలబ్ధమును కర్ణము వలన వ్యవకలింప 85 — 34 = 51 కోటి. లబ్ధమును ఇష్టము2చే గుణింప 34 × 2 = 68 భుజ ఇష్టము 4 అగుచో ఆప్రకారము 85 కర్ణమునందు కోటి340 భుజ75 అగుచున్నవి.

కర్ణము15 గల క్షేత్రమునందు ఇష్టము 2 అగునపుడు పై (2)వ ప్రకారము ద్విగుణితకర్ణము 30ను ఇష్టవర్గము 4న నొకటిని చేర్చి 5చే భాగింప 6లబ్ధము. దీనిని కర్ణము 15లో వ్యవకలింప 9 కోటి. లబ్ధము 6ను ఇష్టము 2చే గుణింప భుజ 12 అగుచున్నది.

(1) ఉపపత్తి: ఇ. కో — క = భుజ, కో = కోటి, క = కర్ణ ఇట్లుకల్పింప

$$\text{భుజవర్గ} = \text{ఇ}^2.\text{కో}^2 - 2\ \text{ఇ. కో. క} + \text{క}^2$$

$$\therefore\ \text{కో}^2 = \text{క}2 - \text{భు}2 = -\ \text{ఇ}^2.\text{కో}^2 + 2\ \text{ఇ. కో. క}$$

$\therefore 2\,\text{ఇ}.\text{కో}.\text{క} = \text{కో}^2(\text{ఇ}^2+1)$ పక్షద్వయమును కోటిచేభాగింప $2\,\text{ఇ}.\,\text{క} = \text{కో}(\text{ఇ}^2+1) \;\therefore\; \text{కో} = \frac{2.\,\text{ఇ}.\,\text{క}}{\text{ఇ}^2+1}$ ఇట్లుపపన్నము అగుచున్నది.

(2) ఉపపత్తి: $\text{క} - \text{కో} = \frac{\text{క}\;2}{\text{ఇ}^2+1} = \text{ఫ}$, ఇట్లుకల్పింప $\text{క} - \text{ఫ} = \text{కో}$ అగును. కావున $\text{కో}^2 = \text{క}^2 - 2\text{క}.\text{ఫ} + \text{ఫ}^2 \;\therefore \text{క}^2 - \text{కో}^2 = 2\text{క}.\text{ఫ} - \text{ఫ}^2 = \text{భు}^2$

$\because\; \text{ఫ} = \frac{\text{క}\;2}{\text{ఇ}^2+1} \therefore 2\,\text{క}.\text{ఫ} - \text{ఫ}^2 = \frac{2\text{క}.2\text{క}}{\text{ఇ}^2+1} - \frac{(2\,\text{క})^2}{(\text{ఇ}^2+1)^2} = \text{భు}^2$

$$= \frac{4\,\text{క}^2}{\text{ఇ}^2+1} - \frac{4\text{క}^2}{(\text{ఇ}^2+1)^2} = \frac{4\text{క}^2.\text{ఇ}^2 + 4\text{క}^2 - 4\text{క}^2}{(\text{ఇ}^2+1)^2} = \frac{4\text{క}^2.\text{ఇ}^2}{(\text{ఇ}^2+1)^2} = \text{భు}^2$$

$= \left\{\frac{2\text{క}\text{ఇ}.}{\text{ఇ}^2+1}\right\}^2 = \text{భు}^2 \therefore \text{భు} = \frac{2\text{క}.\text{ఇ}}{\text{ఇ}^2+1} = \frac{2\;\text{క}}{\text{ఇ}^2+1} \times \text{ఇ}$ ఇచట $\frac{2\;\text{క}}{\text{ఇ}^2+1} = \text{ఫ}$, కావున $\text{భు} = \text{ఫ} \times \text{ఇ}$ ఇట్లు ఉపపన్నమగుచున్నది.

అథఇష్టాభ్యాంభుజకోటికర్ణానయనేకరణ సూత్రంవృత్తమ్.

ఇష్టయో రాహతి ర్ద్విఘ్నీ కోటి ర్వర్గాంతరం భుజః।
కృతియోగ స్తయో రేవ కర్ణ శ్చాకరణీగతః॥ ౨౧

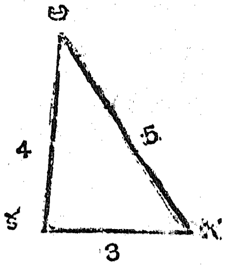
టీ॥ ఇష్టయోః = ఇష్టాంకములయొక్క, ఆహతిః = గుణనము, ద్విఘ్నీ = రెండుచేగుణింపబడినదై, కోటిః = కోటియగును. వర్గాంతరం భుజః = (ఇష్టముల యొక్క) వర్గములఅంతరము భుజ, తయో రేవ = ఆ ఇష్టాంకములయొక్కయే, కృతియోగశ్చ = వర్గయోగమున్ను అకరణీగతః కర్ణః = కరణీగతముకాని కర్ణము.

155. ప్ర. తా॥ రెండుఇష్టాంకములను కల్పింపుము. ఒకదానిచే ఒకదానిని గుణించి రెట్టించిన కోటియగును. ఆ రెండుఇష్టాంకములయొక్కయు వర్గాంతరము భుజయగును. వర్గయోగము కర్ణమగును.

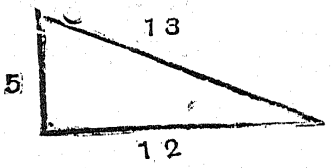
ఉదాహరణం

యైర్యై స్త్ర్యస్రం భవే జ్జాత్యం కోటిదోశ్శ్రవణైః సఖే।
త్రీన వ్యవిదితా నేతాన్ క్షిప్రం బ్రూహి విచక్షణ॥ ౨౦॥

తా॥ మిత్రమా ! విద్వాంసుడా ! ఏయేభుజకోటికర్ణములచే జాత్యత్రస్రములగునో అట్టిభుజకోటికర్ణములను కొన్నిటిని శీఘ్రముగచెప్పుము



న్యాసః అత్రేష్టే ౨, ౧ ఆభ్యాం కోటి భుజకర్ణాః ౪, ౩, ౫ అథవా ఇష్టే ౨, ౩



ఆభ్యాంకోటి భుజకర్ణాః ౧౨, ౫, ౧౩ అథవా ఇష్టే ౨, ౪ ఆభ్యాంకోటిభుజకర్ణాః ౧౬, ౧౨, ౨౦ ఏవమన్యత్రానేకధా.

ఇచట 2, 1 ఇష్టాంకములు కల్పించినచో పైపద్ధతిచే $2 \times 1 \times 2 = 4$ కోటియగును. ఇష్టములవర్గాంతరము $2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$ భుజ అట్లువర్గయోగము $4 + 1 = 5$ కర్ణము. ఇష్టసంఖ్యలు 2, 3 అగుచో ఇష్టములగుణనము $2 \times 3 = 6$. రెట్టింప $6 \times 2 = 12$ కోటి ఇష్టములవర్గాంతరము $9 - 4 = 5$ భుజ, వర్గయోగము $9 + 4 = 13$ కర్ణము. ఇట్లు ఇతరములగు ఇష్టసంఖ్యలందు అనేకములగు కోటిభుజకర్ణములగుచున్నవి.

ఉపపత్తి: యా. కా ఇష్టసంఖ్యలు. $\text{యా}^2 + \text{కా}^2 = \text{కర్ణ}$. $\text{యా}^2 - \text{కా}^2 = \text{భుజ}$. ఇట్లు కల్పింపగా $\text{కో}^2 = \text{క}^2 - \text{భు}^2 = \{(\text{యా}^2+\text{కా}^2)+(\text{యా}^2-\text{కా}^2)\} \times \{(\text{యా}^2+\text{కా}^2)-(\text{యా}^2-\text{కా}^2)\}$ (151 ప్ర. చూ)

$\therefore \text{క}^2 - \text{భు}^2 = 2\,\text{యా}^2 \times 2\text{కా}^2 = 4\,\text{యా}^2.\text{కా}^2 = \text{కో}^2$

$\therefore \text{కో} = 2\,\text{యా}.\,\text{కా}$ అగుచున్నది.

ఇట్లు ఈపద్ధతి యుపపన్నమగుచున్నది.

కర్ణకోటియుతౌ భుజేచ జ్ఞాతే పృథక్కరణాయసూత్రంవృత్తం

వంశాగ్రమూలాంతరభూమివర్గో వంశోద్ధృతస్తేనపృథగ్యుతోనౌ।
వంశౌతదర్ధేభవతః క్రమేణవంశస్యఖండేశ్రుతికోటిరూపే॥ ౨౩

టీ॥ వంశాగ్రమూలాంతరభూమివర్గః = (వంశ = వెదురు) వంశాగ్రమునకును, వంశమూలమునకును మధ్యనున్న భూపరిమితియొక్కవర్గము, వంశోద్ధృతః =

వంశప్రమాణముచే భాగింపబడినదై చేయుదగినది, తేన = ఆలబ్ధముచే, వంశౌ = వంశములు, పృథక్=వేరుగ, యుతోనౌ = కలుపబడినదియు తీసివేయబడినదియు చేయుదగినది, తదర్ధే = వాటియొక్క సగములు, క్రమేణ = క్రమముచే, శ్రుతి కోటిరూపే వంశస్యఖండే = కర్ణముకోటియునైన వంశఖండములు

(దీనితాత్పర్యము ఉదాహరణ శ్లోకానంతరము చూడుము)

ఉదాహరణం

యదిసమభువి వేణు ర్ద్వితిప్రాణిప్రమాణో గణక పవనవేగాదేక దేశే సభగ్నః।భువి నృపమితహస్తేష్వంగ లగ్నం తదగ్రం కథయకతిషు మూలాదేషభగ్నః కరేషు॥ ౭౧

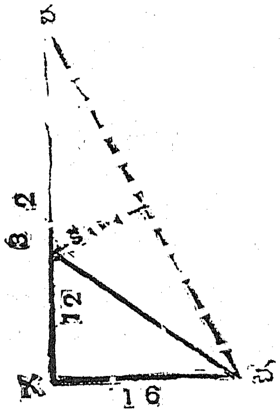
తా॥ గణకుడా ! ఒకసమప్రదేశమందు 32 హస్తములు ప్రమాణముగల వెదురు వాయువేగముచే నొకప్రదేశమునందు కొంచెమువిరిగినది. ఆవెదురుయొక్క తుద భూమియందు వెదురుయొక్క మొదటినుండి 16 హస్తముల దూరమునందు తగిలెను. మొదటినుండి ఎన్ని హస్తములందు ఈవెదురు విరిగినది? చెప్పుము

ఇచట వంశాగ్రమునకును వంశమూలమునకునుగల అంతరము 16హస్తములు భుజ. భూమినుండి వంశము విరిగినప్రదేశమువరకును కోటి. విరిగినప్రదేశమునుండి నేలయందుతగిలినఅగ్రమువరకునైన వంశఖండము కర్ణము. కావున వంశప్రమాణము కర్ణకోటియోగపరిమితము. దీనింబట్టి సూత్రము కల్పింపబడెను.

156. ప్ర. ఇట్లు కోటికర్ణయోగమున్ను భుజయున్ను తెలిసినచో భుజవర్గమును కర్ణకోటియోగముచే భాగింపుము. ఆలబ్ధమును కర్ణకోటియోగము (వంశప్రమాణము)నం దొకచో కలుపుము. ఒకచో వ్యవకలింపుము. రెండిటిని అర్ధింపుము. యోగముయొక్క సగము కర్ణమగును. అంతరముయొక్క సగము కోటియగును. ఇవియే వెదురుయొక్క ఖండములు (అనగా కోటిఎంతయో భూమినుండి అంత దూరములో విరిగెనని చెప్పదగియున్నది)

న్యాసః. కర్ణకోటియుతిః ౩౨ భుజః ౧౬ జాతేఊర్ధ్వాధర ఖండే ౨౦, ౧౨

ఇచట వగ = వంశము, కప్రదేశమున వంశము (వెదురు)విరిగినది. కావున కగ = వంశాధఃఖండము = కోటి వక = కచ = కర్ణము వంశోర్ధ్వఖండము



గచ = భుజ = వంశాగ్రమూలాంతర భూమి చ = వంశాగ్రము భూమియందు తగిలినప్రదేశము కావున పైపద్ధతిచే

ల $\frac{\text{గచ}^2}{\text{వగ}} = \frac{16^2}{32} = \frac{256}{32} = 8$ ఫలము.

$$\frac{\text{వగ} + \text{ఫ}}{2} = \frac{32+8}{2} = 20 \text{ కర్ణము}$$

$$\frac{\text{వగ} - \text{ఫ}}{2} = \frac{32-8}{2} = 12 \text{ కోటి}$$

ఉపపత్తి:—(1) కోటికర్ణయోగమున్ను కోటికర్ణవర్గాంతరమున్ను తెలియుటచే కోటికర్ణప్రమాణములు (104 ప్ర 1 అనుచే) సంక్రమణగణితముచే తెలియుచున్నవి ఇచట ఆమార్గమే చెప్పబడెను

(2) లేక, ఆక్షేత్రమునందే గచ = భుజ వగ = పెద్దకోటి వచ = పెద్ద కర్ణము కల = 'వచ' కర్ణమునందు క బిందువునుండి చేసినలంబము

కవ = కచ కావున కవల, కచవ త్రిభుజములు సమానములైయున్నవి

(రేఖాగణితము 6 అ 8 ప్రతిజ్ఞచే క్షేత్రానుపాతముచే)

$$\text{కవ} = \frac{\text{వచ} \times \text{వల}}{\text{వగ}} = \frac{\text{వచ}}{\text{వగ}} \times \text{వల} = \frac{\text{వచ}}{\text{వగ}} \times \frac{\text{వచ}}{2} \quad \therefore \text{వల} = \frac{\text{వచ}}{2}$$

$$\therefore \text{కవ} = \frac{\text{వచ}^2}{2\text{వగ}} \text{ ఇచట } \text{వచ}^2 = \text{వగ}^2 + \text{గచ}^2 \quad \therefore \text{కవ} = \frac{\text{వగ}^2 + \text{గచ}^2}{2\text{వగ}}$$

$$= \frac{\text{వగ}^2}{2\text{వగ}} + \frac{\text{గచ}^2}{2\text{వగ}} = \frac{\text{వగ}}{2} + \frac{\text{గచ}^2}{2\text{వగ}} = \frac{\text{వగ} + \frac{\text{గచ}^2}{\text{వగ}}}{2} = \frac{\text{వం} + \frac{\text{భు}^2}{\text{వం}}}{2}$$

ఇందు కవ=కచ=వంశోర్ధ్వఖండము కావునకోటికర్ణయుతిలోని కర్ణమగుచున్నది.

ఇపుడు కర్ణకోటియోగ — కర్ణ = కోటి కావున

$$వం - \frac{వం + \frac{భు^2}{వం}}{2} = \frac{వం - \frac{భు^2}{వం}}{2} = వంశాధరఖండము.$$

అనగా కోటియగుచున్నది. ఇట్లు బహుప్రకారములచే పద్ధతు లుపపన్నములగుచున్నవి. ఐనను విస్తరభీతిచే 1, 2 ప్రకారములు మాత్రమే వ్రాయబడుచున్నవి.

బాహుకర్ణయోగే జ్ఞాతే కోటిజ్ఞానేచ పృథక్కరణార్థంసూత్రం
స్తంభస్యవర్గోహిబిలాంతరేణభక్తః ఫలంవ్యాలబిలాంతరాలాత్।
శోధ్యంతదర్ధప్రమితైఃకరైస్స్యాద్బిలాగ్రతోవ్యాలకలాపియోగః॥౨౮

టీ॥ (ఉదాహరణ శ్లో.చూ) స్తంభస్యవర్గఃఅహిబిలాంతరేణభక్తః (కార్యః) = స్తంభముయొక్క వర్గము సర్పముయొక్కయు సర్పబిలముయొక్కయు మధ్యభాగముచే భాగింపబడినదై చేయదగినది. ఫలం వ్యాలబిలాంతరాలాత్ శోధ్యం = ఆలబ్ధము సర్పముయొక్కయు సర్పబిలముయొక్కయు మధ్యభాగమువలన తీసివేయదగినది. తదర్ధప్రమితైః కరైః బిలాగ్రతః వ్యాలకలాపియోగః స్యాత్ = అట్లుతీసివేయగా నైన శేషముయొక్క సగముతో సమమైనహస్తములచే సర్పబిలమునకు ముందుగనైనప్రదేశమునందు సర్పమునకును నెమలికిని సమాగమము అగును.

157. ప్ర. (ప్రశ్నానుసారము) స్తంభముకోటి. స్తంభమూలమందలి సర్పబిలమునకును సర్పమును మయూర మెచట చూచెనో సర్పస్థానమైన ఆప్రదేశమునకును మధ్యదూరము భుజకర్ణయోగము. స్తంభమూలమునుండి సర్పమును నెమలిపట్టుకొనిన ప్రదేశమువరకును భుజ. అటనుండి సర్పస్థానమువరకునైనదూరము సర్పగమనమున్ను మయూరగమనమున్ను సమములుగ కల్పింపబడినదగుటచే కర్ణము.

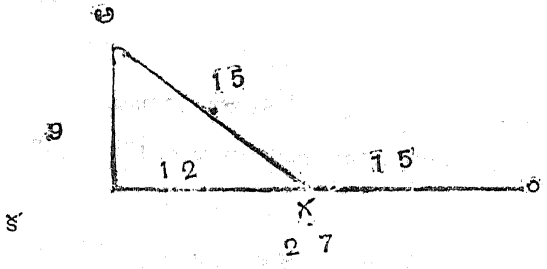
కోటి(స్తంభ)వర్గమును భుజకర్ణయోగము(స్తంభమూలమునుండి సర్పస్థానమువరకునైనదూరము)చే భాగింపుము. ఆలబ్ధమును భుజకర్ణయోగమువలన వ్యవకలించి అర్ధించినచో భుజ(స్తంభమూలమునుండి సర్పమును పట్టుకొనిన ప్రదేశమువరకునైన దూరము) అగును. కలిపిఅర్ధించినచో కర్ణము (సర్పగమనములేక మయూరగమనము) అగును.

ఉదాహరణం

అస్తి స్తంభతలే బిలం తదుపరి క్రీడాశిఖండీ స్థిత
స్తంభే ♦హస్త నవోచ్ఛ్రితే త్రిగుణితస్తంభప్రమాణాంతరే।
దృష్ట్వాహిం బిలమావ్రజన్త మపతత్తిర్యక్స తస్యోపరి
క్షిప్రం బ్రూహి తయోర్బిలాత్కతికరైస్సామ్యేనగత్యోర్యుతిః ౨౯

తా॥ ఒకానొకస్తంభముయొక్క మూలభాగమున బిలము గలదు. ఆస్తంభమునకు ఉపరిభాగమున క్రీడామయూరము (ఆటనెమలి) గలదు. 9 హస్తముల ఎత్తుగల స్తంభముననున్న నెమలి స్తంభప్రమాణము 9 ను 3చే గుణింపనగు దూరమున బిలమునకువచ్చుసర్పమును చూచి కర్ణమార్గముగ (కొంచెము అడ్డముగ)వచ్చి ఆసర్పముపై బడెను. ఆసర్పమున్ను మయూరమున్ను సమముగ నడచుచున్నవియగుచో స్తంభబిలమున కెంతదూరములో మయూరము సర్పమును బట్టుకొనెను ? త్వరగ చెప్పుము.

న్యాసః. స్తంభః ౯ అహిబిలాంతరగం ౨౭ జాతా బిలయుతోర్మధ్యే హస్తాః ౧౨



స్తంభ = అక = కోటి కగ = భుజ = బిల సర్పమయూరయోగాంతరము, గచ = అగ = కర్ణ = సర్పమయూరగమనములు కచ = భుజకోటియోగ = కగ + గచ = సర్పబిలాంతరము. స్తంభము 9హస్తములు సర్పబిలాంతరము $3 \times 9 = 27$ హస్తములు స్తంభవర్గము 81 ను సర్పబిలాంతరము 27 చే భాగింప $81 \div 27 = 3$ ఈలబ్ధమును సర్పబిలాంతరమువలన తీసివేయ $27 - 3 = 24$ అర్ధింప 12 బిలమునుండి సర్పమయూరయోగమువరకునైన దూరము 12 భుజ. దీనిని 27 లో వ్యవకలింప 15 కర్ణము.

♦ నందకరోచ్ఛ్రితే అని పాఠాంతరము.

ఉపపత్తి: $\text{అగ}^2 - \text{కగ}^2 = \text{అక}^2$ (150 ప్ర)

$\text{కచ} = \text{అగ} + \text{కగ} \therefore \frac{\text{అగ}^2 - \text{కగ}^2}{\text{అగ} + \text{కగ}} = \frac{\text{అక}^2}{\text{కచ}} = \text{అగ} - \text{కగ}$ (104 ప్రి 1 అను)

రాశియోగాంతరములచే రాశిజ్ఞానము (103 ప్రి. చే) గలుగుచున్నది. పైపద్ధతికిని ఈపద్ధతికిని భుజకోటులకు నామభేదమే గాని రూపభేదములేకుండుటచే భేదము లేదు. కావున ఉపపత్తియందును భేదములేదు.

కోటికర్ణాంతరేభుజేచదృష్టే పృథక్కరణసూత్రింవృత్తం
భుజాద్వర్గితాత్కోటికర్ణాంతరాప్తంద్విధాకోటికర్ణాంతరేణోనయుక్తం।
తదర్ధేక్రమాత్కోటికర్ణౌభవేతామిదంధీమతావేద్యసర్వత్రయోజ్యం॥

టీ॥ వర్గితాత్ = వర్గింపబడిన, భుజాత్ = భుజవలన, కోటికర్ణాంతరాప్తం = కోటికర్ణాంతరముచే భాగింపగావచ్చినలబ్ధము ద్విధా = రెండువిధములుగనుంచ బడినదై కోటికర్ణాంతరేణోనయుక్తం = కోటికర్ణాంతరముచే తీసివేయబడినదియు కలుపబడినదియు చేయదగినది. తదర్ధే = ఆఅంతరముయొక్కయు యోగము యొక్కయు అర్ధములు క్రమాత్ = క్రమముగ కోటికర్ణౌభవేతాం = కోటికర్ణములగును ధీమతాఇదంఆవేద్యం సర్వత్రయోజ్యం = బుద్ధిమంతునిచే నిది తెలిసికొని అంతటను చేయదగినది.

158. ప్రి. కోటికర్ణములయంతరమున్ను భుజయున్ను తెలిసినచో భుజ వర్గమును కోటికర్ణాంతరముచే భాగింపనగులబ్ధమును కోటికర్ణాంతరమునం దొకచో కలిపియర్ధింపుము. ఒకచో వ్యవకలించియర్ధింపుము అవిక్రమముగ కర్ణము కోటి యు కాగలవు.

సఖేపద్మతన్మజ్జనస్థానమధ్యంభుజః కోటికర్ణాంతరంపద్మదృశ్యం।
నలఃకోటిరేతన్మితంస్యాద్యదంభోవదైవంసమానీయపానీయమానం॥

తా॥ (చూ. ఉదా॥) మిత్రమా ! పద్మముయొక్కయు ఆపద్మము మునిగిన స్థానముయొక్కయు మధ్యభాగము భుజ, పద్మముయొక్క కనుపించుభాగము కోటి కర్ణాంతరము, పద్మనాలము (నీటిలోనున్న భాగము) కోటి, జలముకోటియెంతయో అంతయగుటచే పైసూత్రిప్రకారము కోటిని తెలుసుకొని దానిచే జలమానమును చెప్పుము

ఉదాహరణం

చక్రక్రౌంచాకులితసలిలే క్వాపి దృష్టం తటాకే తోయాదూర్ధ్వంకమల కలికాగ్రం వితస్తిప్రమాణం। మందంమందం చలిత మనిలేనాహతం హస్తయుగ్మే తస్మిన్మగ్నం గణక కథయ క్షిప్ర మంభఃప్రమాణం॥

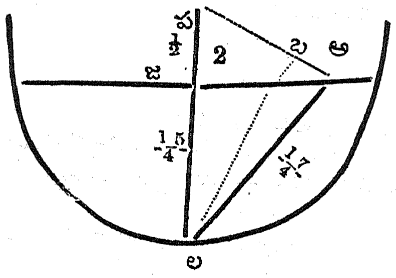
తా॥ గణకుడా ! చక్రవాకముల చేతను క్రౌంచముల చేతను వ్యాకులమైనజల ముగల ఒకానొక సరస్సునందు జలముకంటె పైభాగమున తామరమొగ్గయొక్క కొన 12 అంగుళముల ప్రమాణమై కన్పట్టినది. వాయువుచే గొట్టబడినదియై మెల్లమెల్లగ చలించుచు నాపద్మము తొలుతకన్పట్టినప్రదేశమునకు 2 హస్తముల (48 అంగుళముల) దూరమున ఆతటాకమున మునిగినది. (ఆ మొగ్గయొక్క కొన నీటి పైభాగముతో సరిపడునట్లు కర్ణమార్గముగ నాళముతోగూడ నాపద్మము వంగినది) శీఘ్రముగ జలప్రమాణము (లోతు)ను చెప్పుము.

న్యాసః. కోటి కర్ణాంతరం ౧/౨

భుజః ౨ లబ్ధం జలగాంభీర్యం ౧౫/౪

ఇయంకోటిః. ఇయమేవకోటిః

కలికామానయుతాజాతఃకర్ణః ౧౭/౪



కోటికర్ణాంతరము ½ హస్తము. భుజ 2 హస్తములు భుజవర్గము 4ను కోటి కర్ణాంతరము ½ చే భాగింప 8 లబ్ధము ఇందు కోటికర్ణాంతరమును వ్యవకలించి యర్ధింప $\frac{15}{4}$ కోటి. కలిపియర్ధింప $\frac{17}{4}$ కర్ణము-పద్మముయొక్క మొత్తము ప్రమాణము.

ఉపపత్తి: క్షేత్రసాజాత్యమువలన అనుపాతముచే

పై క్షేత్రమునందు అపల అనుత్రిభుజమునందు అజల జాత్యము అపజజాత్య మున్నుగలవు. ఇవి తొలుతప్రశ్నమునందే చూపబడినవి. అట్లు అపరేఖయందు లబిందువునుండి లంబమును చేయుటవలన రెండుజాత్యములు అగుచున్నవి. అందు అల, పల రేఖలు తుల్యములగుటచే అపలత్రిభుజము సమద్విబాహుకము కావున

అజాత్యములు రెండును పరస్పరమున్న సమములై యున్నవి. (రేఖాగణిత 1 అ. 5 ప్ర. 26 ప్ర చూ.) పిమ్మట (రేఖా 6 అ. 8 ప్ర. చే) పరస్పర సాజాత్యము వలన,

$$\text{పజ} : \text{అప} : : \frac{\text{అప}}{2} : \text{అల} \therefore \text{అల} = \frac{\text{అప} \times \frac{\text{అప}}{2}}{\text{పజ}} = \frac{\text{అప}^2}{2\text{పజ}}$$

$$\text{ఇచట } \text{అప}^2 = \text{అజ}^2 + \text{పజ}^2 \therefore \frac{\text{అప}^2}{2\text{పజ}} = \frac{\text{అజ}^2 + \text{పజ}^2}{2\text{పజ}} = \frac{\frac{\text{అజ}^2}{\text{పజ}} + \text{పజ}}{2} = \text{అల}$$

$$\therefore \frac{\frac{\text{భు}^2}{\text{అం}} + \text{అం}}{2} = \text{కర్ణ} \therefore \text{క} - \text{అం} = \frac{\frac{\text{భు}^2}{\text{అం}} + \text{అం}}{2} - \text{అం} = \frac{\frac{\text{భు}^2}{\text{అం}} - \text{అం}}{2} = \text{కోటి}$$

అం = అంతరము అని గ్రహింపవలయును. ఇట్లును ఈపద్ధతి యుపపన్నమగుచున్నది.

(2) కోటికర్ణవర్గాంతరము భుజవర్గము కావున వర్గాంతర రాశ్యంతరములబట్టి రాశియోగము, రాశియోగాంతరములవలన రాసులును తెలియబడును (103, 104 ప్ర. చూ)

(3) $\text{కర్ణ} = \text{యా}, \text{యా} - \text{పజ} = \text{కో}, \text{అజ} = \text{భుజ}$

$$\text{క}^2 - \text{కో}^2 = \text{యా}^2 - (\text{యా}^2 - 2\text{యా}.\text{పజ} + \text{పజ}^2) = \text{అజ}^2 = \text{భు}^2$$

$$= 2\text{యా}.\text{పజ} - \text{పజ}^2 = \text{అజ}^2 \therefore 2\text{యా}.\text{పజ} = \text{అజ}^2 + \text{పజ}^2$$

$$\therefore \text{యా} = \frac{\frac{\text{అజ}^2}{\text{పజ}} + \text{పజ}}{2} \text{ ఇట్లు } \text{యా} - \text{పజ} = \frac{\frac{\text{అజ}^2}{\text{పజ}} - \text{పజ}}{2} = \text{కోటి}.$$

ఇట్లు సమీకరణము చేతనున్న ఉపపత్తి యగుచున్నది.

కోట్యేకదేశేనయుతే కర్ణే భుజేచ దృష్టే కోటికర్ణజ్ఞానాయకరణసూత్రం వృత్తం.

ద్వినిఘ్నతాలోచ్ఛ్రితిసంయుతం యత్సరోంతరం తేనవిభాజితాయాః।
తాలోచ్ఛ్రితేస్తాలసరోంతరఘ్న్యా ఉడ్డీనమానంఖలులభ్యతేతత్ ॥ ౨౨

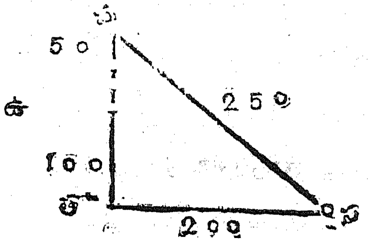
టీ॥ ద్వినిఘ్నతాలోచ్ఛ్రితిసంయుతం = రెండుచేగుణింపబడిన తాలప్రమాణముతో కలుపబడిన, యత్ = ఏ, సరోంతరం = తాలసరోంతరము (తాలవృక్షమునకును సరస్సునకును మధ్యభాగము) కలదో, తేన = దానిచే, తాలసరోంతరఘ్న్యాః = తాలసరోంతరముచే గుణింపబడిన, తాలోచ్ఛ్రితేః = తాలప్రమాణము, విభాజితాయాః = భాగింపబడినదగుచుండగ, తత్ ఉడ్డీనమానం = ఆ ఉడ్డీనము (ఎగురుట) యొక్క ప్రమాణము లభ్యతేఖలు = లబ్ధమగుచున్నదిగదా

159. ప్ర. తాలప్రమాణమునురెట్టించి తాలసరోంతరమునకలిపి ఆయోగమునొకచోనుంచుకొనుము. తాలప్రమాణమును తాలసరోంతరముచే గుణింపగ గుణనఫలమును ఆయోగముచే భాగింపుము. లబ్ధము ఉడ్డీనము అగును ఆఉడ్డీనముయొక్కయు తాలప్రమాణముయొక్కయు యోగము కోటి. తాల సరోంతరము భుజ. (ఉదా. చూ)

ఉదాహరణం

వృక్షాద్ధస్తశతోచ్ఛ్రయాచ్ఛతయుగే వాపీంకపిః కోప్యగా
దుత్తీర్యాథ పరో ద్రుతం శ్రుతిపథేనోడ్డీయ కించిద్ద్రుమాత్।
జాతైవంసమతా తయోర్యదిగతా వుడ్డీనమానం కియ
ద్విద్వం శ్చేత్సుపరిశ్రమోస్తి గణితే క్షిప్రం తదాచక్ష్వ మే॥ ౨౪

తా॥ ఒకతాలవృక్షము 100 హస్తములు ఎత్తుగనుండెను.ఆతాలముయొక్క మొదటినుండి 200 హస్తములదూరమున నొకవాపి (సరస్సు) గలదు. ఆతాలవృక్షాగ్రమునందు 2 కోతులుగలవు. అందొకవానరము ఆవృక్షాగ్రమునుండి దిగి మొదటికివచ్చి అటనుండి సరస్సునకు వచ్చెను. మరియొకవానరము ఆవృక్షాగ్రమునుండి ఊర్ధ్వముగ కొంతవరకుఎగిరి అటనుండి కర్ణమార్గముగ వాపింజేరెను. ఆరెండువానరములును సమగతిగలవి యగుచో ఆరెండవవానరము ఎంతపైకి ఎగిరెను? (ఆఎగిరిన దూరము ఉడ్డీనము) విద్వాంసుడా! నీవుగణితమున పరిశ్రమయున్నచో శీఘ్రముగ నాకు ఆఉడ్డీనమును చెప్పుము.



ఇచట తాఉ = తాలప్రమాణము 100 హస్తములు. తాస= తాలసరోంతరము 200 హస్తములు. ఉప = ఉడ్డీనము, తాప = కోటి, తాస= భుజ, పస = కర్ణము.

తాఉ + తాస = ఉప + పస =వానరగమలగతి. ఇట్లు కోట్యేకదేశమున్ను భుజమున్ను ఇవ్వబడెను. కోట్యేకదేశకర్ణయోగము చెప్పబడెను. కోటికర్ణప్రమాణములు చెప్పవలయును.

న్యాసః వృక్షవాప్యంతరం ౨౦౦ వృక్షోచ్ఛ్రాయః౧౦౦ లబ్ధముడ్డీనమానమ్౫౦ కోటిః౧౫౦ కర్ణః౨౫౦ భుజః౨౦౦

ఉదా: సూత్రప్రకారము. $\frac{\text{తాఉ} \times \text{తాస}}{2\text{తాఉ} + \text{తాస}} = \frac{100 \times 200}{2 \times 100 + 200} = \frac{20000}{400} = 50$ ఉప

$\therefore$ తాఉ + ఉప = 100 + 50 = 150 కోటి, ఉపస — ఉప = 300 — 50 = 250 కర్ణము

ఉపపత్తి: బీజప్రక్రియా సమీకరణముచే చెప్పబడుచున్నది.

ఉప + తాఉ = కో $\therefore$ (ఉప + తాఉ)^2 + తాస^2 = పస^2

$\therefore$ ఉప^2 + 2ఉప.తాఉ + తాఉ^2 + తాస^2 = పస^2

ఇచట పస = (తాఉ + తాస) — ఉప = తాఉ + తాస — ఉప

$\therefore$ ఉప^2 + 2ఉప.తాఉ + తాఉ^2 + తాస

= తాఉ^2 + తాస^2 + ఉప^2 + 2తాస.తాఉ — 2ఉప.తాఉ — 2ఉప.తాస

పక్షద్వయమందును సమశోధనము చేయగా

2 ఉప.తాఉ=2తాస.తాఉ — 2 ఉప.తాఉ — 2ఉప.తాస

$\therefore$ 4 ఉప.తాఉ + 2ఉప.తాస = 2తాస.తాఉ రెండుచేభాగింప

2 ఉప.తాఉ + ఉప.తాస = తాస.తాఉ.

= ఉప (2తాఉ + తాస) = తాస.తాఉ $\therefore$ $\frac{\text{తాస.తాఉ}}{2\text{తాఉ} + \text{తాస}}$ = ఉప

ఇట్లీపద్ధతి యుపపన్నమగుచున్నది. ప్రకారభేదములను విస్తరభీతిచే వ్రాయలేదు.

భుజకోట్యోర్యోగే కర్ణేచ జ్ఞాతే పృథక్కరణసూత్రం వృత్తం
కర్ణస్యవర్గాద్ద్విగుణాద్విశోధ్యో దోఃకోటియోగస్స్వగుణోస్యమూలం।
యోగోద్విధామూలవిహీనయుక్తస్స్యాతాంతదర్ధేభుజకోటిమానే॥

టీ॥ ద్విగుణాత్ కర్ణస్యవర్గాత్ = రెట్టింపబడిన కర్ణవర్గమువలన, స్వగుణః దోఃకోటియోగః = తన చేగుణింపబడిన (అనగా వర్గింపబడిన) భుజకోటియోగము విశోధ్యః = వ్యవకలింపదగినది. అస్యమూలం(కార్యం) = ఈఅంతరమునకు మూలము చేయతగినది. యోగః = భుజకోటియోగము ద్విధా = రెండుచోట్ల వ్రాయబడినదియై మూలవిహీనయుక్తః(కార్యః) = మూలముచే ఒకచో వ్యవకలింపబడినదియు మరియొకచో కలుపబడినదియు చేయదగినది. తదర్ధే భుజకోటిమానే స్యాతాం = వాటియొక్కసగములు భుజకోటిప్రమాణములగును.

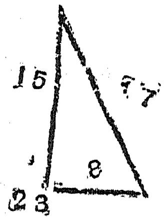
160. ప్ర. కర్ణవర్గమునురెట్టించి దానివలన భుజకోటియోగముయొక్కవర్గమును తీసివేయుము. ఆఅంతరముయొక్క మూలమును భుజకోటియోగమునందు కలిపి అర్ధింప కోటియగును. వ్యవకలించి యర్ధింప భుజయగును.

ఉదాహరణమ్

దశ సప్తాధికాః కర్ణ స్త్ర్యధికావింశతి స్సఖే।
భుజకోటియుతి ర్యత్ర తత్ర తే మే పృథ గ్వద॥ ౭౫॥

తా॥ ఒకజాత్యమునందు కర్ణము 17 భుజకోటియోగము 23 మిత్రమా! ఆక్షేత్రమునందు నాకు భుజకోటులను వేరుగ చెప్పుము.

న్యాసః. కర్ణః౧౭ దోఃకోటియోగః౨౩ జాతేభుజకోటీ ౮,౧౫



కర్ణము17 దీనివర్గము 289 రెట్టింప 578 దీనివలన భుజకోటియోగము 23 యొక్క వర్గమును వ్యవకలింప 49 దీనిమూలము 7 ను భుజకోటియోగమునకలుప 23 + 7 = 30 వ్యవకలింప 23 — 7 = 16 అర్ధింప 15, 8 కోటి భుజములగుచున్నవి.

ఉపపత్తి: భు^{2} + కో^{2} = క^2, భు + కో = యోగ

రెండురాసులవర్గయోగమున్ను ఆరాసులయోగమున్ను తెలిసినవి. అపుడు (105 ప్ర. చే) (భు^{2} + కో^{2})2 — (భు + కో)^2 = (కో — భు)^2

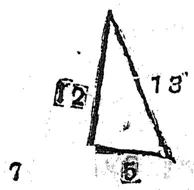
దీనిమూలము (కో — భు) ఇట్లు $(\text{భు}^2+\text{కో}^2)\,2-(\text{కో}-\text{భు})^2=(\text{భు}+\text{కో})^2$ దీనిమూలము (కో + భు) రాశియోగముచే రాశ్యంతరమున్ను రాశ్యంతరముచే రాశియోగమున్ను తెలియుచున్నవి. పిమ్మట రాశియోగ రాశ్యంతరములవలన (103 ప్ర. చే) రాసులు తెలియును.

ఉదాహరణమ్

దోఃకోట్యో రంతరం శైలాః కర్ణో యత్ర త్రయోదశ।
భుజకోటీ పృథక్తత్ర వదాశు గణకోత్తమ॥ ౭౬॥

తా॥ ఒకజాత్యమునందు కోటిభుజల యంతరము 7. కర్ణము 13 అట్టి గణకోత్తమా ! భుజకోటులను శీఘ్రముగ వేరుగ చెప్పుము.

న్యాసః. కర్ణః ౧౩ భుజకోట్యంతరం ౭ లబ్ధేభుజకోటీ ౫, ౧౨



కర్ణము 13 యొక్క వర్గము 169 దీనిని రెట్టింప 338 దీనివలన భుజకోట్యంతర 7 వర్గము 49 ను వ్యవకలింప 289 శేషము దీనిమూలము 17 ఇంటు భుజకోట్యంతరమునుకలిపి యర్ధింప $\frac{17+7}{2}=12$ కోటి. వ్యవకలించి యర్ధింప $\frac{17-7}{2}=5$ భుజ. యు నగుచున్నవి.

లంబావబాధాజ్ఞానాయ కరణసూత్రం వృత్తం.

అన్యోన్య మూలాగ్రగ సూత్రయోగా ద్వేణ్వోర్వధే యోగ హృతే వలంబః। వంశౌ స్వయోగేన హృతావభీష్ట భూఘ్నౌచ లంబో భయతఃకుఖండే॥ ౭౭॥

టీ॥ వేణ్వోర్వధే = వేణువులయొక్క పరస్పరగుణనము, యోగహృతే = వేణువులయోగముచే భాగింపబడినదగుచుండ, అన్యోన్యమూలాగ్రగ సూత్రయోగాత్ = పరస్పరముయొక్క మూలాగ్రములనొందిన సూత్రములయోగము (కలిసినప్రదేశము)నుండి అవలంబః = లంబము. వంశౌ = వేణువులు, అభీష్ట భూఘ్నౌ = అభీష్టమగు భూమానముచే గుణింపబడినవియై, స్వయోగేనహృతౌ

చ = వేణువులయోగముచే భాగింపబడినవియై, లంబోభయతః = లంబమునకు రెండు వైపులనుండు భూమిఖండములు (అనగా ఆభాగలులేక అవబాధలు) అగును.

161. ప్ర. (1) ఒకేభుజగల రెండుజాత్యములు ఆరెండిటియొక్కయు కోటులు పరస్పరాభిముఖములుగ నున్నపుడు ఆరెండిటియొక్కయు కర్ణములయోగమునుండి భుజయందు చేయబడిన లంబమునున్ను లంబమూలమునకు నిరువైపుల నుండు భుజఖండములనున్ను తెలియుటకు పద్ధతి.

(2) వేరువేరు ప్రమాణములుగలిగి భూమియందు వేరుగపాతబడిన 2వెదుళ్లు కోటులు ఆరెండిటియొక్కయు మధ్యనున్న భూమి భుజ. ఒకదానిమూలమునుండి మరియొకదానియగ్రమునకు కట్టబడినసూత్రములు కర్ణములు.

(3) ఆవెదుళ్లయొక్క పరస్పరగుణనమును వాటియోగముచే భాగింప లబ్ధము కర్ణసూత్రములయోగమునుండి భూమివరకునైన యంతరము అనగాలంబము అగును.

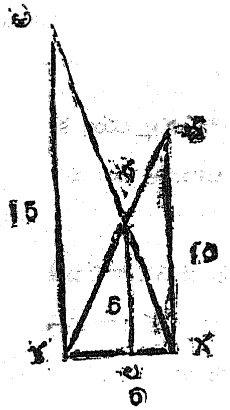
(4) ఆవెదుళ్ళప్రమాణములను అభీష్టభూప్రమాణముచే వేర్వేరగుణించి ఆవేణుప్రమాణములయోగముచే భాగింప లంబమునకు నిరువైపులనుండు ఆబాధ లగును.

ఉదాహరణమ్

పంచదశదశకరోచ్ఛ్రయవేణ్వో రజ్ఞాతమధ్యభూమికయోః।
ఇతరేతరమూలాగ్రగసూత్రయుతే ర్లంబమానమాచక్ష్వ॥ ౭౮॥

తా॥ ఒకవెదురు 15హస్తములు. మరియొకవెదురు 10 హస్తములు. ఆరెండిటియొక్కయు మధ్యభూమియొక్క ప్రమాణము తెలియదు ఆవేణువులు రెండిటికిని ఒకదానిమూలమునుండి మరియొకదాని అగ్రమువరకు కట్టబడి కర్ణరూపములైన సూత్రముల యోగమునుండి లంబప్రమాణమును చెప్పుము.

న్యాసః వంశౌ ౧౫,౧౦ జాతో లంబః ౬ వంశాంతరభూః ౫ అతో జాతే భూఖండే ౩, ౨ అథవా భూః ౧౦ ఖండే ౬,౪ వా భూః ౧౫ ఖండే ౯, ౬ వా భూః ౨౦ ఖండే ౧౨, ౮ ఏవం సర్వత్ర లంబస్స ఏవ. యద్యత్ర భూమితుల్యే భుజే వంశః కోటి స్తదా భూఖండేన కిమితి త్రైరాశికేన సర్వత్ర ప్రతీతిః.



ఈ క్షేత్రమునందు అకగ ఒకజాత్యము. చగక ఒకజాత్యము రెండుజాత్యములకును కగ భుజ భూమి. అక, చగరేఖలు వేణువులు. అగ, చక రేఖలు అన్యోన్యమూలాగ్రగసూత్రములు. స ఆ సూత్రములయోగము. సల సూత్రయోగమునుండి లంబము. పద్ధతిప్రకారము రెండువేణువులయొక్కయు యోగము అక + చగ = 15 + 10 = 25 వేణువులయొక్క గుణనము అక × చగ = 15 × 10 = 150

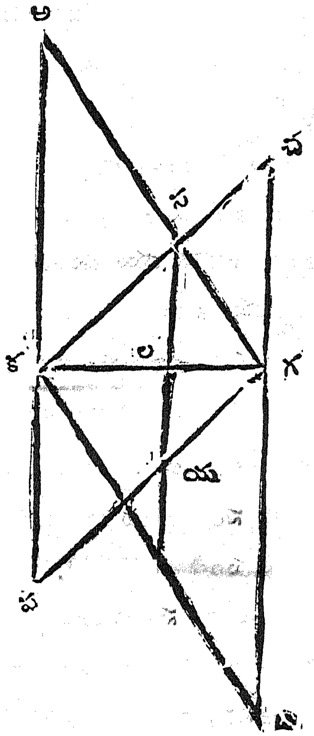
ఇప్పుడు వేణుగుణనముచే వేణుయోగమును భాగింప సూత్రయోగమునుండి లంబమగును.

$$\frac{అక \times చగ}{అక + చగ} = సల = \frac{15 \times 10}{15 + 10} = \frac{150}{25} = 6 \text{ లంబము}$$

రెండువేణువులయొక్క మధ్యనున్న భూమి యెంతయున్నను లంబమిదియే యగును. భూమి 5 అనుకొనుచో సూత్రప్రకారము వేర్వేరవేణువులను భూమానముచే గుణించి వేణుయోగముచే భాగింప $\frac{అక \times భూ}{అక + చగ} = \frac{15 \times 5}{15 + 10} = \frac{75}{25} = 3$ అకవేణువువైపునందలి భూఖండము లేక ఆబాధ, ఇట్లు $\frac{చగ \times భూ}{అక + చగ} = \frac{50}{25} = 2$ ఇతరఆబాధ.

ఇట్లు భూమి 10 యగుచో ఆబాధలు 6, 4 భూమి 15 అగుచో 9, 6 ఆబాధలు, భూమి 20 యగుచో 12, 8 ఆబాధలు అగుచున్నవి. ఈగణితము సరియైనదియనుట, త్రైరాశికముచే తెలియుచున్నది. ఎట్లనగా: భూమిభుజయగునపుడు వేణువుకోటియగుచో, ఆబాధభుజయగునపు డెంతకోటియగును? ఈ త్రైరాశికముచే లంబము తెలియును. అట్లు వేణుకోటియందు భూమిభుజయగుచో లంబకోటియందు భుజయెంత ? ఈ త్రైరాశికములచే ఆబాధలు తెలియుచున్నవి. జాత్యాంతర్గతజాత్యములగుటచే సాజాత్యమువలన త్రైరాశికములను చేయగా పైపద్ధతిచే సాధింపబడిన లంబాబాధలు సరిపడుచున్నవి. కాన సూత్రపద్ధతి

రజువుగనున్నదియని తెలుసుకొనవలయును అని ఆచార్యులవారే వ్రాసియున్నారు.



ఉపపత్తి: ఇందు అక పెద్దవెదురు చగ చిన్నవెదురు. సల లంబము. అకరేఖ పబిందువు వరకు కపరేఖ చగరేఖతో సమానముగునట్లువృద్ధి చేయబడినది. అట్లు చగరేఖయు గబరేఖ అక రేఖతో సమమగునట్లు బ బిందువువరకును వర్ధింపబడినది. పిమ్మట కబ, గప, కర్ణరేఖలు చేయబడినవి. సల లంబరేఖయు పెంచబడినది. ఈ సలరేఖ గపరేఖయందు 'య' స్థానమువకలిసినది. కావున నిందు,

చగ = కప, అక = గబ ∴ అక + చగ = అప = చబ ఇట్లు సయరేఖ చగ, కప, రేఖలకు సమానాంతరరేఖ యగుచున్నది. మరియు కచ = గప కావున చకపగ సమానాంతర చతుర్భుజ క్షేత్రమగుచున్నది.

∴ చగ = కప = సయ = చిన్నవేణువు.

మరియు అపగ త్రిభుజమునందు సయగ త్రిభుజము అంతర్గతమైసజాతీయమగుచున్నది కావున అనుపాతము.

(1) అపగ త్రిభుజమునందు అప భూమియందు అక ఆబాధయగుచో సయగ త్రిభుజమునందు సయ భూమియం దెంతఆబాధ యుండును ? సల యగుచున్నది.

$$\therefore \frac{అక \times సయ}{అప} = \frac{అక \times చగ}{అక + చగ} = సల$$

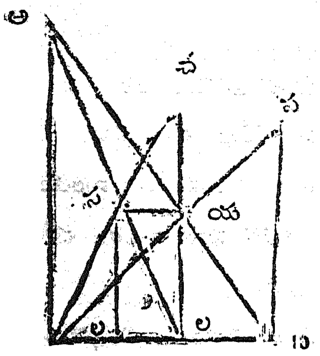
(2) ఇట్లు అపగ త్రిభుజమునందు అప ఆధారమునందు కగ లంబమగుచో సయగ త్రిభుజమునందు సయ ఆధారమునందు లంబమెంతయగును? గల అగుచున్నది.

$$\therefore \frac{కగ \times సయ}{అప} = \frac{భూ \times చగ}{అక + చగ} = గల = \text{చిన్నయాబాధఅగును.}$$

(3) ఇట్లు చబక త్రిభుజమునకును సతక త్రిభుజమునకును సాజాత్యము వలన $\frac{కగ \times సత}{అప}$ ఇచట సత = అక ∴ $\frac{కగ \times అక}{అప} = \frac{భూమి \times అక}{అక + చగ}$ = కల= పెద్దఆబాధ.

ఇట్లు సూత్రపద్ధతి యంతయును ఉపపన్న మగుచున్నది.

2 రెండు వేణువులయొక్కయు మధ్యమున్న భూమి యెంతయున్నను పూర్వమునందు చూపబడిన అనుపాతములందు వేణుగుణనము వేణుయోగములును హారభాజ్యములై భూసంబంధము లేనివగుటచే, లంబమొకవిధముగనే యుండునని స్పష్టమగుచున్నది. ఈవిషయము క్షేత్రసంబంధమునుబట్టియు నిరూపింపబడుచున్నది.



ఈక్షేత్రమునందు చగ సమానముగు పబ రేఖ వేరుగ చూపబడినది అక, చగ, వేణుమధ్యమునందు కగభూమి. అట్లు అక, పబ వేణుమధ్యమునందు కబ భూమి. ఇపుడు సల లంబము చక, అగ సూత్రములయోగమునుండి గలిగినది. ఇచట అసక, చసగ కోణములు సమానములు. (రే 1 అ 15 ప్ర) అక, చగ రేఖలు సమానాంతరములు. కావున అసక, చసక క్షేత్రములకు సాజాత్యముండుటవలన $\frac{అక}{చగ} = \frac{అస}{గస}$ (రే 6 అ 4 ప్ర చూ.) అట్లు అకయ, పబయ క్షేత్రములకు సాజాత్యముండుటచే $\frac{అక}{పబ} = \frac{అయ}{బయ}$ కాని చగ=పబ చేయబడెను. కావున $\frac{అక}{చగ} = \frac{అక}{పబ}$ ∴ $\frac{అస}{గస} = \frac{అయ}{బయ}$ (రే. 6 అ 5 పరి) ఆకారణముచే (రే 6 అ 2 ప్ర. చే) సయ రేఖ కబ ఆధారముతో సమానాంతరరేఖ యగుచున్నది. కావున సల, యల, లంబములు సమానములగుచున్నవి.

అక్షేత్రలక్షణంసూత్రం

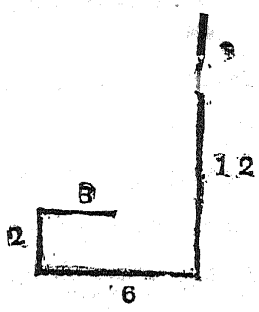
ధృష్టోద్దిష్ట మృజుభుజం క్షేత్రం యత్రైకబాహుత స్స్వల్పా।
తదితరభుజయుతి రథవా తుల్యా జ్ఞేయం తదక్షేత్రం॥ ౪౦॥

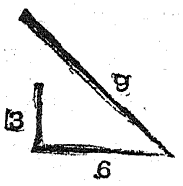
యత్ర = ఏక్షేత్రమునందు ఏకబాహుతః = ఒకభుజకంటె తదితరభుజయుతిః = ఆభుజకంటె ఇతరములగు భుజలయొక్క యోగము స్వల్పా = తక్కువ యగుచున్నదో అథవా = లేక తుల్యా = సమానమగుచున్నదో తత్ = ఆ ఋజు భుజం = తిన్నని భుజములుగల ధృష్టోద్దిష్టం = శఠునిచేనివ్వబడిన క్షేత్రం = క్షేత్రము అక్షేత్రం = క్షేత్రముకానిదియని జ్ఞేయం = తెలియదగినది.

ఉదాహరణమ్

చతురస్రే త్రిషడ్ద్వ్యర్కా భుజా స్త్ర్యస్రే త్రిషణ్ణవ।
ఉద్దిష్టా యత్ర ధృష్టేన తదక్షేత్రం వినిర్దిశేత్॥ ౪౧॥

162. ప్ర. తా॥ చతుర్భుజక్షేత్రమునందు 3, 6, 2, 12 భుజలనియు త్రిభుజక్షేత్రమున 3, 6, 9 భుజలనియు ఎవడేని శఠుడు అడిగినచో నాక్షేత్రము అక్షేత్రమని అనగా అట్లు క్షేత్రముండదని చెప్పవలయును.





ఏతే అనుపపన్నే క్షేత్రేభుజ ప్రమాణా ఋజుశలాకా భుజస్థానేషు విన్య స్యాను పపత్తి ర్దర్శనీయా

చతుర్భుజ క్షేత్రముకొరకు ఇవ్వబడిన నాలుగు భుజలలోను పెద్దభుజ 12 కంటె ఇతరభుజలయోగము $2+3+6 = 11$ తక్కువ యగుచున్నది.

అట్లు త్రిభుజక్షేత్రముకై యివ్వబడిన భుజలలో పెద్దభుజము 9 తో ఇతర భుజలయోగము $3+6 = 9$ సమమగుచున్నది. కావున ఇట్టిక్షేత్రములు ఉండవు అని చెప్పవలయును.

అట్లు ఇవ్వబడినకొలతలుగల సన్ననిడూచలు మొదలగువాటిని సమభూమి యందుంచి అసంభవమును తెలునుకొనవలయును.

ఉపపత్తి:—త్రిభుజక్షేత్రమందు భుజయుగ్మయోగము 3 వ భుజకంటె అధికమగును. (రే 1 అ 20 ప్ర) దానిచేతనే చతుర్భుజక్షేత్రమందు కర్ణరేఖ

కంటె ఇరుపార్శ్వములందునుగల రెండురెండు భుజలయోగ మధికమగును. దానింబట్టి చతుర్భుజక్షేత్రమునందు 3 భుజలయొక్క యోగము నాలవభుజ కంటె మిక్కిలి యధికము గాగలదు. ఇట్లు పంచభుజాదిక్షేత్రములందును తెలియదగినది.

ఆబాధాదిజ్ఞానాయ కరణసూత్రమార్యాద్వయం

త్రిభుజే భుజయోర్యోగ స్తదంతరగుణో భువాహృతో లబ్ధ్యా।
ద్విస్థాభూ రూనయుతా దలితాబాధే తయో స్స్యాతాం॥ ౮౧॥
స్వాబాధాభుజకృత్యో రంతరమూలం ప్రజాయతే లంబః।
లంబగుణం భూమ్యర్ధం స్పష్టం త్రిభుజే ఫలం భవతి॥ ౮౨॥

టీ॥ త్రిభుజే = త్రిభుజక్షేత్రమందు భుజయోః = భుజలయొక్క యోగః—యోగము తదంతరగుణః = భుజలయొక్క అంతరముచే గుణింపబడినదై భువా=భూమిచే హృతః=భాగింపబడినదై లబ్ధ్యా=లబ్ధముచే ద్విస్థా=రెండుచోట్ల వ్రాయబడిన భూః = భూమి ఊనః యుతా = వ్యవకలింపబడినదియు కలుపబడినదియునై దలితా = (వేర్వేర) అర్ధింపబడినదియునై తయోః = ఆభుజలసంబంధములైన అబాధే = ఆబాధలు స్యాతాం = అగుచున్నవి. స్వాబాధాభుజకృత్యోః = తమతమ ఆబాధయొక్కయు భుజముయొక్కయు వర్గములయొక్క అంతరమూలం = అంతరముయొక్కమూలము, లంబః =లంబము ప్రజాయతే = అగుచున్నది భూమ్యర్ధం = భూమియొక్క సగము లంబగుణం= లంబముచేగుణింపబడినదై త్రిభుజే=త్రిభుజక్షేత్రమందు స్పష్టం = స్ఫుటముగ ఫలం = చతురము, భవతి = అగుచున్నది.

163. ప్ర. (1) (చూ 149 ప్ర 11 పరి) రెండుభుజలయొక్కయు యోగమును ఆభుజలఅంతరముచే గుణింపుము. ఆగుణనఫలమును భూమిచే భాగింపనగు లబ్ధమును ఒకచోట భూమియందు కలుపుము ఒకచోట భూమివలన వ్యవకలింపుము. ఆరెంటిని అర్ధింపుము. అవి ఆబాధలగును. అందు పెద్దఆబాధ పెద్ద భుజసంబంధమైనది చిన్నఆబాధ చిన్నభుజసంబంధమైనది.

(2) ఆబాధయొక్కయు దానిభుజయొక్కయు వర్గముల అంతరముయొక్క మూలము లంబమగును.

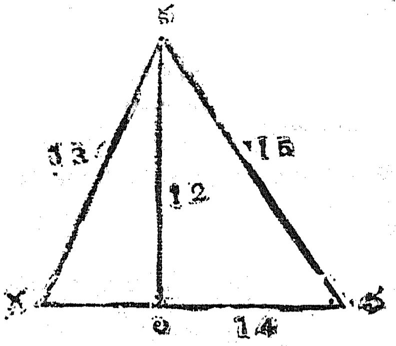
(3) లంబముచే భూమినిగుణించి అర్ధించినను భూమ్యర్ధమునుగుణించినను ఆత్రిభుజక్షేత్రమునందలి స్ఫుటఫలమగును.

ఉదాహరణమ్

క్షేత్రే మహీ మనుమితా త్రిభుజే భుజౌతు యత్ర త్రయోదశ తిథిప్రమితౌ చ మిత్ర। తత్రావలంబకమితిం కథ యాబధేచ క్షిప్రం తథాచ సమకోష్ఠమితిం ఫలాఖ్యాం॥ ౮౩॥

తా॥ మిత్రమా! ఒకత్రిభుజక్షేత్రమందు భూమి 14, భుజలు ఒకభుజ 13 రెండవభుజ20 ఆ త్రిభుజమందు లంబప్రమాణమునున్ను ఆబాధలనున్ను అట్లు శీఘ్రముగ ఫలమను పేరుగల చతురమునున్ను చెప్పుము.

న్యాసః. లబ్ధేఆబాధే ౫, ౯ లంబశ్చ ౧౨ క్షేత్రఫలంచ ౮౪



ఇచట ప్రథమభుజ = కగ = 13, ద్వితీయభుజ = కచ = 15, భూమి = గచ = 14, లంబము = కల = 12, లగ = ప్రఆ = 5, లచ = ద్విఆ = 9 చతురము 84 అగుచున్నది. ఎట్లనగా భుజలును భూమియు మాత్రమే తెలిసినవి. వాటిచే గణితము చూపబడుచున్నది. భుజలయోగము 13+15 = 28 ను భుజలఅంతరము 15 — 13 = 2 చే గుణింప 28 × 2 = 56, భూమిచే భాగింప 56 ÷ 14 = 4 ఈలబ్ధమును భూమియందుకలుప 14 + 4 = 18 భూమివలనవ్యవకలింప 14 — 4 = 10 అర్ధింప 9,5 ఆబాధలు. అనగా గల = 5, లచ = 9 ప్రథమభుజ 13 వర్గము 169 వలన ప్రథమాబాధా 5 వర్గము 25 ను వ్యవకలింప 169 — 25 = 144 లంబవర్గము. దీనిమూలము 12 లంబము. లేక ద్వితీయాబాధావర్గము 81 ను ద్వితీయభుజవర్గమువలన వ్యవకలింప 225—81 = 144 లంబవర్గ మదియే యగుచున్నది. లంబము 12 చే భూమి 14 ని గుణింప 168 అర్ధింప 84 ఫలము. లేక లంబముచే భూమ్యర్ధమును గుణింప $12 \times \frac{14}{2} = 12 \times 7 = 84$ ఫలము.

ఉపపత్తి: (1) పై త్రిభుజమునందు 'కల' లంబముచే రెండు జాత్యక్షేత్రము లగుచున్నవి. ఆ రెండిటియందును లంబము కోటి. ఆయా త్రిభుజముయొక్క భుజలు కర్ణములు, ఆబాధలు భుజములును, అగుచున్నవియనుట స్పష్టముగ గన్పట్టుచున్నది.

కావున (150 ప్రి చే) కగ^2 — గల^2 = కల^2 అట్లు కచ^2 — లచ^2 = కల^2 అగుచున్నది.

అనగా లంబ^2 = ప్రభు^{2} — ప్రఆ^2 = ద్విభు^{2} — ద్విఆ^2 సమశోధనము చేయగా అనగా రెండుపక్షములందు ప్రభు^{2}గనిని తీసివేసి రెండుపక్షములందును ద్విఆ^2 కలుపగా ద్విఆ^2 — ప్రిఆ^2 = ద్విభు^{2} — ప్రిభు^{2} (104 ప్ర. ఉపపత్తిచే)

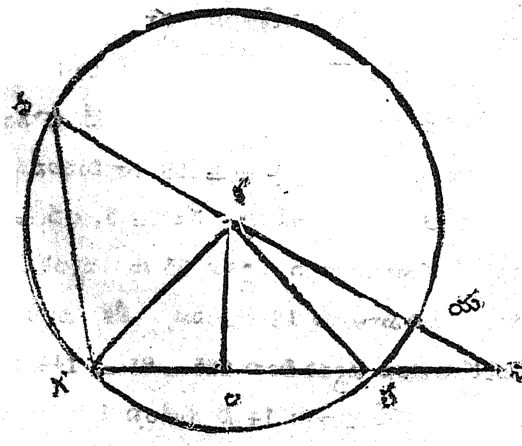
(ద్విభు + ప్రిభు) × (ద్విభు — ప్రిభు) = ద్విభు^{2} — ప్రిభు^{2}

∴ ద్విఆ^2 — ప్రిఆ^2 = (ద్విభు + ప్రిభు) × (ద్విభు — ప్రిభు) (104 ప్రి. చే)

$$\frac{\text{ద్విఆ}^2 - \text{ప్రిఆ}^2}{\text{ద్విఆ} + \text{ప్రిఆ}} = \frac{(\text{ద్విభు} + \text{ప్రిభు}) \times (\text{ద్విభు} - \text{ప్రిభు})}{\text{భూ}} = \text{ద్విఆ} - \text{ప్రఆ}$$

ఇట్లు ఆబాధాంతరము తెలియుటవలన (103 ప్రి. చే) ఆబాధలు తెలియుచున్నవి. ఇట్లు ఆబాధానయనము ఉపపన్నమగుచున్నది.

(2) లంబము కోటి యగుటచే కర్ణభుజల వర్గాంతరమునకు మూలము కోటి గావున లంబానయనము ఉపపన్నమగుచున్నది.



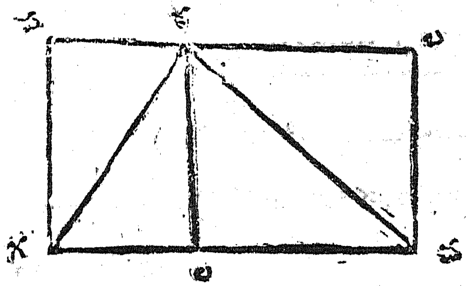
(3) లేక ఆబాధానయనమునకు మఱియొక ఉపపత్తి. పైన చూపిన కగచ త్రిభుజమునందు చిన్నభుజయగు కగ భుజను వ్యాసార్ధముచేసి క కేంద్రము నుండి వృత్తము చేయబడినది. ఆవృత్తము గచభూమిని త బిందువునందును కచ భుజను య బిందువునందును ఛేదించుచున్నది. పిమ్మట కచ భుజ వ బిందువువరకును పెంచబడినది. పగ రేఖయు చేయబడెను ఇందు వృత్త వ్యాసార్ధములగుటచే కగ = కత = కయ = కప కావున కగత

త్రిభుజము సమద్విబాహుకమగుటచే 'గల' = 'లత' కావున తచ ఆబాధాంతరమగుచున్నది. అట్లు 'యచ' భుజాంతరమగుచున్నది. 'పచ' భుజయోగమగుచున్నది. ఇందు య బిందువునుండి త బిందువువరకును సరలరేఖను చేసినచో వృత్తాంతర్గతమగు 'పయతగ' చతుర్భుజమును యతచ అను వృత్తబహిర్గతమగు త్రిభుజమును గాగలవు అందు వృత్తాంతర్గతచతుర్భుజమునందు (రే 3అ 21ప్రి)చే సమ్ముఖకోణద్వయ యోగము సమకోణద్వయతుల్యమగుటచేతనును (రే 1 అ 13 ప్రి)చే ఒకరేఖయందొకపార్శ్వమునందు ఇతరరేఖాసంయోగముచే నైన కోణద్వయయోగము సమకోణద్వయయోగతుల్యమగుటచేతనును ∠గపచ = ∠యతచ ఇట్లు ∠పగచ = ∠చయత అగుచున్నవి. పచగ కోణ ముభయక్షేత్రనిష్ఠమగుటచే పగచ త్రిభుజమును యతచ త్రిభుజమును సజాతీయములగుచున్నవి. కావున సంబంధ సామ్యముచే గచ : పచ : : యచ : తచ ∴ $\frac{\text{పచ}}{\text{గచ}} = \frac{\text{తచ}}{\text{యచ}}$

$$\therefore \text{తచ} = \frac{\text{పచ} \times \text{యచ}}{\text{గచ}} = \frac{\text{భుజయోగ} \times \text{భుజాంతర}}{\text{భూమి}} = \text{ఆబాధాంతరము.}$$

ఆబాధాంతరయోగములవలన (103 ప్రి. చే) ఆబాధలు తెలియును.

(4) ఫలానయనమునకు ఉపపత్తి: ఇదివరలో (150 ప్రి రుజువు చూ) చతురము యొక్క స్వరూపము వర్గక్షేత్రమున చూపబడినది. అట్లు ఆయతక్షేత్రమునందును భుజకోటిఘాతము చతురమగుచున్నది. (లీలావతినూ శ్లో 89 చూ) కావున జాత్యక్షేత్రము ఆయతక్షేత్రముయొక్క అర్ధము (సగము) అగుటచే జాత్యమునందు భుజకోటిఘాతముయొక్క సగము ఫలమగును.



ఇందు కల రేఖతో సమానాంతరములగు గప, చబ రేఖలును గలరేఖా సమానాంతరమగు పక రేఖయు లచ సమానాంతరమగు కబరేఖయు చేయబడినవి. కావున 'కపగల' ఆయతము కగల జాత్యమునకు ద్విగుణమై యున్నది. అట్లు కలచ జాత్యమునకు కబచల ఆయతము ద్విగుణమైయున్నది.

కావున కల × గల = కపగల ఆయతఫలము. ఇట్లు కల × లచ = 'కబచల' ఆయతఫలము కావున $\frac{\text{కల} \times \text{గల}}{2}$ = కగల జాత్యఫలము. $\frac{\text{కల} \times \text{లచ}}{2}$ = 'కలచ' జాత్యఫలమున్ను అగుచున్నవి.

$$\therefore \frac{(\text{కల} \times \text{గల})}{2} + \frac{(\text{కల} \times \text{లచ})}{2} = \text{కగచ త్రిభుజఫలము.}$$

$$= \frac{\text{కల} \times (\text{గల} + \text{లచ})}{2} = \frac{\text{లంబ} \times \text{భూ}}{2} = \text{లంబ} \times \frac{\text{భూ}}{2} = \text{కగచ త్రిభుజఫలము}$$

ఇట్లు ఫలానయనమున్ను ఉపపన్నము లగుచున్నవి.

164. ప్రి. పై (1) ఉపపత్తియందలి ఆబాధాంతరస్వరూపమునుబట్టి లంబానయనము.

$$\text{ఆబాధాంతర} = \text{ఆ అం} = \frac{(\text{ద్విభు} + \text{ప్రిభు}).(\text{ద్విభు} - \text{ప్రిభు})}{\text{భూ}}$$ దీని చేత ఆబాధలు

$$\frac{\text{ఆయో} + \text{ఆఅం}}{2} = \frac{\text{భూ}^2 + \text{ద్విభు}^2 - \text{ప్రిభు}^2}{2\ \text{భూ}} = \text{ద్వి ఆ}$$

$$\frac{\text{ఆయో} - \text{ఆ అం}}{2} = \frac{\text{భూ}^2 - \text{ద్విభు}^2 + \text{ప్రిభు}^2}{2\ \text{భూ}} = \text{ప్రి ఆ.}$$

ఆబాధావర్గమును భుజవర్గమువలన వ్యవకలింప లంబవర్గమగును. కావున లంబవర్గము.

$$\text{ప్రిభు}^2 - \text{ప్రిఆ}^2 = \text{ప్రిభు}^2 - \left\{\frac{\text{భూ}^2 - \text{ద్విభు}^2 + \text{ప్రిభు}^2}{2\ \text{భూ}}\right\}^2$$

$$= \frac{4\ \text{భూ}^2 . \text{ప్రిభు}^2 - (\text{భూ}^2 - \text{ద్విభు}^2 + \text{ప్రిభు}^2)^2}{4\ \text{భూ}^2}$$

$$= (2\text{భూ} \times \text{ప్రిభు} + \text{భూ}^2 - \text{ద్విభు}^2 + \text{ప్రిభు}^2)$$

$$\times (2\text{భూ}.\text{ప్రిభు} - \text{భూ}^2 + \text{ద్విభు}^2 - \text{ప్రిభు}^2) \times \frac{1}{4\text{భూ}^2}$$

$$= \{(\text{భూ} + \text{ప్రిభు})^2 - \text{ద్విభు}^2\} \times \{\text{ద్విభు}^2 - (\text{భూ} - \text{ప్రిభు})^2\} \times \frac{1}{4\text{భూ}^2}$$

$$= \{(\text{భూ} + \text{ప్రిభు} + \text{ద్విభు})\ (\text{భూ} + \text{ప్రిభు} - \text{ద్విభు})\}$$

$$\times \{(\text{ద్విభు} + \text{భూ} - \text{ప్రిభు})\ (\text{ద్విభు} + \text{ప్రిభు} - \text{భూ})\} \frac{1}{4\text{భూ}^2} \times \frac{4}{4}$$

$$= \left(\frac{\text{భూ} + \text{ప్రిభు} + \text{ద్విభు}}{2} \times \frac{\text{భూ} + \text{ప్రిభు} - \text{ద్విభు}}{2} \times \frac{\text{భూ} + \text{ద్విభు} - \text{ప్రిభు}}{2}\right.$$

$$\left. \times \frac{\text{ప్రిభు} + \text{ద్విభు} - \text{భూ}}{2}\right) \times \frac{4}{\text{భూ}^2}$$ దీనియొక్క మూలము లంబము అగుచున్నది.

$$\text{కావున లంబ} = \frac{2}{\text{భూ}} \times$$

$$\sqrt{\frac{\text{భూ} + \text{భు} + \text{ద్విభు}}{2} . \frac{\text{భూ} + \text{భు} - \text{ద్విభు}}{2} . \frac{\text{భూ} + \text{ద్విభు} - \text{భు}}{2} . \frac{\text{భు} + \text{ద్విభు} - \text{భూ}}{2}}$$

(ఇచట ప్రిభు = భు ఇట్లు గ్రహింపవలయును.)

ఇందులకు మ. మ. పం. బాపుదేవశాస్త్రిగారి శ్లోకసూత్రము.

త్రిభుజే సమస్తదోర్యుతిదలం చతుస్స్థం భుజైఃక్రమాద్రహితం।
తద్వధమూలా ద్విఘ్నా ద్భూభక్త్యా లబ్ధం భవేల్లంబః॥

తా॥ త్రిభుజక్షేత్రమునందు అన్ని భుజలయొక్కయు యోగమును అర్ధించి నాలుగుస్థానములందుంచి ఒకొక్కయోగార్ధమువలన ఒకొక్కభుజను ఇట్లు 3 భుజలను వేరువేరుగ వ్యవకలింపనగు వాటియొక్క గుణనముయొక్క వర్గమూలమును 3 చే గుణించి భూమిచే భాగింప లంబమగును. పైస్వరూపమునందు మొదటిసంఖ్య (భూ + ప్రిభు + ద్విభు) ఈభాగము సర్వభుజయోగమైయున్నది. దీనిని అర్ధించి ద్వితీయభుజను వ్యవకలించినచో

$$\frac{\text{భూ} + \text{ప్రిభు} + \text{ద్విభు}}{2} - \text{ద్విభు} = \frac{\text{భూ} + \text{ప్రిభు} - \text{ద్విభు}}{2}$$ అగుచున్నది.

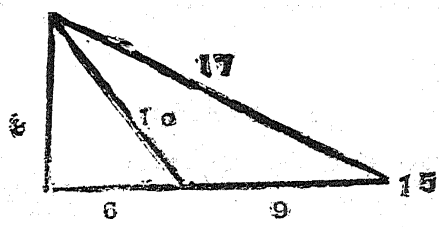
ఇదియే రెండవసంఖ్యగానున్నది. ఇట్లు 3, 4 సంఖ్యలును గ్రహింపనగియున్నవి. తక్కినగణితము శ్లోకమునుబట్టి చేయుట పైస్వరూపమువలన స్పష్టము గాగలదు.

'ఋణాబాధోదాహరణం.

దశసప్తదశప్రమౌ భుజౌ త్రిభుజే యత్ర నవప్రమా మహీ।
అబధే వద లంబకం తథా గణితం గాణితికాశు తత్రమే॥ ౮౦॥

తా॥ గణితజ్ఞా! ఏత్రిభుజక్షేత్రమునందు భుజలు 10, 17 ప్రమాణముగల వియో భూమి 9 ప్రమాణముగలదియో ఆక్షేత్రమునందు ఆబాధలను లంబమును ఆప్రకారము ఫలమునున్ను నాకు శీఘ్రముగ చెప్పుము.

న్యాసః. భుజౌ ౧౦.౧౭ భూమిః ౯ అత్ర "త్రిభుజేభుజయోర్యోగ" ఇత్యాదినా లబ్ధం ౨౧ అనేన భూరూనా నస్యాత్. అస్మాదేవ భూ రపనీతా ౧౨ శేషార్ధమృణగతా ఆబాధా దిగ్వైపరీత్యేనేత్యర్థః జాతేఆబాధే ౬, ౧౫ అతఉభయతో౽పి జాతోలంబః ౮ ఫలం ౩౬.



ఇచట భూమి $= 9$, ప్రభు $= 10$ ద్విభు $= 17$, భుజయోగము 27ను భుజాంతరముచే భాగింప $189 \div 9 = 21$ లబ్ధము. దీనిని భూమియందుకలిపి అర్ధింప $\frac{21+9}{2} = \frac{30}{2} = 15$ ఒక ఆబాధ యన దగియున్నది. భూమివలన తీసివేసియర్ధింప రెండవ ఆబాధయగును కాని అట్లు తీసివేయబడదు. కావున విపరీతముగ లబ్ధమువలననే తీసివేయు ($9 - 21 = -12$ చూ 94 ప్రకింద) 12 శేషము. దీనిని అర్ధింప 6 ఇదివిపరీతశోధనమువలన ఋణమగుచున్నదియని తెల్లియుచున్నది. ♦అనగా ఈఆబాధ క్షేత్రమునకు బహిర్గతమగుచున్నది. లంబమూలమునుండి భూమివరకును 6, భూమితుదవరకును 15, ఇట్లు పరిమాణములు వచ్చినవి. లంబము 8 అగుచున్నది, ఇట్టిలంబముచే భూమినిగుణించియర్ధింప

$$\frac{8 \times 9}{2} = \frac{72}{2} = 36 \text{ ఫలము}$$

ఈలంబము 10 యొక్కయు 6 యొక్కయు వర్గాంతరమునకైనను 17 యొక్కయు 15 యొక్కయు వర్గాంతరమునకైనను మూలమగుచున్నది. ఇట్లు క్షేత్రబహిర్గతలంబమువలనైనను ఫలము వచ్చుననియు ఋణాబాధవలననైనను లంబమువచ్చుననియు తెలియుటకై 9 భూమిగకల్పించి ఉదాహరణము ఇవ్వబడినని.

♦ "లఘుబాహోరాబాధావ్యస్తాయదిసా బహిర్భవేత్క్షేత్రాత్." ఆర్యభట్టు.

లేక పైక్షేత్రమునందు 17 భూమిగానుకొనుచో 9, 10 భుజలగుచున్నవి. భుజయోగము 19 ను భుజాంతరము 1 చే గుణింప 19, భూమిచే భాగింప $\frac{19}{17}$ లబ్ధము. దీనిచే ఆబాధలు. $\frac{17}{1} + \frac{19}{17} = \frac{289+19}{17} = \frac{308}{17}$ అర్ధింప $\frac{154}{17}$

ఇట్లు రెండవ ఆబాధ $\frac{135}{17}$ ఆబాధాభుజలవర్గాంతరము $\frac{28900}{289} - \frac{23716}{289} = \frac{5184}{289}$

లేక $\frac{23409 - 18225}{289} = \frac{5184}{289}$ లంబవర్గము దీనియొక్క మూలము $\frac{72}{17}$ దీనిని భూమ్యర్ధముచేగుణింప $\frac{72}{17} \times \frac{17}{2} = 36$ ఫలము అగుచున్నది.

చతుర్భుజత్రిభుజయో రస్పష్టస్పష్టఫలానయనేకరణసూత్రంవృత్తం.
సర్వదోర్యుతిదలంచతుస్థితం బాహుభిర్విరహితంచతద్ధతేః।
మూలమస్ఫుటఫలంచతుర్భుజే స్పష్టమేవముదితంత్రిబాహుకే॥ ౮౩॥

టీ॥ సర్వదోర్యుతిదలం = సర్వభుజలయొక్కయు యోగముయొక్క సగము చతుస్థితం = నాలుగుప్రదేశములందుంచబడినదై బాహుభిః = భుజలచే విరహితంచ = తీసివేయబడినదిగను (చేయుదిగినది) తద్ధతేః = అట్లు తీసివేయగా మిగిలినవాటియొక్క గుణనఫలముయొక్క మూలం = మూలము చతుర్భుజే = చతుర్భుజక్షేత్రమునందు అస్ఫుటఫలం = స్ఫుటముగానిఫలము (అనగాకొన్నిటియందు సరిపడునదియు కొన్నిటియందు సరిపడనిదియు నగును) ఏవం = ఈప్రకారముగా త్రిబాహుకే = త్రిభుజక్షేత్రమునందు స్పష్టం = స్ఫుటమైనఫలమై ఉదితం = చెప్పబడినది.

త్రిభుజ వృత్తాంతర్గతచతుర్భుజముల ఫలము.

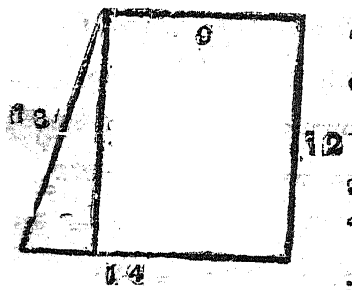
165. ప్ర. (1) త్రిభుజక్షేత్రమునందు మూడుభుజలనుకలిపి యోగము నర్ధించి అయోగార్ధమును 4చోటులందు వేర్వేరుగవ్రాసి మూడుస్థలములందును వేరువేరుగ 3భుజలను వ్యవకలింపుము. అట్లు వ్యవకలింపనగు శేషములయొక్కయు నాలవప్రదేశమందున్న కేవలయోగార్ధముయొక్కయు గుణనముయొక్కమూలము ఫలమగును.

(2) చతుర్భుజక్షేత్రమునందు నాలుగుభుజలయొక్కయుయోగమునర్ధించి దానివలన 4 భుజలను వేరువేరుగవ్యవకలించి ఆ శేషముల పరస్పరము గుణింపును. ఈగుణనఫలముయొక్క మూలము కొన్నిటియందు సరిపడును. కొన్నిటియందు సరిపడదు. అనగా ♦ వృత్తాంతర్గత చతుర్భుజక్షేత్రమునందు సరిపడును. తదితర చతుర్భుజములందు సరిపడదు.

ఉదాహరణమ్

భూమిశ్చతుర్దశకరా ముఖమంకసంఖ్యం బాహూ త్రయోదశ
దివాకరసమ్మితౌచ। లంబోపియత్ర రవిసంఖ్యకఏవ తత్ర క్షేత్రేఫలం
కథయ తత్కథితం యదాద్యైః॥౮౧॥

తా॥ ఒకచతుర్భుజక్షేత్రమునందు భూమి 14 హస్తములు ముఖము 9హస్తములు భుజలు ఒకటి 13 హస్తములు రెండవది 12 హస్తములు లంబమున్ను ఆక్షేత్రమునందు 12హస్తములు గలదు ఆక్షేత్రమునందు పూర్వులు ఏఫలమునుచెప్పిరో ఆఫలమును చెప్పుము.



న్యాసః. భూమిః౧౪ ముఖం౯ బాహూ ౧౩, ౧౨ ఉక్తవత్కరణేన జాతం క్షేత్రఫలంకరణీ ౧౯౮౦౦ అస్యాః పదంకించిన్న్యూనమేకచత్వారింశచ్ఛతం ౧౪౧ ఇదమత్రక్షేత్రే నవాస్తవంఫలం కింతు "లంబేననిఘ్నంకుముఖైక్యఖండ"మితి వక్ష్యమాణకరణేన వాస్తవంఫలం౧౩౮

భూమి 14 ముఖము 9 భుజలు 13, 12 (165 పు 2 చే) సర్వభుజయోగము $13+9+14+12=48$ దీనిని అర్ధింప 24 దీనివలన వేరువేరుగ భుజలను వ్యవకలింప $24-13=11$, $24-14=10$, $24-12=12$, $24-9=15$ ఈశేషములగుణనము $11\times 10\times 12\times 15=110\times 180=19800$ దీనియొక్క వర్గమూలము ఇంచుమించుగ 141 ఇది ఫలమగుచున్నది. కాని

♦ స్పృశంతి పరిధిం సర్వేకోణా యస్త్రేత్రవర్తినః।తద్వృత్తాంతర్గతం క్షేత్రమితి సువ్యపదిశ్యతే॥ (రేఖాగణిత 4 అ 3 పరి.)

ఈక్షేత్రము వృత్తాంతర్గతముకాకుండుటచే నీఫలము వాస్తవముగాదు. వాస్తవఫలమును తెలియవలసినచో చెప్పబోవు (లీలావతిశ్లోకసూత్రము $89\frac{1}{2}$) పద్ధతిచే భూమియొక్కయు ముఖముయొక్కయు యోగముయొక్కసగము లంబముచే గుణింపబడినచో ఇట్టిసమానలంబచతుర్భుజక్షేత్రములందు ఫలమగును. కావున భూమి 14 ముఖము 9 వీటియోగార్ధము $\frac{14+9}{2}=\frac{23}{2}$ దీనిని లంబముచే గుణింప $\frac{23}{2}\times 12=23\times 6=138$ ఇది వాస్తవఫలమగుచున్నది లేక (163 పు. ఉపపత్తినిబట్టి) ఈక్షేత్రమును రెండుక్షేత్రములుగ విభజించి వేర్వేరఫలముల గనుగొని కలిపినచో మొత్తము క్షేత్రమునకైనఫలము అగుచున్నది. ఇందు కుడివైపు భుజయును లంబమున్ను సమములగుటచే ఆభుజయును లంబమే యగుచున్నది. కావున సమలంబక్షేత్రమగుటచే నవి సమానాంతరములు. ఈకారణముచే లంబమునకు కుడివైపున ఆబాధ ముఖముతో సమమైనదగును. ఎడమవైపున $14-9=5$ ఇట్లు భూమిలోముఖమును తీసివేయనగు సంఖ్యతో సమమగును. ఇట్లు లంబమునకు కుడివైపున ఆయతక్షేత్రమున్ను ఎడమవైపున జాత్యక్షేత్రమున్ను ఐనవి. ఆయతక్షేత్రఫలము $12\times 9=108$ అగుచున్నది, జాత్యక్షేత్రఫలము $\frac{12\times 5}{2}=30$ అగుచున్నది. రెండిటియొక్కయు యోగము $108+30=138$ అగుచున్నది.

అత్ర త్రిభుజస్య పూర్వోదాహృతస్య న్యాసః. భూమిః ౧౪ భుజౌ ౧౩,౧౫ అనేనాపిప్రకారేణ తదేవ వాస్తవం ఫలం ౮౪.

(ఉదా: 79 శ్లో) పూర్వోదాహృతత్రిభుజక్షేత్రమందు భూమి 14 భుజలు 13, 15 ఇవ్వబడినవి. వాటిచే పైపద్ధతిప్రకారము ఫలము చూపబడుచున్నది

సర్వభుజయోగము $14+13+15=42$ అర్ధింప 21 వేరువేరుగ భుజలను వ్యవకలింప $21-14=7$, $21-13=8$, $21-15=6$ ఈశేషములయొక్కయు సర్వభుజయోగార్ధముయొక్కయు గుణనఫలముయొక్క మూలము త్రిభుజమునందుఫలము. కావున $\sqrt{7\times 8\times 6\times 21}=\sqrt{336\times 21}=\sqrt{7056}=84$ ఫలము. పూర్వ (163 పు) పద్ధతిచే సాధింపబడినఫలమే యగుచున్నది. కావున నిది స్ఫుటము.

ఉపపత్తి: (1) 163 ప్రి చే లంబముచే భూమ్యర్ధమునుగుణింపఫలమగును కావున (164 ప్రి. చే) సాధించినలంబమును $\frac{\text{భూ}}{2}$ దీనిచేగుణింప ఫలము. $\therefore$ ఫ =

$$\sqrt{\frac{(\text{భూ}+\text{భు}+\text{ద్విభు})}{2}\cdot\frac{(\text{భూ}+\text{భు}-\text{ద్విభు})}{2}\cdot\frac{(\text{భూ}+\text{ద్విభు}-\text{భు})}{2}\cdot\frac{(\text{భు}+\text{ద్విభు}-\text{భూ})}{2}}$$

(ఇచట భు = ప్రిభు అని గ్రిహింపవలెను.)

ఇట్లు త్రిభుజఫలాయన ముపపన్న మగుచున్నది.

(2) త్రికోణమితిజ్యోత్పత్తిచే

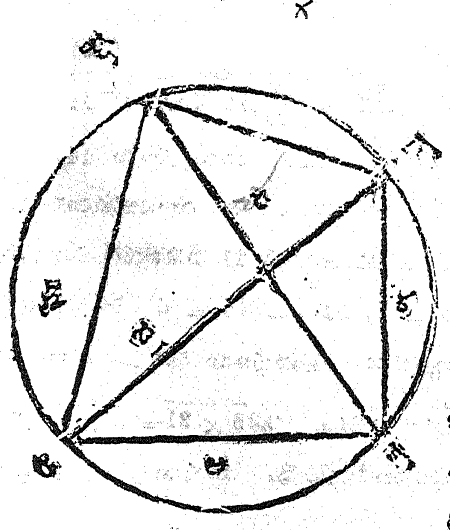
$\text{ఫ} = \text{లంబ}\times\frac{\text{భూ}}{2}$ (163 ప్రి. చూ). ఇందు $\frac{\text{ప్రిభు}}{\text{ప్రిభు}}$ దీనిచే గుణింప

$$\text{ఫ}=\frac{\text{భూ}}{2}\times\frac{\text{లంబ}\times\text{ప్రిభు}}{\text{ప్రిభు}}=\frac{\text{భూ}\times\text{ప్రిభు}}{2}\times\frac{\text{లంబ}}{\text{ప్రిభు}}=\frac{\text{భూ}\times\text{ప్రిభు}\times\text{జ్యా}\angle\text{గ}}{2}$$

ఇచట జ్యా∠గ = గ కోణజ్యా, ప్రిథమభుజ, భూమి =వీటిసంయోగము నందైన కోణముయొక్క జ్యా. అనగా త్రిభుజక్షేత్రిమునందు రెండుభుజలమధ్య యందలి కోణముయొక్క 'జ్యా'ను ఆరెండుభుజలయొక్కయు గుణనముచే గుణించి అర్ధించినచో ఫలమగును. అనిస్పష్టము. ఇందులకు మ. మ, పం. సుధాకరద్వివేదిగారి సూత్రిము.

భుజమధ్యగతా జీవా త్రుణ్ణా దోష్ణో ర్వధేన సా।
దళితా త్రిభుజస్య స్యా త్ఫలం వాన్యప్రికారతః॥ అనియున్నది.

(3) చతుర్భుజక్షేత్రిఫలానయనోపపత్తి చెప్పబడుచున్నది.



ఇచట వృత్తాంతర్గత చతుర్భుజము చూపబడినది. ఇందు ఆకాగాకోణ=కా, కాగాఘా కోణ = గా, గాఘా ఆకోణ =ఘా, ఘాఆకాకోణ=ఆ, కాగాభుజ=క ఆకా భుజ = అ, గాఘా భుజ = గ, ఘాఆ భుజ = ఘ, కాఘాకర్ణ = చ, ఆగాకర్ణ=జ, కగచ భుజలుగల త్రిభుజమందు చరేఖయే భూమియగుచున్నది. ఇట్లు అఘచ త్రిభుజమందును చ రేఖ భూమియగుచున్నది. అట్లు ఘగజ భుజల త్రిభుజమందుజరేఖభూమి. అకజభుజల

త్రిభుజయందును జరేఖయే భూమియగుచున్నది. రెండుత్రిభుజములును వాటివాటి భూరేఖలు కలియునట్లుంచుటచే అకగఘ చతుర్భుజక్షేత్రిమగు చున్నది. (త్రికోణమితి 47 ప్ర. 6 చూ)

(అకగఘ) చతుర్భుజఫల = కగచ త్రిభుజఫల + అఘచ త్రిభుజఫల

(కగచ) త్రిభుజఫల $=\frac{\text{క}.\text{గ}.\text{జ్యాగా}}{2}$, అఘచత్రిభుజఫల $=\frac{\text{అ}.\text{ఘ}.\text{జ్యాఆ}}{2}$

కోణీయజ్యాదిపదార్ధములు 1టి వ్యాసార్థముగాగల వృత్తమందలివియని తెలియవలయును.

వృత్తాంతర్గతచతుర్భుజమునందు పరస్పరాభిముఖకోణద్వయ యోగము సమకోణద్వయముతో సమమగుచున్నది (రే 3అ 22ప్రి. చూ) కావున జ్యాగా=జ్యా (180 — ఆ) "కోణజ్యా కోణోనభార్ధజ్యయా తుల్యా" అను జ్యోత్పత్తిసిద్ధాంతముచే జ్యా (180 — ఆ)=జ్యా ఆ $\therefore$ జ్యాగా=జ్యాఆ అగుచున్నది.

(4) పైనచూపబడిన (2) సుధాకరోక్త త్రిభుజఫలానయనసూత్రిముచే

$$\text{అఘచత్రిభుజఫలం}=\frac{\text{అ}\times\text{ఘ}}{2}\cdot\text{జ్యాఆ}=\sqrt{\frac{\text{స}}{2}\times\left(\frac{\text{స}}{2}-\text{అ}\right)\left(\frac{\text{స}}{2}-\text{ఘ}\right)\left(\frac{\text{స}}{2}-\text{చ}\right)}$$

ఇచట అ+ఘ+చ=స= సర్వభుజైక్యమని గ్రిహింపవలయును.

$$\therefore \text{జ్యా ఆ}=\frac{2}{\text{అ}.\text{ఘ}}\times\sqrt{\frac{\text{స}}{2}\left(\frac{\text{స}}{2}-\text{అ}\right)\left(\frac{\text{స}}{2}-\text{ఘ}\right)\left(\frac{\text{స}}{2}-\text{చ}\right)}$$

$$\therefore \text{జ్యా}^2\text{ ఆ}=\frac{4}{\text{అ}^2.\text{ఘ}^2}\times\frac{\text{స}}{2}\left(\frac{\text{స}}{2}-\text{అ}\right)\left(\frac{\text{స}}{2}-\text{ఘ}\right)\left(\frac{\text{స}}{2}-\text{చ}\right)$$

$$=\frac{(\text{అ}+\text{ఘ}+\text{చ})(\text{ఘ}+\text{చ}-\text{అ})}{4}\times\frac{(\text{అ}+\text{చ}-\text{ఘ})(\text{అ}+\text{ఘ}-\text{చ})}{4}\times\frac{4}{\text{అ}^2.\text{ఘ}^2}$$

$$=\frac{2\text{ఘ}^2.\text{చ}^2+2\text{అ}^2.\text{చ}^2+2\text{అ}^2.\text{ఘ}^2-\text{ఘ}^4-\text{అ}^4-\text{చ}^4}{4\text{ అ}^2.\text{ఘ}^2}$$

రూపవ్యాసార్ధమందు $1-\text{జ్యా}^2\text{ఆ}=\text{కోజ్యా}^2\text{ఆ}$ అగుచున్నది గావున

$$\text{కోజ్యా}^2\text{ఆ}=1-\frac{2\text{ఘ}^2.\text{చ}^2+2\text{అ}^2.\text{చ}^2+2\text{అ}^2.\text{ఘ}^2-\text{ఘ}^4-\text{అ}^4-\text{చ}^4}{4\text{ అ}^2.\text{ఘ}^2}$$

$$= \frac{4\text{అ}^2\text{ఘ}^2 - 2\text{ఘ}^2.\text{చ}^2 - 2\text{అ}^2.\text{చ}^2 - 2\text{అ}^2.\text{ఘ}^2 + \text{ఘ}^4 + \text{అ}^4 + \text{చ}^4}{4\ \text{అ}^2.\text{ఘ}^2}$$

$$= \frac{\text{ఘ}^4 + \text{అ}^4 + \text{చ}^4 - 2\text{ఘ}^2.\text{చ}^2 - 2\text{అ}^2.\text{చ}^2 + 2\text{అ}^2.\text{ఘ}^2}{4\ \text{అ}^2\ \text{ఘ}^2}$$

మూలమును గనుగొనుటవలన నీక్రిందిస్వరూపము సిద్ధించుచున్నది.

$\therefore$ కోజ్యా అ $= \dfrac{\text{అ}^2 + \text{ఘ}^2 - \text{చ}^2}{2\ \text{అ}.\text{ఘ}}$ దీనిచే

భుజవర్గయుతి ర్భూమివర్గోనా భుజఘాతహృత్।
దలితా త్రిభుజ స్యాస్యకోటిజ్యా భుజసంయుతా॥ అను
మ. మ. పం. సుధాకరద్వివేదిగారి సూత్రము పపన్నమగుచున్నది.

తా॥ భుజలవర్గములనుకలిపి అందు భూమివర్గమును వ్యవకలించి ద్విగుణిత భుజఘాతము చేభాగింప భుజమధ్యగతకోణమునకు కోటిజ్యయగును.

(5) ఇట్లు కోజ్యాగా $= \dfrac{\text{క}^2 + \text{గ}^2 - \text{చ}^2}{2\ \text{క}.\text{గ}}$ అగుచున్నది.

$$\therefore \text{చ}^2 = \text{క}^2 + \text{గ}^2 - 2\ \text{క}.\text{గ}\ \text{కోజ్యాగా}$$
$$= \text{అ}^2 + \text{ఘ}^2 - 2\text{అ}.\text{ఘ}.\ \text{కోజ్యాఅ}$$

పైనచూపిన జ్యోత్పత్తిసిద్ధాంతము చేతను రే 3అ 22 ప్రి. చేతనున్న

$$\text{కోజ్యా అ} = \text{కోజ్యా}\ (180 - \text{గా}) = -\ \text{కోజ్యాగా}$$

$$\therefore \text{అ}^2 + \text{ఘ}^2 - 2\text{అ}.\text{ఘ}\ \text{కోజ్యాఅ} = \text{క}^2 + \text{గ}^2 + 2\text{క}.\text{గ}.\text{కోజ్యాఅ}$$

ఇచట కోజ్యాగా ఋణమగుటచే తత్తుల్యమను కోజ్యా'అ' చే $(-2\text{క}.\text{గ})$ దీనిని గుణింప $+\ 2\text{క}.\text{గ}$ కోజ్యాఅ అగుచున్నది (జ్యోత్పత్తి చూ)

$$\therefore \text{కోజ్యా అ} \times 2\ (\text{అఘ} + \text{కగ}) = \text{అ}^2 + \text{ఘ}^2 - \text{క}^2 - \text{గ}^2$$

$$\therefore \text{కోజ్యా అ} = \frac{\text{అ}^2 + \text{ఘ}^2 - \text{క}^2 - \text{గ}^2}{2(\text{అఘ} + \text{కగ})}\ (-\text{కోజ్యాగా})$$

దీనింబట్టి 'జ్యాఅ' స్వరూపమును కనుగొనగా పూర్వప్రకారము

జ్యా^{2}అ $= 1 -$ కోజ్యా^{2}అ $= (1 +$ కోజ్యాఅ$)\ (1 -$ కోజ్యాఅ$)$ ఇది వర్గాంతరము యోగాంతరఘాత మను సిద్ధాంతముచే నగుచున్నది.

$$= \left\{1 + \frac{\text{అ}^2 + \text{ఘ}^2 - \text{క}^2 - \text{గ}^2}{2(\text{అఘ} + \text{కగ})}\right\} \times \left\{1 - \frac{\text{అ}^2 + \text{ఘ}^2 - \text{క}^2 - \text{గ}^2}{2(\text{అఘ} + \text{కగ})}\right\}$$

$$= \frac{\text{అ}^2 + \text{ఘ}^2 + 2\text{అఘ} + 2\text{కగ} - \text{క}^2 - \text{గ}^2}{2(\text{అఘ} + \text{కగ})} \times \frac{-\text{అ}^2 - \text{ఘ}^2 + 2\text{అఘ} + 2\text{కగ} + \text{క}^2 + \text{గ}^2}{2(\text{అఘ} + \text{కగ})}$$

$$= \frac{(\text{అ} + \text{ఘ} + \text{క} - \text{గ})(\text{అ} + \text{ఘ} - \text{క} + \text{గ})}{2(\text{అఘ} + \text{కగ})} \times \frac{(\text{క} + \text{గ} + \text{అ} - \text{ఘ})\ (\text{క} + \text{గ} - \text{అ} + \text{ఘ})}{2(\text{అఘ} + \text{కగ})}$$

ఇందు హారలవములను రెండిటిని మూలింప 'జ్యాఅ' అగును. $\therefore$ జ్యాఅ $=$

$$\frac{\sqrt{(\text{అ} + \text{ఘ} + \text{క} - \text{గ})\ (\text{అ} + \text{ఘ} - \text{క} + \text{గ})\ (\text{క} + \text{గ} + \text{అ} - \text{ఘ})\ (\text{క} + \text{గ} - \text{అ} + \text{ఘ})}}{2(\text{అఘ} + \text{కగ})}$$

హారలవముల రెంటిని 2 చే గుణించిన వికృతి లేదు కావున $= \dfrac{2}{\text{అఘ} + \text{కగ}}$

$$\times \sqrt{\frac{(\text{అ} + \text{ఘ} + \text{క} - \text{గ})\ (\text{అ} + \text{ఘ} - \text{క} + \text{గ})\ (\text{క} + \text{గ} + \text{అ} - \text{ఘ})\ (\text{క} + \text{గ} - \text{అ} + \text{ఘ})}{4}}$$

$$= \frac{2}{(\text{అఘ} + \text{కగ})}$$

$$\times \sqrt{\frac{(\text{అ} + \text{ఘ} + \text{క} - \text{గ})}{2}.\frac{(\text{అ} + \text{ఘ} - \text{క} + \text{గ})}{2}.\frac{(\text{క} + \text{గ} + \text{అ} - \text{ఘ})}{2}.\frac{(\text{క} + \text{గ} - \text{అ} + \text{ఘ})}{2}}$$

ఇచట $\text{అ} + \text{ఘ} + \text{క} + \text{గ} = \text{స}$ అనుకొనుచో

$$\text{జ్యాఅ} = \frac{2}{\text{అఘ} + \text{కగ}} \times \sqrt{\left(\frac{\text{స}}{2} - \text{గ}\right)\left(\frac{\text{స}}{2} - \text{క}\right)\left(\frac{\text{స}}{2} - \text{ఘ}\right)\left(\frac{\text{స}}{2} - \text{అ}\right)}$$

(అకగఘ) చతుర్భుజఫల $=$ (కగచ) త్రిభుజఫల $+$ (అఘచ) త్రిభుజఫల

కగచ త్రిఫ $= \dfrac{\text{క}.\text{గ}.\text{జ్యాగా}}{2}$, అఘచ త్రిఫ $= \dfrac{\text{అ}.\text{ఘ}.\text{జ్యాఅ}}{2}$

కావునను జ్యాగా $=$ జ్యాఅ అగుటచేతనున్న

(అకగఘ) చతుర్భుజఫల $= \left(\dfrac{\text{క}.\text{గ}}{2} + \dfrac{\text{అ}.\text{ఘ}}{2}\right)$ జ్యాఅ

$$= \frac{\text{క.గ} + \text{అ.ఘ}}{2} \times \frac{2}{\text{అఘ} + \text{కగ}}$$

$$\times \sqrt{\left(\frac{\text{స}}{2} - \text{గ}\right)\left(\frac{\text{స}}{2} - \text{క}\right)\left(\frac{\text{స}}{2} - \text{ఘ}\right)\left(\frac{\text{స}}{2} - \text{అ}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\text{స}}{2} - \text{గ}\right)\left(\frac{\text{స}}{2} - \text{క}\right)\left(\frac{\text{స}}{2} - \text{ఘ}\right)\left(\frac{\text{స}}{2} - \text{అ}\right)} = \text{చతుర్భుజఫలము.}$$

పైగణితమునందు వృత్తాంతర్గతచతుర్భుజక్షేత్రమునందలి నియమములబట్టి జ్యాకోటిజ్యాస్వరూపముల పరిణామములు సిద్ధించినవి యగుటచే నీపద్ధతి వృత్తాంతర్గతచతుర్భుజక్షేత్రమునందే సరిపడునని స్పష్టమగుచున్నది.

ఇట్లు వృత్తాంతర్గతచతుర్భుజక్షేత్రఫలానయనమున్ను ఉపపన్నమగుచున్నది. అభీష్టములగు భుజములు నాలుగిటిచేతను అనేకవిధములగు చతుర్భుజక్షేత్రములగును. అందు అన్నిటియొక్కయు వేరువేరుఫలములలో వృత్తాంతర్గతచతుర్భుజక్షేత్రఫలము అధికమగుచున్నది. దీనింగూర్చి విస్తరభీతిచే నిట వ్రాయలేదు. (స్థూలత్రికోణమితి చూ)

166. ప్ర. (1) అథస్థూలత్వనిరూపణార్థంసార్ధవృత్తం
చతుర్భుజస్యానియతౌహికర్ణౌకథంతతోఽస్మిన్నియతంఫలంస్యాత్॥
ప్రసాధితౌ తచ్ఛ్రవణౌ యదాద్యైః స్వకల్పితౌ తావితరత్రనస్తః।
తేష్వేవబాహుష్వపరౌచకర్ణా వనేకధాక్షేత్రఫలం తతశ్చ॥ ౧౫॥

టీ॥ హి చతుర్భుజస్యకర్ణౌ అనియతౌ తతః అస్మిన్నియతం ఫలం కథం స్యాత్ = ఏకారణమువలన చతుర్భుజక్షేత్రమునకు కర్ణములు నియతములు కానివియో ఆకారణమువలన ఈచతుర్భుజక్షేత్రమునందు నియతమగుఫలమెట్లు అగును? యాత్ ఆద్యైఃప్రసాధితౌ స్వకల్పితౌ తచ్ఛ్రవణౌ ఇతరత్ర న స్తః తతః తేషు బాహుషు ఏవ అపరౌ కర్ణౌ అనేకధా క్షేత్రఫలం చ = ఏకారణమువలనపూర్వులచే సాధింపబడినవియును తమచే కల్పింపబడినవియును (వాస్తవములుకానివి) అగు (శ్లో.సూ. 99 చూ) ఆచతుర్భుజకర్ణములు ఇతరక్షేత్రములందుండవో ఆకా

రణమువలన ఆభుజలయందే ఇతరములగు కర్ణములున్ను అనేకవిధములుగ క్షేత్రఫలమున్ను అగుచున్నది.

వా. భా. చతుర్భుజే హ్యేకాంతరకోణౌ వాకృష్యమాణౌ స్వాంతః ప్రవేశ్యమానౌ తత్సంసక్తం కర్ణం సంకోచయతః। ఇతరౌ బహిరపసరన్తౌ కోణౌ తత్సంసక్తం కర్ణం వర్ధయతః। అతఏవోక్తం "తేష్వేవబాహుష్వపరౌచకర్ణౌ"ఇతి

తా॥ చతుర్భుజక్షేత్రమునందు పరస్పరసమ్ముఖములగు రెండుకోణములను క్షేత్రముయొక్క అంతర్భాగమునకు జరుపుచో ఆకోణములను కలిసియున్న కర్ణము పొట్టిదియగును. అపుడు ఇతరకోణములు క్షేత్రబహిర్భాగమునకు జరుగుచున్నవి ఆఇతరకోణములతో కలిసియున్న కర్ణము పొడవగుచున్నది. (ఇది అభీష్టభుజప్రమాణములగు శలాకలను భూమియందుంచి పరస్పరాభిముఖకోణములను లోనికిజరిపిచూచినచో స్పష్టము గాగలదు) కావుననే ఆభుజలయందే ఇతరములగు కర్ణములగునని చెప్పబడినది. (82 ఉదా. శ్లో. చూ)

(2) లంబయోః కర్ణయోర్వైక మనిర్దిశ్యాపరంకథం।
పృచ్ఛత్యనియతత్వేఽపి నియతంచాపి తత్ఫలం॥ ౧౬॥
స పృచ్ఛకః పిశాచోవా వక్తావా నితరాం తతః।
యోనవేత్తి చతుర్బాహుక్షేత్ర స్యానియతాం స్థితిం॥ ౧౭॥ ♦

తా॥ లంబములయందైనను కర్ణములయందైనను ఒకదానినైనను చెప్పక లంబముగాని కర్ణముగాని తెలియని చతుర్భుజక్షేత్రమునందు ఫలము నియతము కాకపోయినను నియతఫలమునున్ను లంబకర్ణములలో నొకదానిన్ని ఎట్లుప్రశ్నించును ?

అట్లు ప్రశ్నించువాడును వానికంటె వానిప్రశ్నమునకు నుత్తరముచెప్పబూనువాడును చతుర్భుజక్షేత్రముయొక్కస్థితి, నియతముకానిదియనుట తెలియనివారగుటచే పరమమూర్ఖులు అనిచెప్పదగియుందురు.

♦ కర్ణజ్ఞానేన వినా చతురస్రే లంబకం ఫలం యద్వా।
వక్తుం వాంఛతి గణకో యోఽసౌ మూర్ఖః పిశాచో వా॥ ఆర్యభట్టు.
లంబయోః కోణయోర్వాపి కర్ణయోర్వైక మంతరా।
పరం కథం పృచ్ఛతీహ నియతం తత్ఫలం కిల॥ సుధాకరులు.

సమచతుర్భుజము. వర్గక్షేత్రము ఆయతము. సమలంబము.
ఈక్షేత్రములందు ఫలానయనము.

సమచతుర్భుజాయతయోః ఫలానయనే కరణసూత్రం
సార్ధశ్లోకద్వయం.

ఇష్టాశ్రుతిస్తుల్యచతుర్భుజస్య కల్ప్యాథ తద్వర్గవివర్జితాయాః।
చతుర్గుణాబాహుకృతి స్తదీయంమూలం ద్వితీయశ్రవణప్రమాణం॥
అతుల్యకర్ణాభిహతిర్ద్విభక్తా ఫలంస్ఫుటంతుల్యచతుర్భుజేస్యాత్।
సమశ్రుతౌతుల్యచతుర్భుజేచ తథాయతే తద్భుజకోటిఘాతః॥౮౯॥
చతుర్భుజేన్యత్రసమానలంబేలంబేననిఘ్నంకుముఖైక్యఖండం॥౯౦॥

టీ॥ (1) తుల్యచతుర్భుజస్య = సమచతుర్భుజక్షేత్రమునకు, ఇష్టా=ఇష్టమైన, శ్రుతిః = కర్ణము, కల్ప్యా = కల్పింపదగినది. అథ = పిమ్మట, తద్వర్గవివర్జితా = ఆఇష్టకర్ణముయొక్క వర్గముచే వ్యవకలింపబడిన, చతుర్గుణా యా బాహుకృతిః = నాలుగుచే గుణింపబడిన ఏభుజవర్గముగలదో, తదీయంమూలం= దానియొక్క (భుజవర్గమును 4చే గుణించి ఇష్టకర్ణవర్గమును వ్యవకలింపనగుసంఖ్యయొక్క) మూలం= మూలము, ద్వితీయశ్రవణప్రమాణం=రెండవకర్ణముయొక్క ప్రమాణమగును.

(2) తుల్యచతుర్భుజే = సమభుజచతుర్భుజక్షేత్రమునందు అతుల్యకర్ణాభిహతిః = పరస్పర తుల్యములుగాని రెండుకర్ణములయొక్కయు గుణనము ద్విభక్తా = రెండుచే భాగింపబడినదియగుచో స్ఫుటంఫలం = స్ఫుటమగుఫలము అగును.

(3) సమశ్రుతౌతుల్యచతుర్భుజే = సమమైనకర్ణములుగల సమభుజచతుర్భుజక్షేత్రమందును తథా = ఆప్రకారము ఆయతేచ = ఆయతక్షేత్రమునందును తద్భుజకోటిఘాతఃఫలం = ఆక్షేత్రముయొక్క భుజకోటిగుణనము ఫలము.

(4) అన్యత్ర = ఇతరమైన సమానలంబే = సమానలంబములుగల చతుర్భుజక్షేత్రమందు కుముఖైక్యఖండం = భూమియొక్కయు ముఖముయొక్కయు యోగముయొక్కసగము లంబేననిఘ్నం = లంబముచే గుణింపబడినదై ఫలం = ఫలము.

167. ప్ర. (1) సమభుజ చతుర్భుజక్షేత్రమునందు ఒకకర్ణమునుకల్పించి (తెలిసికొని) దానిచే రెండవకర్ణమును తెలిసికొనుట. ఎట్లనగా: భుజయొక్కవర్గమును 4చే గుణించి దానివలన ఆతెలిసినకర్ణముయొక్క వర్గమును వ్యవకలించి మూలించినచో మూలము ద్వితీయకర్ణప్రమాణమగును.

(2) ఇట్లు భిన్నకర్ణములుగల సమచతుర్భుజక్షేత్రము విషమకర్ణసమచతుర్భుజమని చెప్పబడుచున్నది. అట్టిక్షేత్రమునందు కర్ణములగుణనమును 2చే భాగింప క్షేత్రఫలమగును. ♦

(3) సమములగు కర్ణములుగల చతుర్భుజక్షేత్రము వర్గక్షేత్రము. వర్గక్షేత్రమునందును ఆయతక్షేత్రమునందును భుజకోటిఘాతము క్షేత్రఫలము.

(4) 1 సమచతుర్భుజము. 2 వర్గక్షేత్రము. 3 ఆయతము ఈమూడిటికంటె భిన్నమైనచతుర్భుజము విషమచతుర్భుజము. అదిరెండువిధములు. 1 సమానలంబములుగల విషమ చతుర్భుజము. 2 విషమలంబములుగల విషమచతుర్భుజము. అట్టిసమలంబవిషమచతుర్భుజమునందు భూమియొక్కయు ముఖముయొక్కయు యోగమునర్ధించి లంబముచే గుణింప క్షేత్రఫలమగును.

అత్రోద్దేశకః.

క్షేత్రస్య పంచకృతితుల్య చతుర్భుజస్య కర్ణౌ తతశ్చ గణితం
గణక ప్రచక్ష్వ।తుల్య శ్రుతేశ్చ ఖలుతస్య తథాయతస్య యద్విస్తృతి
రసమి తాష్టమితంచ దైర్ఘ్యం॥ ౯౧॥

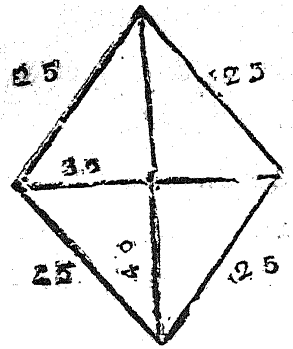
తా॥ గణకుడా ! ఒకచతుర్భుజక్షేత్రమునందు 4 భుజలును ప్రత్యేకము (25) ప్రమాణముగలవి. ఆక్షేత్రమునందు కర్ణములను క్షేత్రఫలమునున్ను చెప్పుము. సమకర్ణములుగల భుజలచేనైన చతుర్భుజక్షేత్రము (వర్గక్షేత్రము)నందు క్షేత్రఫలమెంతయగును ?

ఒకఆయతక్షేత్రమునందు వెడల్పు 6, పొడవు 8, ఆక్షేత్రమునందు క్షేత్రఫలమెంతయగును ?

♦ పరస్పరమునందు లంబరూపములైన కర్ణములుగల విషమచతుర్భుజమునందును ఈపద్ధతిచే సరియగుఫలము వచ్చుచున్నది. (బాపుదేవశాస్త్రిగారు)

(1) ప్రథమోదాహరణేన్యాసః. భుజాః ౨౫, ౨౫, ౨౫, ౨౫ అత్రత్రింశన్మితామేకాం ౩౦ శ్రుతిం ప్రకల్ప్య యథోక్తకరణేన జాతా అన్యా శ్రుతిః ౪౦ ఫలంచ ౬౦౦

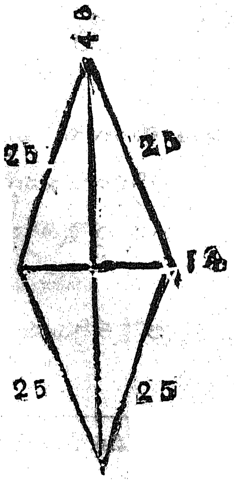
కర్ణానయనము మొదటికర్ణము 30 అనుకొనుచో



భుజవర్గము $25^2 = 625$ దీనిని 4చే గుణింప 2500 ఇందుఇష్టకర్ణము 30 యొక్క వర్గము 900 ను వ్యవకలింప $2500 - 900 = 1600$ దీనియొక్క వర్గమూలము 40 రెండవకర్ణము.

కావున కర్ణవముల గుణనము $40 \times 30 = 1200$ దీనిని 2చే భాగింప $\frac{1200}{2} = 600$ ఇది క్షేత్రఫలము అగుచున్నది.

అథవాన్యాసః చతుర్దశ౧౪ మితా మేకాం శ్రుతింప్రకల్ప్యోక్తవత్కరణేనజాతా అన్యాశ్రుతిః౪౮ ఫలంచ ౩౩౬.

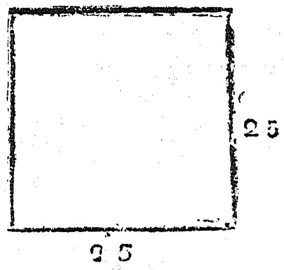


(2) లేక అడ్డముగనున్న కర్ణము (తిర్యక్కర్ణము) 14 కల్పించినచో భుజవర్గమును 4చే గుణించి కల్పితకర్ణవర్గమును వ్యవకలింప $2500 - 196 = 1304$ దీనియొక్క వర్గమూలము 48 రెండవ కర్ణము (ఊర్ధ్వకర్ణము). ఒకకర్ణమును మరియొక కర్ణముచే గుణించి యర్ధింప $\frac{48 \times 14}{2} = 48 \times 7 = 336$ ఇది క్షేత్రఫలమగుచున్నది.

ఇట్లు ఒకకర్ణమునుబట్టి మరియొక కర్ణమున్ను ఆకర్ణములబట్టి ఫలమున్ను చతుర్భుజ క్షేత్రము నందు మార్పుజెందుచున్నది.

ఇందు ఒక కర్ణమును కల్పింపవలయునని చెప్పబడినది. అట్లు కల్పించు నపుడు రెండుభుజములయొక్కయు యోగముకంటె తక్కువసంఖ్యఅగునట్లు గమనించి కల్పింపవలయును.

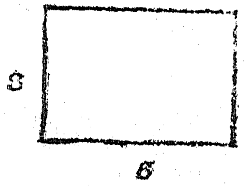
ద్వితీయోదాహరణేన్యాసః 'తత్కృత్యోర్యోగపదం కర్ణ'ఇతి జాతా కరణీగతా శ్రుతి రుభయత్రతుల్యైవ క౧౨౫౦ గణితంచ ౬౨౫.



ఇది వర్గక్షేత్రము. భుజకోటివర్గయోగము $25^2 + 25^2 = 625 \times 2 = 1250$ దీనియొక్కవర్గమూలము $\sqrt{1250} =$ కర్ణము.

భుజనుకోటిచే గుణింప $25 \times 25 = 625$ క్షేత్రఫలమగుచున్నది. ఇందు రెండుకర్ణములును సమములే యగుచున్నవి.

అథాయతస్యన్యాసః, విస్తృతిః ౬ దైర్ఘ్యం ౮ అస్య గణితం ౪౮.



ఈఆయతక్షేత్రమునందు వెడలుపు 6 పొడవు 8 ఈరెండింటియొక్కయు గుణనము $8 \times 6 = 48$ క్షేత్రఫలమగుచున్నది. ఇందుకర్ణము 10 అగుచున్నది ఇందు రెండుకర్ణములును సమములు.

ఉపపత్తి:—ద్వితీయకర్ణానయమును గూర్చి;—

పైన (386పు)చూపిన ప్రథమోదాహరణమునందలి క్షేత్రమునుగుర్తింపుము. అందు తిర్యక్కర్ణముచే నాక్షేత్రము రెండుత్రిభుజములుగా విభజింపబడి కనుపించుచున్నది. ఆత్రిభుజములు రెండింటికిని ఈతిర్యక్కర్ణము భూమి(ఆధారము)అగుచున్నది. ఆత్రిభుజములు సమద్విబాహుక త్రిభుజములగుటచే ప్రతి త్రిభుజమునందును లంబములు ఆధారమును అర్ధించుచున్నది, అనగా రెండులంబములును ఆధారార్ధప్రదేశమునందు కలియుచున్నవి. కావున ప్రథమకర్ణార్ధము భుజ. ద్వితీయ కర్ణార్ధము కోటి. భుజ కర్ణము. ఇట్లు 4 జాత్యము లగుచున్నవి. కావున

(1) ప్రిక= ప్రథమకర్ణ ద్వికే=ద్వితీయకర్ణము భు=భుజ అనుకొనుచో,

$$\text{భు}^2 - \left(\frac{\text{ప్రి క}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\text{ద్వి క}}{2}\right)^2$$ (150 ప్రి. చూ) సమచ్ఛేదములను

చేయగా $\frac{4\ \text{భు}^2}{4} - \frac{\text{ప్రి క}^2}{4} = \frac{\text{ద్వికే}^2}{4}$ ∴ $4\ \text{భు}^2 - \text{ప్రిక}^2 = \text{ద్వికే}^2$

∴ $\sqrt{4\ \text{భు}^2 - \text{ప్రిక}^2} = \text{ద్వికే}$ ఇట్లు కర్ణానయన ముపపన్నము

(2) విషమకర్ణ సమచతుర్భుజ ఫలానయ నోపపత్తి:—

$$\text{త్రిభుజఫలం} = \text{లంబ} \times \frac{\text{భూ}}{2} = \frac{\text{ప్రి క}}{2} \times \frac{\text{ద్వి క}}{2} = \frac{\text{ప్రిక} \times \text{ద్వికే}}{2 \times 2}$$

$$\text{విషమచతుర్భుజఫలం} = \text{త్రిభుజ ఫల} \times 2 = \frac{(\text{ప్రిక} \times \text{ద్వికే})2}{2 \times 2} = \frac{\text{ప్రిక} \times \text{ద్వికే}}{2}$$

అగుచున్నది.

(3) వర్గక్షేత్రమునందు క్షేత్రఫలము వర్గమే యగుచున్నది. వర్గము భుజకోటి ఘాతమే యగుచున్నది. (150 ప్రి ౪జువు చూ) అట్లు ఆయతమునందును భుజకోటిఘాతమే క్షేత్రఫల మగును. క్షేత్రఫలమనగా సమచతురము కావున అట్టి సమచతురములగు కోష్ఠములు ఆయతమునందును వర్గక్షేత్రమునందువలె భుజకోటిఘాత తుల్యములే యగుచున్నవి యనుట స్పష్టము.

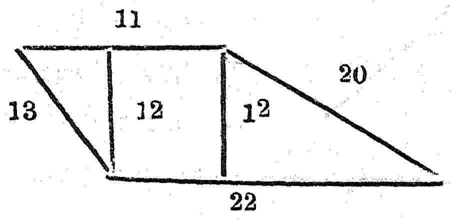
(4) సమలంబక్షేత్ర ఫలానయనోపపత్తి (83 ఉదా. చూ) ముందు వ్రాయబడును.

ఉదాహరణమ్.

క్షేత్రస్యయస్య వదనం మదనారితుల్యం విశ్వంభరా ద్విగుణితేన ముఖేనతుల్యా। బాహూ త్రయోదశ నఖప్రమితౌచ లంబస్సూర్యోన్మితశ్చ గణితం వదతత్రకింస్యాత్॥౮౩

తా॥ ఒకక్షేత్రమునకు ముఖము (మదనారి=రుద్ర) 11 పరిమితిగలది భూమి రెట్టింపబడిన ముఖముతో సమముగనున్నది. భుజములు 13, 20 పరిమాణముగలిగియున్నవి. లంబము 12 పరిమితిగలది. ఆక్షేత్రమునందు క్షేత్రఫలమెంత యగును? చెప్పుము.

న్యాసః. వదనం౧౧ విశ్వంభరా ౨౨ బాహూ౧౩,౨౦ లంబః౧౨ అత్ర "సర్వదోర్యుతిదల" మిత్యాది నాస్థూలఫలం ౨౫౦ హస్తవంతు "లంబేననిఘ్నం కుముఖైక్యఖండ"మితిజాతంఫలం౧౯౮ క్షేత్రస్య ఖండత్రియం కృత్వాస్య ఫలోపపత్తి ర్దర్శనీయా.



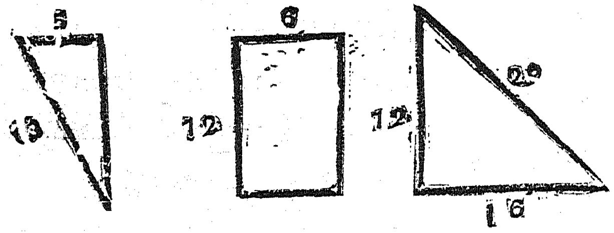
ఈక్షేత్రమునందు ముఖము 11 అనగా ఈసంఖ్య 11 హస్తములనుకొందము భూమి 22 హస్తములు ఒకభుజ 13 హస్తములు మరియొకభుజ 20 హస్తములు లంబము 12 హస్తములు ఇందు క్షేత్రఫలమెంత? యని ప్రశ్నము.

ఇచట (165 ప్రి 2) చే అస్పష్టఫలము 250 ఎట్లనగా 4 భుజలయొక్కయు యోగము 66 ఈసంఖ్యయొక్క సగము 33 వలన భుజలను వేరవేరుగ వ్యవకలింప శేషములు 11, 20, 13, 22 వీటిగుణనము 62320 దీనియొక్క ఆసన్నమూలము 250 అగుచున్నది. కాని ఈచతుర్భుజము వృత్తాంతర్గతముకాకుండుటచే ఆఫలము వాస్తవముగుటలేదు. కావుననే ఆపద్ధతినివిడచి లంబముచే గాని కర్ణముచేగాని ఫలము తెలునుకొనవలయునని చెప్పబడినది. ఇపుడు పై (167 ప్రి. 4) పద్ధతిచే ఫలానయనము చేయుదగియున్నది. భూమి22 ముఖము 11 వీటియోగము 33 దీని యర్ధము $\frac{33}{2}$ ను లంబము 12చే గుణింప వాస్తవఫలమగుచున్నది. $\frac{33}{2} \times \frac{12}{2}$ $= 33 \times 6 = 138$ క్షేత్రఫలము.

ఈఫలము సరియైనదియనుట పైక్షేత్రమును ఖండములుగచేసి వేరువేరు ఫలములను కలుపుటచే స్పష్టము గాగలదు. కావున నట్లు చూపబడుచున్నది.

న్యాసః. ఖండత్రియదర్శనం ప్రథమస్య భుజకోటికర్ణాః ౫, ౧౨; ౧౩ ద్వితీయస్యాయతస్యవిస్తృతిః౬ దైర్ఘ్యం౧౨ తృతీయస్య భుజకోటికర్ణాః ౧౬ ౧౨, ౨౦ అత్ర త్రిభుజయోః భుజకోటిఘాతార్ధం ఫలం ఆయతే తద్భుజకోటిఘాతః ఫలం. యథా

ప్రథమక్షేత్రే ఫలం౩౦ ద్వితీయే క్షేత్రే ౭౨ తృతీయే ౯౬ ఏషా మైక్యం ౧౯౮ సర్వక్షేత్రఫలం.



పై సమలంబ చతుర్భుజక్షేత్రము నందలి 2 లంబముల చేతను ఆ క్షేత్రము 3 ఖండములుగ విభజింపబడినది. అందు ఎడమవైపు భుజ కర్ణము, లంబము కోటి, లంబమూలమునుండి ముఖమునందు భుజాగ్రమువరకునైన ఖండము భుజ, (లేక కోటికర్ణ వర్గాంతరమూలము భుజ) ఇదియొక జాత్యము.

లంబము కోటి, ప్రథమజాత్యభుజను ముఖమువలన తీసివేయగానగు $11 - 5 = 6$ శేషము భుజ. ఇది ఆయతక్షేత్రము. ఈ ఆయతమునందలి భుజరను భూమి 22 వలన వ్యవకలింపనగు $22 - 6 = 16$ శేషము భూమి, లంబముకోటి, కుడివైపు భుజ కర్ణము. ఇది మరియొక జాత్యము. అట్లు మూడు క్షేత్రములుగ విడదియబడినది. ప్రథమజాత్యమునందు భుజకోటిఘాతార్ధము $\frac{5 \times 12}{2} = \frac{60}{2} = 30$ క్షేత్రఫలము. ఆయతమునందు $12 \times 6 = 72$ భుజకోటిఘాతము క్షేత్రఫలము. ద్వితీయ జాత్యమునందు $\frac{12 \times 16}{2} = 96$ భుజకోటిఘాతార్ధము క్షేత్రఫలము. అన్నిటిని కలుప $30 + 72 + 96 = 198$ మొత్తము క్షేత్రఫలము.

ఉపపత్తి:— ప్రథమక్షేత్రమునందు భుజ = ముఖఖండ = ముఖఖ, కోటి = లంబ ఆయతమునందు కోటి = లం, భుజ = ముఖఖ' లేక భూఖండము = భూఖ' తృతీయక్షేత్రమునందు లం = కోటి భుజ = భూఖ కావున ఫలములయోగము

$$\frac{\text{ముఖఖ} \times \text{లం}}{2} + \text{లం} \times \text{ముఖఖ}' + \frac{\text{లంబ} \times \text{భూఖ}}{2} = \text{క్షేత్రఫల}$$

ఇచట $\text{లం} \times \text{ముఖఖ}' = \text{లం} \times \text{భూఖ}' \quad \therefore \text{లం} \times \text{భూఖ}' + \text{లం} \times \text{ముఖఖ}'$

$$= \text{లం} \times \text{ముఖఖ}' \times 2$$

$$\therefore \frac{\text{ముఖఖ} \times \text{లం}}{2} + \frac{(\text{లం} \times \text{ముఖఖ}')2}{2} + \frac{\text{లంబ} \times \text{భూఖ}}{2}$$

$$= \frac{\text{ముఖ} \times \text{లం}}{2} + \frac{\text{భూ} \times \text{లం}}{2} = \frac{(\text{భూ} + \text{ముఖ})}{2} \times \text{లంబ}$$

ఇది క్షేత్రఫలము. ఇట్లు పద్ధతి యుపపన్నము.

ఈపద్ధతి భిన్నప్రమాణములగు లంబములచేనైన క్షేత్రమందును ఉపయోగించును. అందు లంబములయోగార్ధమును భూమిచే గుణింప ఫలము అగును. ఎట్లనగా:— పై క్షేత్రమునందు లంబమే భూమియనుకొనుచో ముఖఖండము 6, ఒకలంబను. భూమి 22 ఒకలంబము అగుచున్నవి. అనగా నీక్షేత్రము పై 2-3 క్షేత్రఖండముల యోగముచే నగుచున్నది. ఇందు లంబయోగార్ధము $\frac{22 + 6}{2} = 14$ దీనిని భూమి 12చే గుణింప 168 ఇదె ద్వితీయ తృతీయ క్షేత్రఫలముల యోగముతో సమము. $72 + 96 = 168$ అగుచున్నది.

అన్యదుదాహరణమ్

పంచాశదేకసహితా వదనం యదీయం భూః పంచసప్తతిమితా ప్రమితోఽష్టషష్ట్యా। సవ్యో భుజో ద్విగుణవింశతిసమ్మితోఽన్యస్తస్మిన్ఫలం శ్రవణలంబమితీ ప్రచక్ష్వ॥ ౧౮॥

విషమచతుర్భుజమునందు లంబమువలన కర్ణము, కర్ణమువలన లంబమును, తెలిసికొనుట. ఒకకర్ణముచే మరియొకకర్ణమును తెలిసికొనుట. వాటివలన ఫలము నెరుంగుట. వీటివిషయమై క్రమముగ సూత్రములు చెప్పబడుచున్నవి.

తా॥ ఒకక్షేత్రమునందు ముఖము 51 హస్తములు భూమి 75 హస్తములు ఒకభుజ 68 హస్తములు మరియొకభుజ 40 హస్తములు ఆ క్షేత్రమునందు కర్ణలంబముల పరిమాణములను ఫలమునున్ను చెప్పుము.

విషమచతుర్భుజప్రకరణము.

అత్ర ఫలావలంబశ్రుతీనాం నిమిత్తం సూత్రం వృత్తార్ధం।

జ్ఞాతేవలంబే శ్రవణశ్రుతౌతులంబః ఫలంస్యాన్నియతంతుతత్ర॥ ౬౦॥
కర్ణస్యానియతత్వాల్లంబోప్యనియతఏవేత్యర్థః

లంబజ్ఞానాయకరణసూత్రం వృత్తార్ధం

చతుర్భుజాంతస్త్రిభుజేవలంబః ప్రాగ్వద్భుజౌకర్ణభుజౌమహీభూః ౬౦ 1/2

టీ॥ అవలంబే = లంబము, జ్ఞాతే = తెలియబడినచో శ్రవణః = కర్ణము (తెలియును). శ్రుతౌతు = కర్ణము (జ్ఞాతాయాం) తెలిసినచో, లంబః = లంబము (తెలియును). తు=విశేషమేమనగా, తత్ర = అచట, ఫలం = ఫలము నియతం = నియతమైనది, స్యాత్ = అగును.

లంబమును తెలియుట.

చతుర్భుజాంతః = చతుర్భుజముయొక్క లోపలనైన, త్రిభుజే=త్రిభుజమందు అవలంబః = లంబము = ప్రాగ్వత్=పూర్వప్రకారము (సాధింపదగినది)

కర్ణభుజౌ = కర్ణమున్ను, భుజయున్ను, భుజౌ = భుజలు. మహీ=చతుర్భుజమునందలి ఆధారము, భూః = భూమి.

168. ప్ర. విషమచతుర్భుజములందు లంబము తెలిసిన కర్ణము నెరుంగవచ్చును. కర్ణము తెలిసినచో లంబము నెరుంగవచ్చును. అట్లు లంబకర్ణములు తెలిసినచో ఫలము నియతమైనది తెలియును. లంబముగాని, కర్ణముగాని తెలియనిచో అచట కర్ణము లంబమున్ను అనియతములు. అచట ఫలమున్ను అనియతము.

అట్టి చతుర్భుజములందు లంబము నెరుంగవలసినచో కర్ణమును వీలుకొలది కల్పించుకొనవలయును. (లేక కర్ణమును తెలుసుకొనవలయును)

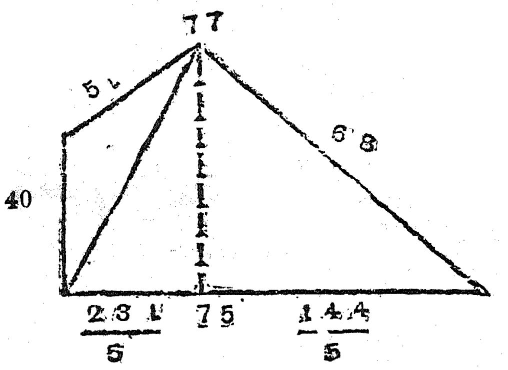
ఆకర్ణముచే చతుర్భుజము రెండుత్రిభుజములుగ నగుచున్నది. అందు ఒక త్రిభుజమునందు ఆకర్ణము ఒకభుజ. చతుర్భుజక్షేత్రమునందలి భుజ రెండవభుజ. చతుర్భుజముయొక్కభూమి భూమి. ఇట్లు త్రిభుజమును కల్పించి పూర్వప్రకారము. (163 ప్ర.)చే లంబమును సాధింపవలయును.

ఒకకర్ణమును భుజగ కల్పించి భూమిని భూమిగను చతుర్భుజ భుజమును భుజముగను కల్పించి ఇట్లు కల్పితత్రిభుజమందు లంబమును సాధించుట ఇందు

చెప్పబడినది. కావున నిచట కల్పనామార్గమే చెప్పబడుటచే ఉపపత్తియొక్క ఆవశ్యకతలేదు.

న్యాసః. వదనం ౫౧ భూమిః ౭౫ భుజౌ ౬౮, ౪౦

అత్ర లంబజ్ఞానార్థం సవ్యభుజాగ్రాత్ దక్షిణభుజమూలగామీ ఇష్టకర్ణః సప్తసప్తతి ౭౭ మితః కల్పితః తేన చతుర్భుజాంతస్త్రిభుజం కల్పితమ్. తత్రాసౌ కర్ణ ఏకోభుజః. ద్వితీయస్తు సవ్యభుజః ౬౮. భూస్సైవ ౭౫ అత్ర ప్రాగ్వల్లబ్ధోలంబః 308/5



ఈ క్షేత్రమునందు కుడివైపు భుజ 40 అనియు ఎడమభుజ 68 అనియు ఆచార్యులవారు ఉదాహరణము నిచ్చియున్నారు. కుడి ఎడమలు చూచువానికి క్షేత్రమునందలి కుడి,ఎడమఅనియు, ఎడమ కుడి యనియుగనప్పట్టుచుండుటచే కొందరు క్షేత్రమును అనుసరించి ఈచూపినపద్ధతిగా చూపియున్నారు. మరికొందరు చూచువానిననుసరించి దీనికి వ్యతిరేకముగ ఇందలి 68 భుజనైపున 40 భుజమున్ను 40 భుజవైపున 68 భుజమున్ను చూపియున్నారు. ఐనను చాలప్రతులందు ఉండుటచే ఆమొదటిపద్ధతిగనే ఇందు చూపబడినది.

ఇచట లంబమును తెలిసికొనుటకు 68 భుజయొక్క అగ్రమునుండి 40భుజయొక్క మొదలువరకు నుండుకర్ణము 77కల్పింపబడినది. (ఈకల్పించుటలో కర్ణమునకు మరియొకవైపునగల చిన్నభుజలయొక్క యోగము 40 + 51 = 91 కంటె పెద్దదికాకుండునట్లును సమముగానట్లును 40తో సమముగాని దానికంటె చిన్నదిగాని కాకుండునట్లును యోచించవలెను) ఇపుడు చతుర్భుజక్షేత్రమునందు రెండు త్రిభుజములైనవి. అందు భూమి 75 భూమిగాగల త్రిభుజమొకటి ఇందు చతుర్భుజలోని ఎడమభుజ 68 యున్ను కర్ణము 77న్ను భుజలు.

163పఙ్క్తి.చే లంబమును సాధింప $\frac{308}{5}$ లంబమగుచున్నది. కర్ణము భూమి. కుడివైపు భుజ 40 యును ముఖము 51 యును భుజలుగాఁగల త్రిభుజము రెండవది. ఇది చిన్న త్రిభుజము. పెద్దత్రిభుజమునందు లంబమూలమునకు రెండువైపులను భూమియందు ఆబాధలు $\frac{233}{5}$, $\frac{144}{5}$.

లంబముచే కర్ణము నెఱుంగుట.

లంబే జ్ఞాతే కర్ణజ్ఞానార్థం సూత్రం వృత్తం.

యల్లంబలంబాశ్రితబాహువర్గవిశ్లేషమూలం కథితాబధా సా।
తదూనభూవర్గసమన్వితస్య యల్లంబవర్గస్య పదం స కర్ణః॥ ౯౧॥

అత్ర సవ్యభుజాగ్రాల్లంబః కిల కల్పితః $\frac{౩౦౮}{౫}$ అతో జాతా ఆబాధా $\frac{౧౪౪}{౫}$ తదూనభూవర్గసమన్వితస్యేత్యాదినా జాతః కర్ణః ౭౭.

టీ॥ లంబలంబాశ్రిత బాహువర్గవిశ్లేషమూలం యత్ సా అబధా కథితా = లంబముయొక్కయు లంబముతో సంబంధించియున్న చతుర్భుజభుజయొక్కయు వర్గముల అంతరముయొక్క మూలము ఎద్దికలదో అది ఆబాధయగుచున్నది.

తదూనభూవర్గసమన్వితస్య = ఆఆబాధచే వ్యవకలింపబడిన భూమియొక్క వర్గముతో గూర్పబడిన లంబవర్గస్య = లంబవర్గముయొక్క యత్ = ఏ పదం = మూలముగలదో సః = అది కర్ణః = కర్ణము.

169 ప్ర. తొలుత లంబమును కల్పించినచో ఆలంబముకోటి. చతుర్భుజక్షేత్రమునందలి 2 భుజలలో ఏభుజాగ్రము లంబాగ్రముతో కలసినదో ఆభుజ కర్ణము. ఆభుజకును లంబమునకును మధ్యనున్న భూమిఖండము (ఆబాధ) భుజ. ఇట్టిచతుర్భుజక్షేత్రములోని జాత్యమునందు లంబముయొక్కయు భుజయొక్కయు వర్గాంతరము కర్ణకోటివర్గాంతర మగుటచే దానియొక్క మూలము (భుజ) ఆబాధ యగుచున్నది. ఆఆబాధను భూమిలో వ్యవకలింప రెండవయాబాధ.

ఈరెండవయాబాధ భుజ. లంబము కోటి. వీటివర్గయోగమునకు మూలము చతుర్భుజాంతర్గతత్రిభుజమునందు భుజయగు చతుర్భుజకర్ణము అగుచున్నది.

ఎట్లనగా:— పైక్షేత్రమునందు లంబము $\frac{308}{5}$ ఇదియే కల్పింపబడినచో లంబవర్గమును భుజవర్గమువలన వ్యవకలింప $\frac{4624}{1} - \frac{95864}{25} = \frac{115600 - 94864}{25}$ $= \frac{20736}{25}$ దీనియొక్క వర్గమూలము $\frac{144}{5}$ ఇది యొక ఆబాధ.

దీనిని భూమిలో వ్యకలింప $\frac{75}{1} - \frac{144}{5} = \frac{375 - 144}{5} = \frac{231}{5}$ ఇది రెండవఆబాధ. దీనియొక్కయు లంబముయొక్కయు వర్గముల యోగమునకు మూలము కర్ణము.

$\left(\frac{231}{5}\right)^2 + \left(\frac{308}{5}\right)^2 = \frac{53361}{25} + \frac{94864}{25} = \frac{148225}{25}$ దీనిమూలము $\frac{385}{5} = 77$ కర్ణము.

రెండవ కర్ణము నెఱుంగుట.

ద్వితీయకర్ణజ్ఞానార్థం సూత్రం వృత్తద్వయం.

ఇష్టోత్ర కర్ణః ప్రథమం ప్రకల్ప్య త్ర్యస్రే తు కర్ణోభయతః స్థితే యే॥ ౯౨॥
కర్ణం తయోః క్ష్మామితరౌ చ బాహూ ప్రకల్ప్య లంబావబధాశ్చ సాధ్యాః
ఆబాధయోరేకకకుప్స్థయోర్య త్స్యాదంతరం తత్కృతిసంయుతస్య॥
లంబైక్యవర్గస్య పదం ద్వితీయః కర్ణో భవేత్సర్వచతుర్భుజేషు॥ ౯౩॥

టీ॥ అత్ర = ఇట్టి విషమచతుర్భుజములందు, ప్రథమం = ముందుగా, ఇష్టః = అభీష్టమైన కర్ణః = కర్ణము, ప్రకల్ప్యః = కల్పింపదగినది. కర్ణోభయతః = కర్ణమునకు రెండువైపులను, యేత్ర్యస్రేస్థితే = ఏత్రిభుజములు రెండు కలవో, తయోః = ఆరెండుత్రిభుజములందును, కర్ణం = కల్పితకర్ణమును క్ష్మాం = భూమిగను, ఇతరౌ = తక్కినభుజలను, బాహూచ = బాహువులు

గను, పరికల్ప్య = కల్పించి, లంబౌ = లంబములును, ఆబధాశ్చ = ఆబాధలున్ను. సాధ్యాః = సాధింపదగినవి. ఏకకకుప్స్థయోః = ఒకదిక్కునందున్న ఆబాధయోః = ఆబాధలకు, యత్ అంతరం = ఏఅంతరం, స్యాత్ = అగునో, తత్కృతిసంయుతస్య = ఆఆబాధాంతరవర్గముతోగూడిన, లంబైక్య వర్గస్య = లంబములయోగము యొక్కవర్గమునకు, పదం = మూలము, సర్వచతుర్భుజేషు = సమస్తచతుర్భుజములందును, ద్వితీయః = రెండవదియగు, కర్ణః = కర్ణము భవేత్ = అగును.

170 ప్ర. విషమచతుర్భుజములం దొకకర్ణమువలన రెండవకర్ణము దెలియుటు.

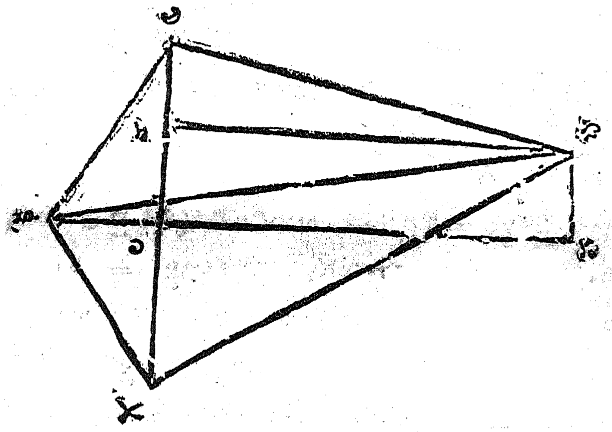
మొదట అభీష్టకర్ణమును కల్పింపవలయును. ఆకర్ణమునకు రెండువైపులను రెండు త్రిభుజము లగుచున్నవి. ఆత్రిభుజములకు రెండిటికిని కర్ణము భూమి. ఆకర్ణమునకు ఒకవైపు త్రిభుజమునందు చతుర్భుజములోని ముఖమున్ను, ఒకభుజయు భుజములగును. రెండవత్రిభుజమునందు భూమియు మరియొకభుజమున్ను భుజలగును. ఇట్లు కల్పించి ఆరెండుత్రిభుజములందును వేర్వేరలంబములను ఆబాధలను సాధింపవలెను

ఆకర్ణమునందు క్రిందిత్రిభుజముయొక్కయు పై త్రిభుజముయొక్కయు సంబంధములగు ఒకవైపునందలి రెండుఆబాధలయొక్కయు అంతరమునకైన వర్గమును త్రిభుజముల సంబంధములైన లంబములయొక్క యోగమునకైన వర్గమునందు కలిపి ఆవర్గయోగమునకు మూలము గనుగొనవలయును. ఆమూలమే రెండవకర్ణము.

న్యాసః. తత్రైవ చతుర్భుజే సవ్యభుజాగ్రా ద్దక్షిణభుజమూలగామినః కిల కర్ణస్య మానం౭౭ కల్పితం. తత్కర్ణరేఖావచ్ఛిన్నస్య క్షేత్రస్య మధ్యే కర్ణరేఖోభయతో యేత్ర్యస్రే ఉత్పన్నే తయోః కర్ణం భూమిం తదితరౌ చ భుజౌ పరికల్ప్య ప్రాగ్వ ల్లంబా వాబాధాశ్చ సాధితాః లంబౌ ౬౦,౨౪ ఆబాధే ౪౫,౩౨ అత్రాబాధయో రేకకకుప్స్థయో రంతరం ౧౩ లంబనిపాతాంతర మిత్యర్థః. అంతరస్య ౧౩ కృతిః ౧౬౯ లంబైక్య ౮౪ కృతిశ్చ ౭౦౫౬ అనయోర్యోగః ౭౨౨౫ తస్యపదం౮౫ ద్వితీయఃకర్ణః ఏవం సర్వత్ర.

పైనచూపిన చతుర్భుజక్షేత్రమునందు ఎడమభుజయొక్క అగ్రమునుండి అనగా ముఖముయొక్కయు ఎడమభుజయొక్కయు యోగమునుండి కుడివైపుభుజయొక్క మూలమువరకు (భూమి భుజలయోగమువరకును) నైన కర్ణము 'అగ' రేఖయొక్క పరిమాణము 77 కల్పింపబడినది.

అకగచ చతుర్భుజమునందు అగకర్ణముచే అకగ, అచగ రెండుత్రిభుజములైనవి. అకగ త్రిభుజమునందు అగ భూమి 77, కగభుజ40, అక భుజ 51, అందు కల లంబము 24. ఆబాధలు గల 32, అల 45 ఇట్లు అచగ త్రిభుజమునందు అగ భూమి 77 అచ భుజ 68 గచభుజ 75 చవ లంబము 60 ఆబాధలు అవ32 గవ45.



ఇందు అగ భూమియందు అ బిందువువైపునకైన రెండు ఆబాధలు అల45 అవ 32 వీటియంతరము లేక గల, గవ వీటియంతరము లవ 13 అగుచున్నది. దీనివర్గము 169 లంబములు కల 24 చవలంబము 60 వీటియోగము 84 దీనివర్గము 7056 ఇందు వెనుకటి ఆబాధాంతరవర్గము 169 ను కలుప 7056 + 169 = 7225 దీనిమూలము 85 రెండవకర్ణము అనగా చక, కర్ణము అగుచున్నది.

ఉపపత్తి: క్షేత్రమునుచూచుటచే తెలియుచున్నది. స్పష్టమగుటకై వ్రాయబడుచున్నది. కల లంబము ప బిందువువరకును పెంచబడినది. అగ రేఖతో సమానాంతరమగు చపరేఖ చేయబడినది. అగరేఖయందు లంబములగుటచే కప, చవ సమానాంతరరేఖ లగుచున్నవి. కావున 'పచవల' ఆయతక్షేత్రమగుచున్నది. కావున లప = చవ అట్లు లవ = పచ. కపచ జాత్యమునందు $కప^2 + పచ^2 = కచ^2$ ఇచట కప = కల + చవ $\therefore$ $(కల + చవ)^2 + (అల - అవ)^2 = కచ^2$ అగుచున్నది. ఇట్లు ఈపద్ధతి ఉపపన్నమగుచున్నది.

ఇష్టకర్ణకల్పనము.

ఇష్టకర్ణకల్పనే విశేషోక్తి సూత్రం సార్ధవృత్తం.

కర్ణాశ్రితస్వల్పభుజైక్యముర్వీంప్రకల్ప్య తచ్ఛేషమితౌ చ బాహూ॥ ౯౮
సాధ్యోఽవలంబోఽథతథాన్యకర్ణ స్స్వోర్వ్యాః కథంచిచ్ఛ్రవణో నదీర్ఘః॥
♦ తదన్యలంబాన్నలఘుస్తథేదం జ్ఞాత్వేష్టకర్ణస్సుధియా ప్రకల్ప్యః॥ ౯౯॥

చతుర్భుజం హ్యేకాంతరకోణయో రాక్రమ్య సంకోచ్యమానం త్రిభుజత్వం, యాతి. తత్రైకకోణలగ్నలఘుభుజయో రైక్యంభూమి మితరౌ భుజౌ చ ప్రకల్ప్య సాధితః సచ †లంబాదూనః కర్ణస్సంకోచ్యమానః కథంచిదపి నస్యాత్. తదితరో భూమే రధికో నస్యాత్। ఏవముభయథాపి బుద్ధిమతా జ్ఞాయతే॥

టీ॥ కర్ణాశ్రితస్వల్పభుజైక్యం = కర్ణమునుసంబంధించిన(ఒకవైపుననున్న) చిన్న భుజలయోగమును. ఉర్వీం = భూమిగ, ప్రకల్ప్య = కల్పించి, తచ్ఛేషమితౌ = వాటికంటె మిగిలిన భుజలు పరిమాణముగాగల, బాహూచ = భుజలనున్ను, ప్రకల్ప్య = కల్పించి. అవలంబః = లంబము, సాధ్యః = సాధింపదగినది. అథ = పిమ్మట, తథా = ఆప్రకారము, అన్యకర్ణః = మరియొకకర్ణమున్ను, సాధ్యః = సాధింపదగినది. శ్రవణః = (ప్రథమ) కర్ణము స్వోర్వ్యాః =కల్పిత త్రిభుజభూమి (భూమిగకల్పించిన భుజైక్యము)కంటె, కథంచిత్= ఎట్లైనను, దీర్ఘః = పొడవైనది, న = కాదు, తత్ = ఆకారణమువలన, తథా= ఆప్రకారముగ (రెండవకర్ణము) అన్యలంబాత్ = (కల్పితభూమియందైనలంబము అన్యలంబము. దీనింబట్టి సాధించిన కర్ణము(అన్యకర్ణము) అన్యలంబముకంటె లఘుః = చిన్నది, న = కాదు.

ఇదం = ఈవిషయమును, జ్ఞాత్వా = తెలిసికొని, సుధియా = బుద్ధిమంతునిచే ఇష్టకర్ణః = ఇష్టకర్ణము, ప్రకల్ప్యః = కల్పింపదగినది.

♦ "తదన్యకర్ణాత్" పాఠాంతరం

† "అన్యకర్ణాదూనః" పాఠాంతరము.

171. ప్ర. (1)ఇదివరలో చూపిన అకగచ చతుర్భుజక్షేత్రమునుచూడుము. అగ కర్ణమునకు రెండువైపులను రెండురెండుభుజలు గలవు. అందు చిన్న భుజలు అక, కగ, వీటియోగము ఎంతయగునో ఆసంఖ్యను భూమిగ కల్పింపుము అనగా అకగ కోణమునున్ను అచగ కోణమున్ను లోపలకు జరుపుటచే కఅచ, కగచ కోణములు వెలుపలికి జరుగుచున్నవి. ఈకోణములను కలసియున్న కర్ణరేఖ వృద్ధిబొందును. క్రమముగ అక, కగ భుజలయోగముతో సమానుగువరకును అనగా ఆరెండురేఖలును ఒక సరళరేఖగా మారువరకును జరుగుచున్నవి. ఇపుడు చతుర్భుజము త్రిభుజముగా మారినది.

(2) ఈత్రిభుజమునందు భుజయోగరూపముగు ప్రథమకర్ణమును భూమిగను తక్కినభుజలను భుజలుగను భావించి లంబమును సాధింపుము.

రెండవకర్ణము అనగా పైక్షేత్రమునందు చక కర్ణము, అట్లు సాధింపబడిన లంబముకంటె చిన్నదికానేరదు.

(3) కల్పిత త్రిభుజమునందు కల్పితభూమియందు సాధింపబడినదగుటచే లంబమును అన్యలంబమని భాస్కరాచార్యులు వ్యవహరించిరి. అనగా ప్రథమకర్ణము (కగరేఖ) లఘుభుజలయోగము (అక + కగ) కంటె పెద్దదికానేరదు. ద్వితీయకర్ణము అన్యలంబముకంటె చిన్నదికానేరదు ఈవిషయమును గమనించి ఇష్టకర్ణమును కల్పింపవలయునని చెప్పబడినది.

వివరము: పైక్షేత్రమునందు లఘుభుజలయోగము 51 + 40= 91 భూమి. భుజలు 68, 75 (163 ప్ర. చే) భుజలయోగము 75 + 68 = 143 ను అంతరము 75 — 68 = 7 చే గుణింప 143 × 7 = 1001, భూమి 91 చే భాగింప 11 లబ్ధము. దీనిచే ఆబాధలు $\frac{91 + 11}{2} = 51, \frac{91 - 11}{2} = 40$ అగుచున్నవి.

ఆబాధాభుజల వర్గాంతరయోగము $68^2 - 40^2 = 4624 - 1600 = 3024$ దీనియొక్క మూలము 55 (స్వల్పాంతరముచే గ్రహింపబడెను). ఇది లంబ మగుచున్నది. రెండవకర్ణము 55 కంటె చిన్నదిగ నుండదు. మొదటికర్ణము 91 కంటె పెద్దది యుండదు. ఇందొక విశేషము గలదు. ఇపుడు కర్ణమునకు ఎడమవైపునందలి 68, 75 భుజలబట్టి లంబము సాధింపబడెను. కుడివైపునందు భూమియు భుజల

యోగమున్న సమమగుటచే క్షేత్రము అసంభవము. (162 ప్ర చూ) ఐనను (163 ప్ర చే) లంబాబాధలసాధింపుచో లంబము శూన్య (0) మిత మగుచున్నది ఆభుజలే ఆబాధ లగుచున్నవి. అపుడు (170 ప్ర చే) ద్వితీయకర్ణము సాధింప ఒకదిక్కునందలి ఆబాధలయంతరము 11, లంబము 55 వీటివర్గయోగమూలము 55.18 ద్వితీయకర్ణ మగుచున్నది. ఇది అక, కగ రేఖల నొక సరలరేఖగా చేయుటచేనైన క్షేత్రమునందు కచ రేఖాప్రమాణమగుచున్నది. ఈద్వితీయకర్ణముకంటె ఎపుడును ద్వితీయకర్ణము చిన్నది కానేరదు. కావున ఇంతకంటె చిన్నదికానట్లు ద్వితీయకర్ణమును కల్పింపవలయునని యుండవలయునని "తదన్యకర్ణాత్" అని శ్లోకమందును "సచ అన్యకర్ణాదూనః" అని వాసనాభాష్యమందును పాఠము యుక్తమని కమలాకరులు తత్త్వవివేకమందును మ. మ. పం. బాపుదేవశాస్త్రి గారును, మ. మ. పం. సుధాకర ద్వివేదిగారును టిప్పణులందును వ్రాసియుండిరి.

పెద్దత్రిభుజమునందు 68 భుజ ఏవైపునగలదో ఆవైపు ఆబాధ 40 చిన్న త్రిభుజము (కల్పితము)నందు అనగా శూన్యలంబక్షేత్రమునందు ఆ ఆ బిందువు వైపున ఆభుజ 51 యే ఆబాధ యగుచున్నది. ఈచిన్నభుజలను మార్చి అనగా 51 కుడిభుజగను 40 ముఖముగను కల్పించి చతుర్భుజక్షేత్రమునుచో అట్టి చతుర్భుజమునందు అన్యలంబమే అన్యకర్ణము గాగలదు, అనగా అన్యలంబము కబిందువునందే పడుటచే కచరేఖయే లంబము గాగలదు. అపుడు 'అన్యకర్ణాత్' అను పాఠము అవసరము లేదు. 51 ముఖము 40 కుడిభుజ అగుచో అన్యకర్ణ అన్యలంబములకు స్వల్పాంతరము కలుగుచున్నది. కావున యథాస్థితపాఠము సుబోధకముగా నుండుటచే పాఠాంతరకల్పనము అనావశ్యకమని అస్మద్గురుపాదులు మ. మ. పం. మురలీధరఝావారు తత్త్వవివేకటిప్పణియందు వ్రాసియున్నారు.

విషమ చతుర్భుజ ఫలము.

విషమచతుర్భుజఫలానయనాయ కరణసూత్రం వృత్తార్ధం.

త్ర్యస్రేతుకర్ణోభయతస్స్థితేయేతయోఃఫలైక్యంఫలమత్రనూనం ౯౭

అనంతరోక్తక్షేత్రాంతర్గతత్ర్యస్రయోః ఫలే ౯౨౪, ౨౩౧౦ అనయో రైక్యం తస్యఫలం ౩౨౩౪.

టీ॥ కర్ణోభయతః = కర్ణముయొక్క రెండువైపులను, యే = ఏ, త్ర్యస్రే = త్రిభుజములు, స్థితే = ఉన్నవో, తయోః = ఆత్రిభుజములయొక్క, ఫలైక్యం = ఫలములయోగము, అత్ర = ఈచతుర్భుజమునందు, ఫలం = ఫలము నూనం = నిశ్చయము.

172. ప్ర. పూర్వోదాహృతంబగు అకగచ క్షేత్రమునందు అగకర్ణము 77 చే 'అకగ' 'అచగ' త్రిభుజములు రెండు గలవు. అందు అకగత్రిభుజమునందు అందలిలంబము 'కల' 24 చే భూమి 77ని గుణించి అర్ధింప $\frac{77 \times 24}{2} = 77 \times 12 = 924$ ఫలము.

ఇట్లు అచగత్రిభుజమునందు అందలిలంబము చవ 64 చే భూమి 77ని గుణించి అర్ధింప $\frac{77 \times 60}{2} = 77 \times 30 = 2310$ ఫలము. ఈరెండుఫలములయొక్కయు యోగము $2310 + 924 = 3234$ అకగచ చతుర్భుజక్షేత్రఫలము.

ఇట్లు విషమచతుర్భుజములందు త్రిభుజములుగ విభాగములుచేసి ఆయా త్రిభుజములకు వేర్వేరఫలముల గనుగొని కలిపినచో మొత్తము ఫలమగును. అట్లు కేవలత్రిభుజములుగను, కొన్నిత్రిభుజములు కొన్ని సమలంబ చతుర్భుజములు ఇట్లును విభాగముచేసి ఫలములను వేర్వేర గనుగొని కలుపవలెను.

ఇట్లు చతుర్భుజాది సర్వబహుభుజక్షేత్రములందును గ్రహింపవలయును.

సమలంబచతుర్భుజము.

సమానలంబస్యాబాధాదిజ్ఞానాయకరణసూత్రం వృత్తద్వయం

సమానలంబస్యచతుర్భుజస్య ముఖోనభూమింపరికల్ప్యభూమిం।
భుజౌభుజౌత్ర్యస్రవదేవసాధ్యే తస్యాబధేలంబమితిస్తతశ్చ॥ ౯౮॥
ఆబాధయోనాచతురస్రభూమి స్తల్లంబవర్గైక్యపదంశ్రుతిస్స్యాత్॥
సమానలంబేలఘుదోఃకుయోగాన్ముఖాన్యదోస్సంయుతిరల్పికాస్యాత్

టీ॥ సమానలంబస్య = సమమైనలంబములుగల, చతుర్భుజస్య = చతుర్భుజక్షేత్రమునకు, ముఖోనభూమిం = ముఖముచే వ్యవకలింపబడిన భూమిని,

భూమిం = భూమిగను, భుజౌ = భుజలను, భుజౌ = భుజలుగను, పరికల్ప్య= కల్పించి తస్య = ఆక్షేత్రమునకు, త్ర్యస్రవదేవ = త్రిభుజక్షేత్రమునకువలె, అబధే = ఆబాధలు, సాధ్యే = సాధింపదగినవి, తతః = ఆఆబాధలవలన,లంబమితిశ్చ = లంబపరిమాణమున్ను (సాధింపదగినది). చతురస్రభూమిః = చతుర్భుజక్షేత్రసంబంధమగుభూమి ఆబాధయా = ఒకఆబాధచే, ఊనా(కార్యా) = తీసివేయదగినది. తల్లంబవర్గైక్యపదం = ఆఆబాధోనితభూమియొక్కయు లంబముయొక్కయు వర్గములయోగమునకు మూలము, శ్రుతిః = కర్ణము, స్యాత్ = అగును. సమానలంబే= సమలంబచతుర్భుజక్షేత్రమునందు, లఘుదోఃకుయోగాత్= లఘుభుజయొక్కయు భూమియొక్కయు యోగముకంటె ముఖాన్యదోస్సంయుతిః = ముఖముయొక్కయు, ఇతరభుజయొక్కయు యోగము అల్పికా = అల్పము, స్యాత్ = అగును.

173. ప్ర. (1) సమలంబ చతుర్భుజక్షేత్రమునందు లంబసాధనము.

ముఖపరిమాణమును భూపరిమాణమువలన తీసివేసి ఆశేషమును భూమిగను భుజలను భుజలుగను కల్పించి త్రిభుజమునందువలె ఆబాధలనుసాధించి వాటివలన లంబమును సాధింపుము.

(2) చతుర్భుజక్షేత్రమునం దివ్వబడిన భూపరిమాణమువలన ఒకఆబాధను వ్యవకలింపనగు శేషముయొక్కయు లంబముయొక్కయు వర్గముల యోగమునకు మూలము కర్ణమగును. అనగా క్షేత్రమునందు కుడివైపు ఆబాధను వ్యవకలింపనగు శేషమువలన సాధించినకర్ణము కుడివైపుభుజాగ్రమునుండి భూమియొక్క ఎడమవైపు కొనవరకునున్నది యగుచున్నది. ఎడమఆబాధను వ్యవకలింపనగు శేషమువలననైన కర్ణము ఎడమభుజయొక్క అగ్రమునుండి భూమియొక్క కుడివైపుకొనవరకునున్నది యగుచున్నది.

(3) సమలంబక్షేత్రమునందు చిన్నభుజయొక్కయు భూమియొక్కయు యోగముకంటె ఇతరభుజయొక్కయు ముఖముయొక్కయు యోగము అల్పమగును.

ఉదాహరణమ్.

ద్విపంచాశన్మితవ్యేకచత్వారింశన్మితౌ భుజౌ।
ముఖంతు పంచవింశత్యా తుల్యం షష్ట్యా మహీ కిల॥ ౮౫॥

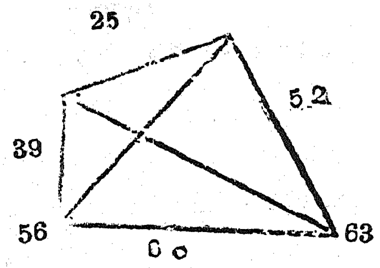
అతుల్యలంబకం క్షేత్ర మిదం పూర్వై రుదాహృతం।
షట్పంచాశ త్త్రిషష్టిశ్చ నియతే కర్ణయో ర్మితీ॥ ౮౬॥

కర్ణౌ తత్రాపరౌ బ్రూహి సమలంబేచ తచ్ఛ్రుతీ॥ ౮౭॥

తా॥ ఒక చతుర్భుజక్షేత్రమునందు ఒకభుజ52 రెండవభుజ39 ముఖము25 భూమి60 ఈక్షేత్రము అసమలంబక్షేత్రమని ప్రాచీను లుదహరించియున్నారు. ఆక్షేత్రమునందు ఒకకర్ణము56 రెండవకర్ణము63. ఇట్టి క్షేత్రమునందు ఒకకర్ణమును బట్టి మరియొకకర్ణమును సాధింపుము.

లేక ఇష్టకర్ణమును మరియొకసంఖ్యను కల్పించి చెప్పబడినవాటికంటె నితరములగు కర్ణములనున్ను చెప్పుము.

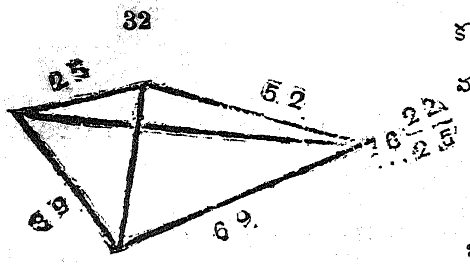
ఆక్షేత్రము సమలంబమగుచో కర్ణములెంతెంతయుండును? చెప్పుము.



న్యాసః. అత్ర బృహత్కర్ణం త్రిషష్టిమితం పరికల్ప్య జ్ఞాతః ప్రాగ్వదన్యః కర్ణః౮౮॥

ఈక్షేత్రమునందు పెద్దకర్ణము 63 తెలిసినదియనియు రెండవకర్ణము తెలియదనియు భావించి 63 కర్ణమువలనరెండవకర్ణము సాధింపబడుచున్నది. ఈపెద్దకర్ణముచే రెండుత్రిభుజములైనవి. అందు పైత్రిభుజమునందు 25, 52 భుజలు, 63 భూమి. ఈక్షేత్రమునందు ఆబాధలు 15, 48 లంబము 20 అయినవి. అట్లు క్రిందిత్రిభుజమునందు 60, 39 భుజలు. 63 భూమి. ఇందును ఆబాధలు 15, 48 యునైనవి. లంబము 36 ఐనది. ఇందు ఏకదిక్కాబాధలకుఅంతరములేకుండుటచే రెండుక్షేత్రములయొక్కయు లంబములమూలములు ఒకచోటనే పడినవియని తెలియదగియున్నది. కావున రెండులంబములయొక్కయు, యోగము $20 + 36 = 56$ రెండవకర్ణము అగుచున్నది. ఈప్రకారము 56 కర్ణమువలన 63 కర్ణమున్ను తెలియగలదు. ఇట్లంతటను గ్రహించునది. ఇట్లు అన్యోన్యలంబములగు కర్ణములుగల విషమచతుర్భుజమునందును (167 ప్ర. 2)చే ఫలము వచ్చుచున్నది.

అథ షట్పంచాశత్ స్థానే ద్వాత్రింశన్మితం ౩౨ కర్ణం ప్రకల్ప్య ప్రాగ్వత్సాధ్యమానేకర్ణే న్యాసః. జాతం కరణీఖండద్వయం ౬౨౧, ౨౭౦౦ అనయోర్మూలయోః ౨౪ $\frac{౨౩}{౨౫}$, ౫౧ $\frac{౨౪}{౨౫}$ ఐక్యం ౭౬ $\frac{౨౨}{౨౫}$ ద్వితీయఃకర్ణః.



పూర్వక్షేత్రమునందలి భుజలుగలిగి 56 కర్ణమునకు 32 కర్ణమగుచో రెండవకర్ణము నెఱుంగుట.

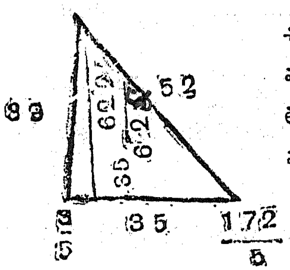
ఆకర్ణమునకు రెండువైపుల రెండు త్రిభుజము లేర్పడుచున్నవి. ఒకత్రిభుజమునందు 39, 25 భుజలు 32 భూమి ఆబాధలు 30, 2 లంబము $\sqrt{621}$

ఇట్లు రెండవత్రిభుజమునందు 60, 52 భుజలు 32 భూమియు నగుచున్నవి. ఇందును 30, 2 ఆబాధ లగుచున్నవి. ఇందును లంబము $\sqrt{2700}$ అగుచున్నది. ఇచటను ఒకవైపుననైన ఆబాధలయంతరము శూన్యమితమగుటచే లంబయోగమే కర్ణమగును. కావున పైలంబవర్గముల ఆసన్న మూలములయోగముకర్ణమగుచున్నది.

$$\therefore \sqrt{621} + \sqrt{2700} = 24\frac{23}{25} + 51\frac{24}{25} = 76\frac{22}{25}$$ కర్ణము.

అథ తదేవ క్షేత్రం చేత్సమలంబం (లంబానయనం)

తదా ముఖోనభూమిం పరికల్ప్య భూమి మితి లంబాదిజ్ఞానార్థం త్ర్యస్రం కల్పితం. అత్రాబాధే జాతే $\frac{౩}{౫}$, $\frac{౧౭౨}{౫}$. లంబశ్చ కరణీగతో జాతః $\frac{౩౮౦౧౬}{౨౫}$ ఆసన్నమూలకరణేన ౩౮ $\frac{౬౨౨}{౬౨౫}$. జాతః అయం తత్ర చతుర్భుజే సమలంబః.

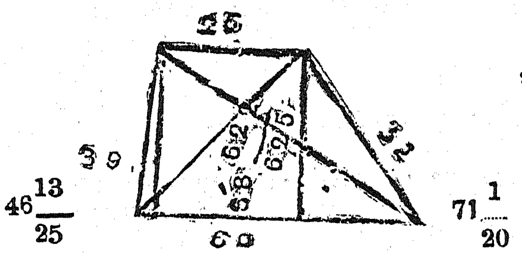


పైనచెప్పబడిన భుజలుగల క్షేత్రము సమలంబ చతుర్భుజక్షేత్ర మగుచో. పైపద్ధతిచే భూమి 60 వలన ముఖము 25ను వ్యవకలింప 35 శేషము భూమిగను తక్కినభుజలు 39, 52న్ను భుజలుగ గల్పించి త్రిభుజము చూపబడినది. ఇందు (163 ప. చే) ఆబాధలు $\frac{3}{5}$, $\frac{172}{5}$ అగుచున్నవి. తత్తుతమ భుజవర్గములవలన ఆయాఆబాధావర్గములనువ్యవకలింప లంబవర్గము $\frac{38016}{25}$ దీనియొక్క ఆసన్న మూలము. 38 $\frac{622}{625}$ ఇది త్రిభుజక్షేత్రమునందు లంబ మగుచున్నది. ఇదియే ఆచతుర్భుజమునందును సమలంబపరిమాణమగుచున్నది.

సమలంబవశాత్కర్ణానయనం

లఘ్వాబాధోనితభూమే స్సమలంబస్య చ వర్గయోగః ౫౦౪౯ అయంకర్ణవర్గః. ఏవం బృహదాబాధాతో ద్వితీయకర్ణవర్గః ౨౧౭౬. అనయోరాసన్నమూలకరణేన జాతౌ కర్ణౌ ౭౧ $\frac{౧}{౨౦}$, ౪౬ $\frac{౧౩}{౨౦}$ ఏవం చతురస్రే తేష్వేవబాహుష్వస్యా కర్ణౌ భవతః.

—♦ సమలంబమువలన కర్ణమును కనుగొనుట. ♦—

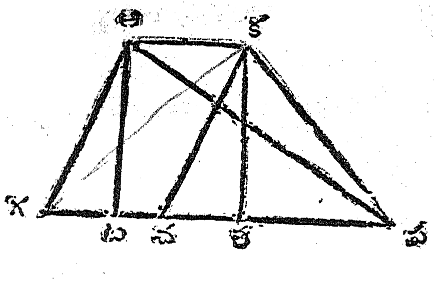


చిన్న ఆబాధ $\frac{3}{5}$ దీనిని చతుర్భుజయందలి భూమి 60 వలన వ్యవకలింప $\frac{297}{5}$ దీనియొక్కయు సమలంబము 38 $\frac{622}{625}$ యొక్కయువర్గముల యోగము 5049 దీనియొక్క అసన్నమూలము. 71 $\frac{1}{20}$ పెద్దకర్ణ మగుచున్నది.

ఇట్లు పెద్దయాబాధను భూమివలన వ్యవకలింప $\frac{128}{5}$, దీనియొక్కయు సమలంబముయొక్కయు వర్గములయోగము 2176 దీనిమూలము చిన్నకర్ణ మగుచున్నది.

ఇట్లు చతుర్భుజక్షేత్రమునందు ఆభుజలయందే బహువిధములగు కర్ణములగుచున్నవి.

ఉపపత్తి: సమలంబక్షేత్రమునందు లంబ కర్ణముల తెలియుటనుగూర్చి:



'అగపక' సమానలంబ చతుర్భుజము అట, కత సమానలంబములు. అనగా అట =కత. ఈచతుర్భుజమునందు అగ సమానాంతరమగు కచరేఖ చేయబడెను. అక రేఖయు గపరేఖయు సమానాంతరరేఖలై యున్నవి. కావున అగచక సమానాంతర చతుర్భుజ మగుచున్నది. ∴ అక = గచ. (రే 1 అ. 34 ప్ర.) ఇట్లు అగ = కచ కావున చప = (గప — గచ) = (గప—అక) కచప త్రిభుజమునందు కచతో సమానమగు అగ రేఖభుజగను. చపతో సమానమగు (గప—అక) = ముఖోనభూమి భూమిగను కల్పించి కతలంబము సాధింపబడెను. అందు చత చిన్న ఆబాధ తప పెద్దయాబాధ. కావున లఘ్వాబాధోనితభూమి గప — గట = టప ఇది భుజ, అట కోటి, వీటి వర్గయోగము అప కర్ణముయొక్క వర్గ మగుచున్నది. అట్లు గప — తప = గత భుజయొక్కయు కత కోటియొక్కయు వర్గములయోగము కగ (క బిందువునుండి గ బిందువువరకు చేయనగురేఖ) కర్ణ వర్గ మగుచున్నది. ఇట్లు పద్ధతియంతయు ఉపపన్న మగుచున్నది.

కర్ణానయనమున బ్రహ్మగుప్తాదుల పద్ధతి.

ఏవమనియతత్వేపి నియతావేవకర్ణౌ వానీతౌ బ్రహ్మగుప్తాద్యై స్తదానయనం యథా.

కర్ణాశ్రితభుజఘాతైక్యముభయథాన్యోన్యభాజితంగుణయేత్।
యోగేన భుజప్రతిభుజవధయోః కర్ణౌ పదే విషమే॥ ౯౦॥

టీ॥ ఉభయథా = రెండువిధములుగను, అన్యోన్యభాజితం = అన్యోన్యముచే భాగింపబడిన, కర్ణాశ్రితభుజఘాతైక్యం = కర్ణమును సంబంధించిన భుజలయొక్క గుణనఫలయోగమును, భుజప్రతిభుజవధయోః = సమ్ముఖభుజలగుణనఫలములయొక్క, యోగేన = యోగముచే, గుణయేత్ = గుణింపవలెను. పదే= ఆగుణనఫలములమూలములు, విషమే=విషమచతుర్భుజమునందు, కర్ణౌ=కర్ణములు

174. ప్ర. (1) చతుర్భుజమునందు ఒకటి ప్రథమకర్ణము. రెండవది ద్వితీయకర్ణము. అనుకొందము. ప్రతికర్ణమునకు రెండువైపులను రెండు రెండు భుజలుండును. ప్రథమకర్ణముయొక్క ఒకవైపుననున్న భుజలలో నొకభుజచే రెండవభుజను గుణింపుము. ఇట్లు రెండవవైపుననున్న భుజలలోనున్ను ఒకదానిచే రెండవదానిని గుణింపుము. ఈరెండుగుణఫలములను కలుపుము. ఇదిప్రథమకర్ణమును సంబంధించిన భుజఘాతైక్యము.

(2) అట్లు ద్వితీయకర్ణమునకును రెండువైపులనుండు వేరువేరు భుజఘాతముల గనుంగొని ఆభుజఘాతములకు ఐక్యమును చేయుము. ఇది ద్వితీయకర్ణమును సంబంధించిన భుజఘాతైక్యము.

(3) ప్రథమకర్ణముయొక్క భుజఘాతైక్యమును ద్వితీయకర్ణముయొక్క భుజఘాతైక్యముచే భాగింపుము. ద్వితీయకర్ణముయొక్క భుజఘాతైక్యమును ప్రథమకర్ణముయొక్క భుజఘాతైక్యముచే భాగింపుము.

(4) పిమ్మట సమ్ముఖభుజలను గుణించి అనగా భూమిని ముఖముచే గుణించి చతుర్భుజక్షేత్రసంబంధములగు భుజలలో నొకదానిని మరియొకదానిచే గుణించి రెండుగుణనఫలములను కలుపుము. ఇది భుజప్రతిభుజవధయోగము. దీనిచే పూర్వము భాగింపగావైన సంఖ్యలను గుణింపుము.

(5) అట్లు భాగించి గుణింపగానగు సంఖ్యలయొక్క వర్గమూలములు విషమచతుర్భుజమునందు కర్ణము లగును.

(6) విషమచతుర్భుజయొక్క 4 భుజలలోను పెద్దభుజ భూమి. చిన్నభుజ ముఖము. తక్కినవి బాహువులు (భుజలు) ఇట్లు వ్యవహరింపుము.

న్యాసః. (85ఉదాహరణశ్లోకముచూ.) కర్ణాశ్రితభుజఘాతైక్యే కవారమనయోః ౨౫, ౩౯ ఘాతః ౯౭౫ తథా ౫౨, ౬౦ అనయోర్ఘాతః ౩౧౨౦

ఘాతయో ర్ద్వయో రైక్యం ౪౦౯౫ తథా ద్వితీయవారం ౨౫,౫౨ అనయోర్ఘాతే జాతం ౧౩౦౦ తథా ౩౯,౬౦ అనయోర్ఘాతే జాతం ౨౩౪౦ ఘాతయోర్ద్వయోరైక్యం ౩౬౪౦ ఏతదైక్యం; భుజప్రతిభుజయోః ౫౨, ౩౯ ఘాతః ౨౦౨౮ పశ్చాత్ ౨౫,౬౦ అనయోర్వధః ౧౫౦౦ తయోరైక్యం ౩౫౨౮ అనేన గుణితం జాతం ౧౨౮౪౧౯౨౦ ప్రథమకర్ణాశ్రితభుజఘాతైక్యేన ౪౦౯౫ భక్తం లబ్ధం ౩౧౩౬ అస్యమూలం ౫౬ ఏకః కర్ణః. తథా ద్వితీయకర్ణార్థం ప్రథమకర్ణాశ్రితభుజఘాతైక్యం ౪౦౯౫ భుజ ప్రతిభుజవధయోగ గుణితం జాతం ౧౪౪౪౭౧౬౦ అన్యకర్ణాశ్రితభుజఘాతైక్యేన ౩౬౪౦ భక్తం లబ్ధం ౩౯౬౯ అస్యమూలం ౬౩ ద్వితీయఃకర్ణః॥

ఉదా: ముఖము = 25, భూమి = 60, భుజలు 52, 39 (85 ఉదా. శ్లో. చూ) క్రింద ఉపపత్తియందు చూపబడిన వృత్తాంతర్గతచతుర్భుజమునందు క = భూమి, ఘ = ముఖము. అ = భుజ (1), గ = భుజ (2). చ=ప్రక, జ=ద్విక $(\text{అ}\times\text{ఘ})+(\text{క}\times\text{గ})$= ప్రథమకర్ణాశ్రిత భుజఘాతైక్యము. అట్లు $(\text{అ}\times\text{క})+(\text{గ}\times\text{ఘ})$ = ద్వితీయకర్ణాశ్రితభుజఘాతైక్యము. $\text{క}.\text{ఘ}+\text{అ}.\text{గ}$ = భుజప్రతి భుజఘాతయోగము. క = 60, ఘ = 25, అ = 39, గ = 52 అనుకొనుచో

పద్ధతిప్రకారము—

$$\frac{\{(\text{అ}\times\text{ఘ})+(\text{క}\times\text{గ})\}\times\{(\text{క}\times\text{ఘ})+(\text{అ}\times\text{గ})\}}{(\text{అ}\times\text{క})+(\text{గ}\times\text{ఘ})}$$

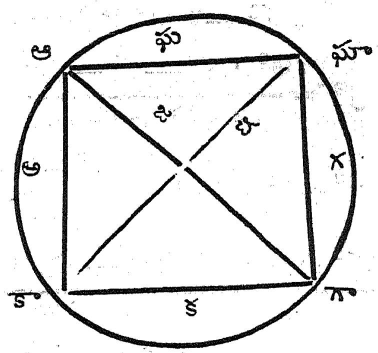
$$=\frac{\{(39\times 25)+(60\times 52)\}\,(60\times 25+39\times 52)}{(60\times 39)+(25\times 52)}$$

$$=\frac{(975+3120)\times(2028+1500)}{2340+1300}=\frac{4095\times 3528}{3640}=3969$$

అట్లు $\frac{\{(\text{అ}\times\text{క})+(\text{గ}\times\text{ఘ})\}\times\{(\text{క}\times\text{ఘ})+(\text{అ}\times\text{గ})\}}{(\text{అ}\times\text{ఘ})+(\text{క}\times\text{గ})}=\frac{3640\times 3528}{4095}$

$=3136$ ఈ రెండిటియొక్కయు వర్గమూలములు $\sqrt{3969}=63$ న్ను $\sqrt{3136}=56$ న్ను చ, జ, కర్ణములగుచున్నవి.

ఉపపత్తి; సరల త్రికోణమతి చే; (165 ప్రి. ఉపపత్తి 4, 5 చూ.)



$$\text{కోజ్యా ఆ}=\frac{\text{అ}^2+\text{ఘ}^2-\text{చ}^2}{2\,\text{అ}.\text{ఘ}}$$

$$\text{కోజ్యా గా}=\frac{\text{క}^2+\text{గ}^2-\text{చ}^2}{2\,\text{క}.\,\text{గ}}$$

$$\therefore \text{చ}^2=\text{క}^2+\text{గ}^2-2\text{క}.\text{గ}.\text{కోజ్యా గా}$$

$$=\text{అ}^2+\text{ఘ}^2-2\text{అ}.\text{ఘ}.\text{కోజ్యాఆ}$$

$$\because \text{కోజ్యా ఆ}=\text{కోజ్యా}(180-\text{గా})$$

$$=-\text{కోజ్యాగా}$$

$$\therefore \text{చ}^2=\text{అ}^2+\text{ఘ}^2-2\text{అఘ}.\text{కోజ్యాఆ}=\text{క}^2+\text{గ}^2+\text{క}.\text{గ}.\text{కోజ్యాఆ}$$

$$\therefore \text{కోజ్యా ఆ}=\frac{\text{అ}^2+\text{ఘ}^2-\text{క}^2-\text{గ}^2}{2\,(\text{అ}.\text{ఘ}+\text{క}.\text{గ})}$$

$$\therefore \text{చ}^2=\text{అ}^2+\text{ఘ}^2-2\,\text{అ}.\,\text{ఘ}.\left\{\frac{\text{అ}^2+\text{ఘ}^2-\text{క}^2-\text{గ}^2}{2(\text{అ}.\text{ఘ}+\text{క}.\text{గ})}\right\}$$

$$=\frac{(\text{అ}^2+\text{ఘ}^2)\times(\text{అ}.\text{ఘ}+\text{క}.\text{గ})-\text{అ}.\text{ఘ}(\text{అ}^2+\text{ఘ}^2-\text{క}^2-\text{గ}^2)}{\text{అఘ}+\text{కగ}}$$

$$=\frac{\text{అ}^3\text{ఘ}+\text{అ ఘ}^3+\text{అ}.^2\text{క}.\text{గ}+\text{ఘ}^2\text{కగ}-\text{అ}^3\text{ఘ}-\text{అఘ}^3+\text{అఘక}^2+\text{అఘగ}^2}{\text{అఘ}+\text{కగ}}$$

$$=\frac{\text{అ}^2.\text{కగ}+\text{ఘ}^2\text{కగ}+\text{అఘక}^2+\text{అఘగ}^2}{\text{అఘ}+\text{కగ}}$$

$$=\frac{(\text{అ}.\text{క})\,(\text{అ}.\text{గ})+(\text{క}.\text{ఘ})\,(\text{గ}.\text{ఘ})+(\text{అ}.\text{క})\,(\text{క}.\text{ఘ})+(\text{అ}.\text{గ})\,(\text{గ}.\text{ఘ})}{\text{అ}.\text{ఘ}+\text{క}.\text{గ}}$$

$$=\frac{\text{అక}(\text{అగ}+\text{కఘ})+\text{గఘ}(\text{అగ}+\text{కఘ})}{\text{అ}.\text{ఘ}+\text{క}.\text{గ}}=\frac{(\text{అక}+\text{గఘ})\,(\text{అగ}+\text{కఘ})}{\text{అఘ}+\text{కగ}}=\text{చ}^2$$

అప్రకారము $\text{కోజ్యాకా}=\frac{\text{అ}^2+\text{క}^2-\text{జ}^2}{2\,\text{అ}.\text{క}}$, $\text{కోజ్యాఘూ}=\frac{\text{గ}^2+\text{ఘ}^2-\text{జ}^2}{\text{గ}.\text{ఘ}\,2}$

$$\therefore \text{జ}^2=\text{అ}^2+\text{క}^2-2\text{అ}.\text{క}.\text{కోజ్యాకా}=\text{గ}^2+\text{ఘ}^2-2\text{గఘ}.\text{కోజ్యాఘూ}$$

$$\because \text{కోజ్యాకా} = \text{కోజ్యా}\,(180 - \text{ఘా}) = -\,\text{కోజ్యాఘా}$$

$$\therefore \text{జ}^2 = \text{అ}^2 + \text{క}^2 - 2\,\text{అక}\ \text{కోజ్యాకా} = \text{గ}^2 + \text{ఘ}^2 + 2\text{గఘ}\,\text{కోజ్యాకా}$$

$$\therefore \text{కోజ్యాకా} = \frac{\text{అ}^2 + \text{క}^2 - \text{గ}^2 - \text{ఘ}^2}{2\,(\text{అక} + \text{గఘ})}$$

$$\therefore \text{జ}^2 = \text{అ}^2 + \text{క}^2 - 2\text{అక} \times \left(\frac{\text{అ}^2 + \text{క}^2 - \text{గ}^2 - \text{ఘ}^2}{2\,(\text{అక} + \text{గఘ})}\right)$$

$$= \frac{(\text{అ}^2 + \text{క}^2) \times (\text{అక} + \text{గఘ}) - \text{అక}(\text{అ}^2 + \text{క}^2 - \text{గ}^2 - \text{ఘ}^2)}{\text{అక} + \text{గఘ}}$$

$$= \frac{\text{అ}^2\text{గఘ} + \text{క}^2\text{గఘ} + \text{అకగ}^2 + \text{అకఘ}^2}{\text{అక} + \text{గఘ}} = \frac{(\text{అగ} + \text{కఘ})\,(\text{కగ} + \text{అఘ})}{\text{అక} + \text{గఘ}} = \text{జ}^2$$

పైగణితమునందు హారస్థానమునందు చ వర్గ జ వర్గములు రెండిటియందును $\text{అగ} + \text{కఘ}$ గుణకమై యున్నది. ఇది భుజప్రతిభుజవధయోగ మగుచున్నది. $\text{అక} + \text{గఘ}$ ఇది చవర్గమునందు భాజ్యమున్ను జ వర్గమునందు భాజకమున్ను ఐనది $\text{అఘ} + \text{కగ}$ ఇది చవర్గమునందు భాజకముగను జవర్గమునందు భాజ్యముగను ఉన్నది. ఇవి ఆయాకర్ణమును సంబంధించిన భుజఘాతముల యోగము లగుచున్నవి. ఇట్లు సూత్రము పపన్న మగుచున్నది. దీనిచే నీకర్ణానయనము వృత్తాంతర్గతచతుర్భుజమును సంబంధించినది యనియు స్పష్ట మగుచున్నది. ఈ పద్ధతి గుణనభజనాదులచే విశేషశ్రమకర మగుచున్నది.

అస్యకర్ణానయనస్యప్రక్రియాగౌరవంలఘుప్రక్రియాకర్మవద్వారేణాహ
అభీష్టజాత్యద్వయబాహుకోటయః పరస్పరంకర్ణహతాభుజా ఇతి।
చతుర్భుజంయద్విషమంప్రకల్పితం శ్రుతీతుతత్రత్రిభుజద్వయాత్తతః॥
బాహ్వోర్వధఃకోటివధేనయుక్స్యాదేకాశ్రుతిః కోటిభుజావధైక్యం।
అన్యా లఘౌసత్యపిసాధనేస్మిన్పూర్వైఃకృతం యద్గురు తన్నవిద్మః

టీ॥ అభీష్ట జాత్యద్వయ బాహుకోటయః = అభీష్టములగు రెండు జాత్యము లందలి భుజకోటులు, పరస్పరం = అన్యోన్యము, కర్ణహతాః = కర్ణములచేగుణింపబడినవై, భుజాః = చతుర్భుజక్షేత్రభుజలు (అగును) ఇతి = ఇట్లు, యత్ = ఏ విషమం = విషమమగు, చతుర్భుజం = చతుర్భుజక్షేత్రము, ప్రకల్పితం = కల్పింప

బడినదో, తత్ర = ఆచతుర్భుజక్షేత్రమునందు, శ్రుతీతు = కర్ణములున్న, తతః = ఆ, త్రిభుజద్వయాత్ = జాత్యత్రిభుజద్వయమువలనను (అగుచున్నవి) బాహ్వోర్వధః = భుజలయొక్క గుణనము, కోటివధేన = కోటులయొక్క గుణనముతో, యుక్ = కూడినదై, ఏకా శ్రుతిః స్యాత్ = ఒక కర్ణము అగును. కోటిభుజావధైక్యం = కోటిని భుజచే గుణింపవగు గుణనఫలముల యోగము, అన్యా శ్రుతిః = రెండవకర్ణము. అస్మిన్ = ఈ, లఘౌ = సులభమైన, సాధనే = సాధనము, సత్యపి = ఉన్నను, పూర్వైః = పూర్వులగు బ్రహ్మగుప్తాములచే గురు = శ్రమకరమగుపద్ధతి, యత్ = ఏకారణముచే, కృతం = చేయబడినదియో (తత్ = ఆకారణమును)న విద్మః = ఎఱుంగము.

జాత్యద్వయకోటిభుజాః పరస్పరం శ్రుతిహతా భుజా విషమే।
అధికో భూః ర్ముఖ మూనో బాహుద్వితయం భుజావన్యౌ॥ బ్రహ్మగుప్తుడు.

175. ప్ర. పూర్వపద్ధతికంటె సులభమగు కర్ణానయనపద్ధతి.

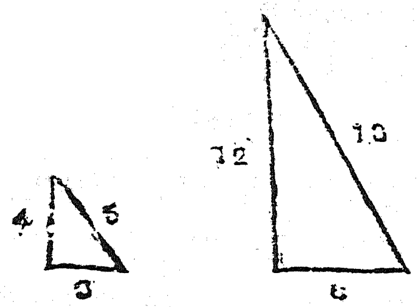
(1) ఇష్టములగు రెండుజాత్యములను కల్పించి (153, 154, 155 ప్ర చూ) మొదటిజాత్యముయొక్క కర్ణముచే ద్వితీయజాత్యముయొక్క భుజకోటులను వేర్వేరుగ గుణింపుము. ద్వితీయజాత్యకర్ణముచే ప్రథమజాత్యముయొక్క భుజకోటులను వేర్వేరుగ గుణింపుము. ఈ 4 గుణనఫలములున్ను విషమచతుర్భుజమునందలి 4భుజ లగుచున్నవి. అందు పెద్దసంఖ్య భూమి. చిన్నసంఖ్య ముఖము. తక్కినవి భుజలు.

(2) ఇట్టి విషమచతుర్భుజమునందు ప్రథమజాత్యభుజను ద్వితీయజాత్యభుజచే గుణింపుము. ప్రథమజాత్యకోటిని ద్వితీయజాత్యకోటిచే గుణింపుము. ఈగుణనఫలముల యోగము ఒకకర్ణము. ప్రథమజాత్యభుజను ద్వితీయజాత్యకోటిచే గుణింపుము. ప్రథమజాత్యకోటిని ద్వితీయజాత్యభుజచే గుణింపుము. ఇది రెండవకర్ణము.

(3) ఇచట నీవిషయము గమనింపదగియున్నది. విషమచతుర్భుజక్షేత్రమునందలి రెండురెండుభుజలను ఒక్కొకసంఖ్యచే వేర్వేరుగ నపవర్తింపుము. అట్లపవర్తింప, అపవర్తనసంఖ్యలు కర్ణములుగను ఆరెండురెండు అపవర్తిత సంఖ్యలు

భిన్న భిన్న జాత్యములందు భుజకోటులుగను న్నై రెండుజాత్యములగుచో నావిషమ చతుర్భుజము ఈపద్ధతికి విషయ మగుచున్నది.

(4) అట్లు జాత్యద్వయముచేనైన విషమచతుర్భుజమునందు కర్ణముల సాధించుకొరకే బ్రహ్మగుప్తాదులు బహుప్రయాసకరమగుపద్ధతిని చెప్పియున్నారు.

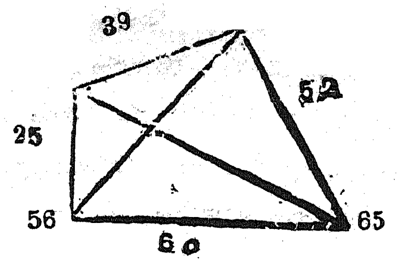


న్యాసః. ఏతయో రితరేతరకర్ణహతా భుజకోటయః ఇతి కృతే భుజాః ౨౫, ౬౦, ౫౨, ౩౯ ఆసాం మహతీ భూ ర్లఘుర్ముఖం ఇతరౌ బాహూ ఇతి ప్రకల్ప్య క్షేత్రం, దర్శితం తత్ర కర్ణౌ మహతాయాసే నానీతౌ ౬౩, ౫౬ తస్యైవజాత్యద్వయస్య ఇతరేతరభుజకోట్యోర్ఘాతౌ ౩౬, ౨౦ అనయోరైక్య మేకఃకర్ణః ౫౬ బాహ్వోః ౩, ౫ కోట్యోశ్చ ౧౨, ౪ ఘాతౌ ౧౫, ౪౮ అనయోరైక్య మన్యఃకర్ణః ౬౩ ఏవం శృతీ స్యాతాం. ఏవం సుఖేన జాయేతే.

పూర్వమం దుదహరింపబడిన క్షేత్రమునందు భూమి 60 ముఖము 25 భుజలు 52, 39 ఇందు 60, 25 ఈసంఖ్యలకు అపవర్తనాంకము 5, ఇది ఒకజాత్యముయొక్క కర్ణము. అపవర్తితసంఖ్యలు 12, 5 ఇవి రెండవజాత్యమునకు కోటిభుజలు. ఇట్లు 52. 39 ఈసంఖ్యలకు13 అపవర్తనాంకము ఇది రెండవజాత్యమునకు కర్ణము. అపవర్తనసంఖ్యలు 4, 3 ఇవి మొదటిజాత్యమునకు కోటిభుజలు. ఈరెండు జాత్యములును పైనచూపబడినవి. 5 × 12 = భూమి 5 × 5 ముఖము. 13 × 4 = భుజ 13 × 3 = భుజ. ఇట్లు ఇదివరలోచూపిన బ్రహ్మగుప్తవాక్యము ననుసరించి పెద్దసంఖ్య భుజ, చిన్నసంఖ్య ముఖము తక్కినవి భుజలు. ఇట్లు విషమచతుర్భుజమైనది.

ఇందు రెండుజాత్యములయొక్క భుజలగుణనము $12 \times 4 = 48$ కోటుల గుణనము $5 \times 3 = 15$ రెండిటియోగము $48 + 15 = 63$ ఒకకర్ణము. ఒకజాత్యముయొక్క కోటిని రెండవ జాత్యముయొక్క భుజచే గుణింప $12 \times 3 = 36$. ఇట్లు $5 \times 4 = 20$ రెండిటియోగము $36 + 20 = 56$ ఇది రెండవకర్ణము. ఇట్లు సుఖముగ సిద్ధించు కర్ణములను బ్రహ్మగుప్తాదులు మహాయాసముచే సాధించిరని భాస్కరాచార్యులవారు చెప్పుచున్నారు.

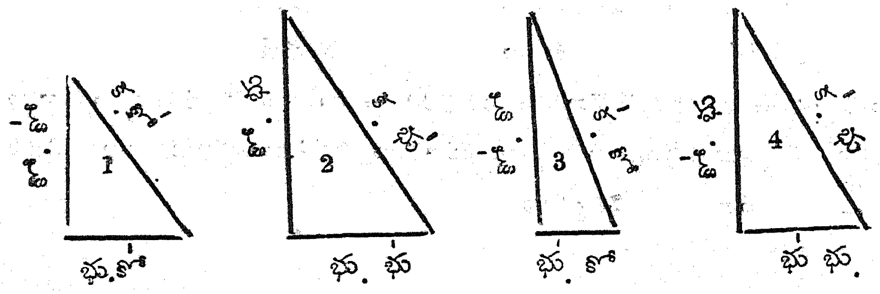
న్యాసః. అథ యది పార్శ్వయో ర్భుజయో ర్వ్యత్యయం కృత్వా న్యస్తం క్షేత్రం. తదా జాత్యద్వయకర్ణయో ర్వధః ౬౫ ద్వితీయః కర్ణః.



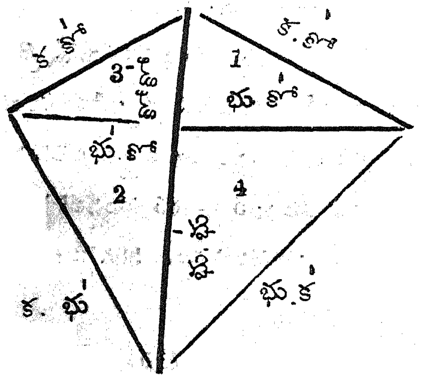
ఒకకర్ణమునకు ఒకవైపువనున్న భుజలను వ్యత్యయముగా నుంచినచో అనగా 25 భుజగను, 39 ముఖముగను క్షేత్రము నుంచినచో మొదటనియ్యబడిన రెండు జాత్యములయొక్కయు కర్ణములయొక్క గుణనము $13 \times 5 = 65$ రెండవకర్ణమగుచున్నది. ప్రథమకర్ణము 56గనే ఉన్నది.

ఉపపత్తి: ఒకజాత్యమునందలి భుజకోటికర్ణములను 3 టిని ఒకేసంఖ్యచే గుణింపగా నైన సంఖ్యలు, క్రమముగ భుజకోటికర్ణములుగా గల మరియొక జాత్యము మొదటిజాత్యమునకు సజాతీయమే యగుచున్నది. (రే 6 అ. పరి) కావున మొదటిజాత్యమున కోటిభుజకర్ణములు కో, భు, క ద్వితీయజాత్యమున కో', భు', క'. ప్రథమజాత్యకోటిభుజకర్ణములను ద్వితీయజాత్యమందలి కో', భు' వీటిచేతను వేర్వేర గుణింప రెండుజాత్యము లగుచున్నవి. ఇవి ప్రథమజాత్య సజాతీయములు. ద్వితీయజాత్యమందలి కో', భు', క', వీటిని ప్రథమజాత్యమందలి కో, భు వీటిచే వేర్వేరగుణింప రెండుజాత్యములు ద్వితీయజాత్య సజాతీయములగుచున్నవి.

ఆ జాత్యములు చూపబడుచున్నవి.



ఇందు 1, 3 లలో కోటులు. 2, 4 లలో భుజలు 2, 3 లలో కోటిభుజలు 1, 4 లలోని భుజకోటులు సమము లగుటచే నాలుగుజాత్యములను ఆయా సమము లగు కోటిభుజలు లోపల కలియునట్లును నాలుగిటియొక్క కర్ణములు బహిర్గతములై భుజలగునట్లును ఒకచో నుంచగా నొక విషమచతుర్భుజక్షేత్రమగుచున్నది.



ఇందు 1క్షేత్రముయొక్క కోటియు 4క్షేత్రముయొక్క భుజయును ఒకరేఖ యైనవి. ఇది యొకకర్ణము (రే1అ14 ప) అట్లు 3క్షేత్రముయొక్కయు 2క్షేత్రముయొక్కయు కోటిభుజల యోగమున్ను ఆరేఖయే యగుచున్నది. అట్లు1క్షేత్రముయొక్క భుజయును 3క్షేత్రముయొక్క భుజయును కలసి ఒకకర్ణరేఖ యైనవి. అట్లు 2క్షేత్రముయొక్క కోటియును 4 క్షేత్రముయొక్క కోటియున్ను ఆకర్ణరేఖగనే కలియుచున్నవి. ఇందు ఈవిషయము స్పష్టముగ గనుపట్టుచున్నది. ఈ చతుర్భుజభుజలు, ఆయాకర్ణకోటి ఘాతములును కర్ణభుజఘాతములును నైయున్నవి. దీనిని బాగుగ చూచుటచే సూత్రోపపత్తి స్పష్టమగును.

ఇదివరలో ప్రథమ జాత్య భుజకోటికర్ణములను ద్వితీయ జాత్య భుజకోటులచేతను ద్వితీయ జాత్య భుజకోటికర్ణములను ప్రథమజాత్య భుజకోటులచేతను

గుణింపగా నగు 4 క్షేత్రములయొక్కయు యోగముచే నైన చతుర్భుజము చూపబడినది.

అట్లు ప్రథమజాత్యభుజకోటికర్ణములను ద్వితీయజాత్యకర్ణముచేతను ద్వితీయజాత్యభుజకోటికర్ణములను ప్రథమజాత్య కర్ణముచేతను గుణింప రెండు జాత్యము లగుచున్నవి. అట్టి రెండుజాత్యములను రెండింటియొక్క కర్ణములును కలియునట్లు ఉంచినచో ఒకచతుర్భుజము గాగలదు. పైక్షేత్రమునందు చూడుము. నిలువుగ నొక కర్ణముగలదు. దానికి రెండువైపులను చెరియొక త్రిభుజమున్ను గనుపట్టుచున్నది. అట్లు ఉంచవలయును. అప్పుడు ఆక్షేత్రమందును నాలుగు భుజలున్ను ఈపైక్షేత్రమందువలె పరస్పర కర్ణకోటి కర్ణభుజ ఘాతములే యగుచున్నవి. ఒకకర్ణము మాత్రము పరస్పర కర్ణఘాత మగుచున్నది. కాని పరికించినచో ఈపైక్షేత్రమునందలి 1, 2 క్షేత్రము లొకవైపునను 3, 4క్షేత్రములొకవైపునను ఆక్షేత్రమునందు నిలువగానైన కర్ణమునకు ఉండగలవని స్పష్టమగుచున్నది. దానిచే ఒకవైపుననైన భుజలకు మార్పు గనుపట్టుచున్నది.

కావున ఒకవైపు భుజలనుమార్చి క్షేత్రమునుంచినచో అభీష్ట జాత్యద్వయముయొక్కయు కర్ణఘాతము ఆచతుర్భుజమునకు ఒకకర్ణమగునని చెప్పబడినది. తదితరకర్ణము, ఈక్షేత్రమందలి కర్ణమే యగును. మొదట గుణింపగానైన 4జాత్యములయొక్కయు కర్ణములును రెండవ చతుర్భుజము (జాత్యద్వయముచే నైనది) నందలి భుజలును సమములగుటచే ఆక్షేత్రములను రెండవ చతుర్భుజమునందు వాటికర్ణములు, సమములగు ఇందలి భుజలపైనుండునట్లుంచినచో అడ్డముగానైన కర్ణము అదియే యగుచున్నదియని ఇందు స్పష్టముగ గనుపట్టుచున్నది. ఇట్లే పద్ధతియంతయు నుపపన్న మగుచున్నది.

ఆయా భుజకోటికర్ణప్రమాణములుగల 4జాత్యములైన అట్టముక్కలను కత్తిరించి ఉంచి చూచినచో నీవిషయమంతయు స్పష్టముగ గోచరించును.

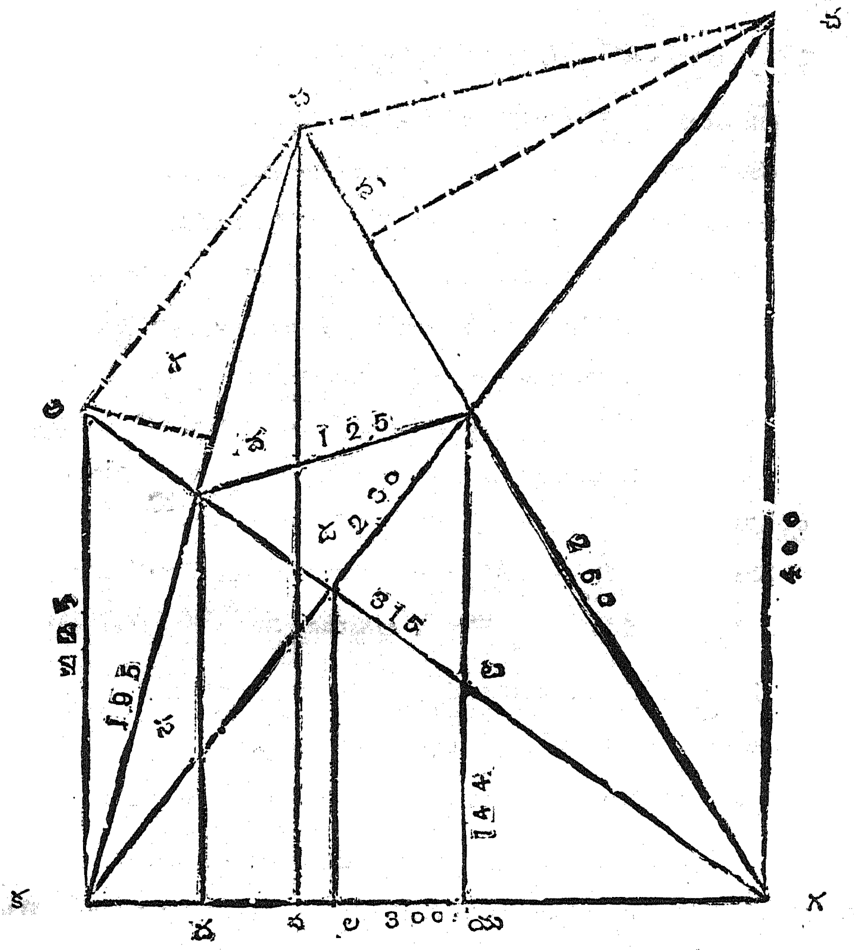
అథ సూచీక్షేత్రోదాహరణమ్.

క్షేత్రే యత్ర శతత్రయం (౩౦౦) క్షితిమితి స్త్వేందుతుల్యం ముఖం (౧౨౫)। బాహూ ఖోత్కృతిభి (౨౬౦) శ్శరాతిధృతిభి (౧౯౫) స్తుల్యౌ చ తత్ర శృతీ॥ ఏకా ఖాష్టయమై (౨౮౦)స్సమా తిథిగుణై (౩౧౫) రన్యాథ తల్లంబకౌ। తుల్యౌ గోధృతిభి (౧౮౯) స్తథాజినయమై (౨౨౪) ర్యోగా చ్ఛ్రవోలంబయోః॥ ౮౭॥
తత్ఖండే కథ యాధరే శ్రవణయో ర్యోగా చ్చ లంబాబధా స్తత్సూచీ నిజమార్గవృద్ధభుజయో ర్యోగేన యా స్యా త్తతః॥
సాబాధం వదలంబకం చ భుజయో స్సూచ్యాః ప్రమాణే చ కే సర్వం గాణితిక ప్రచక్ష్వ నితరాం క్షేత్రే త్ర దక్షోసి చేత్॥ ౮౮

తా॥ ఒకక్షేత్రమునందు భూమి 300 ముఖము 125 ఒకభుజ 260 రెండవ భుజ 195 ఒకకర్ణము 280 రెండవకర్ణము 315 ఒకలంబము189 రెండవలంబము224 ఆక్షేత్రమునందు కర్ణలంబములయోగమునుండి వాటి క్రింది ఖండములనున్ను ఆకర్ణములయోగమునుండి లంబమునున్ను ఆబాధలనున్ను ఆక్షేత్రముయొక్క భుజలు స్వమార్గమున వృద్ధినొందుటచే ఆరెండుభుజలును సూచ్యాకారముగ కలసిన ప్రదేశమునుండి భూమియందు లంబమునున్ను ఆబాధలనున్న చెప్పుము. అట్లు ముఖముయొక్క పైభాగముననైన సూచియొక్క భుజలు ఎంతయెంత ? ఓగణితజ్ఞా ! నీవు క్షేత్రవ్యవహారమునందు మిక్కిలి సమర్థుడవగుచో సమస్తమును చెప్పుము.

న్యాసః భూమానం౩౦౦ ముఖం౧౨౫ బాహూ ౨౬౦,౧౯౫ కర్ణౌ ౨౮౦, ౩౧౫ లంబౌ ౧౮౯. ౨౨౪

భూమి 300 ముఖము 125 భుజలు 260, 195 కర్ణములు 280, 315 లంబములు 189, 224. ఇందలి భూమి, ముఖము, భుజలు, కర్ణములు (85. ఉదా. శ్లో.) ఇదివరకు పూర్వ ముదహరింపబడిన క్షేత్రమునందలి భుజకర్ణములకు పంచ 5 గుణితములై యున్నవి.



భూమి = కగ, ముఖ = జత, జద = ప్రథమలంబం, కజ = ప్రథమభుజ, కత = ప్రథమకర్ణము, తయ = ద్వితీయలంబ, గత = ద్వితీయభుజ, గజ = ద్వితీయకర్ణము, డల = కర్ణయోగమునుండి లంబము, పన = సూచీలంబము, జపత = సూచి. ఇందు స, ట, ఇవికర్ణలంబయోగములు.

సద, సక, టయ, టగ, డల, కల, గల, పన, జప, తప, ఇవి ఎంతెంత? అని ప్రశ్నింపబడినవి.

అథసంధ్యాద్యానయనాయకరణసూత్రం వృత్తద్వయం.

లంబతదాశ్రితబాహ్వో ర్మధ్యం సంధ్యాఖ్యమస్యలంబస్య।
సంధ్యూనా భూఃపీఠం సాధ్యంయస్యాధరంఖండం॥ ౧౦౧॥

తత్సంధిర్ద్విష్ఠః పరలంబశ్రవణాహతోఽన్యపీఠేన।
భక్తో లంబశ్రుత్యో ర్యోగా త్స్యాతా మధఃఖండే॥ ౧౦౨॥

టీ॥ లంబతదాశ్రితబాహ్వోః = లంబముయొక్కయు లంబమును సంబంధించిన భుజయొక్కయు మధ్యం = మధ్యనున్న భూమిఖండము సంధ్యాఖ్యం = సంధియను పేరుగలది. సంధ్యూనా = సంధిచే వ్యవకలింపబడిన భూః = భూమి అస్య = ఈ లంబస్య = లంబముయొక్క పీఠం = పీఠము. యస్య = ఏలంబసంబంధమగు అధరం = క్రిందిదియగు ఖండం = ఖండము సాధ్యం = సాధింపదగినదో, తత్సంధిః = ఆలంబమును సంబంధించినసంధి ద్విష్ఠః = రెండుచోటులందు ఉంచబడినదై పరలంబశ్రవణాహతః = పరలంబముచే నొకచోటను మరియొకచో ఆపరలంబసంబంధికర్ణముచేతను గుణింపబడినదై అన్యపీఠేన = పరలంబసంబంధిపీఠముచే భక్తః = (వేరువేరుగ) భాగింపబడినదియై లంబశ్రుత్యోః = లంబముయొక్కయు కర్ణముయొక్కయు యోగాత్ = యోగమునుండి అధఃఖండే = క్రిందిఖండములు స్యాతాం = అగుచున్నవి.

176. ప్ర. (1) లంబముయొక్కయు లంబసంబంధిభుజయొక్కయు మధ్యనున్న ఆలంబముయొక్క ఆబాధ సంధి. ఆసంధిని భూమిలో తీసివేయగా నగు శేషము (ఆలంబముయొక్క రెండవయాబాధ) ఆలంబముయొక్క పీఠము.

(2) ఏలంబముతో కర్ణము కలియుటచేనైన యోగమునుండి లంబకర్ణముల ఖండములు కావలయునో ఆలంబముయొక్కసంధిని ఒకచో పరలంబముచే గుణింపుము. మరియొకచో పరకర్ణముచే గుణింపుము. రెండిటిని పరలంబపీఠముచే భాగింపుము.

(3) ఆలబ్ధములు క్రమముగ లంబముయొక్కయు కర్ణముయొక్కయు యోగమునుండియగు ఖండములగును.

న్యాసః, లంబః ౧౮౯ తదాశ్రితబాహుః ౧౯౫ అనయోర్మధ్యమిత్యాబాధా సంధిసంజ్ఞా ౪౮ తదూనా భూ రితి ద్వితీయాబాధా ౨౫౨ సా పీఠసంజ్ఞా. ఏవం ద్వితీయో లంబః ౨౨౪ తదాశ్రిత భుజః ౨౮౦ సంధిః ౧౩౨ పీఠం ౧౬౮.

అథ ఆద్యలంబ ౧౮౯ స్యాధఃఖండం సాధ్యం. అస్యసంధిః ౪౮ పరలంబేనానేన ౨౨౪ శ్రవణేన ౨౮౦ చ పృథగ్గుణితః ౧౦౭౫౨, ౧౩౪౪౦ పరస్యపీఠేన ౧౬౮ భక్తో లబ్ధం లంబాధఃఖండం ౬౪ శ్రవణాధఃఖండంచ ౮౦ ఏవం ద్వితీయ లంబస్య ౨౨౪ సంధిః ౧౩౨ పరలంబేన ౧౮౯ కర్ణేనచ ౩౧౫ పృథగ్గుణితః పరస్యపీఠేన ౨౫౨ భక్తో లబ్ధం లంబాధః ఖండం ౯౯ శ్రవణాధః ఖండంచ ౧౬౫.

పై క్షేత్రమునందు జదలంబము 189 ఈలంబమును సంబంధించిన భుజ 195 ఈరెండిటియొక్కయు వర్గాంతరమూలము ఆబాధ (169 ప్రి. చూ) 48 ఇదిసంధి. దీనిని పరలంబము 224 చేతను పరశ్రవణము 280 చేతను గుణింప $48 \times 224 = 10752$, ఇట్లు $48 \times 280 = 13440$ పరపీఠజ్ఞానమునకై పరసంధి=పరలంబ తదాశ్రితభుజల వర్గాంతరమూలము 132 దీనిని భూమి 300 లో తీసివేయ 168 పరపీఠము. దీనిచే పూర్వగుణనఫలముల భాగింప $\frac{10752}{168} = 64$ లంబాధః (సద) ఖండము. $\frac{13440}{168} = 80$ = సక = కర్ణఖండము.

ఇట్లు తమ రెండవలంబము 224 దీనిసంధి 132 దీనిని ప్రథమలంబము 189 చేతను దానిని సంబంధించిన కర్ణము 315 చేతను గుణించి పరపీఠము 252 చేతను భాగింప $\frac{132 \times 189}{252} = 99$ = టయ = లంబఖండము, $\frac{132 \times 315}{252} = 165$ = టగ = కర్ణఖండము అగుచున్నవి.

ఉపపత్తి: యతక మహాజాత్యమునందు దసక లఘుజాత్యము. అంతర్గతమగుటచే సాజాత్యమువలన $\frac{\text{దక} \times \text{యత}}{\text{యక}}$ = సద, $\frac{\text{దక} \times \text{కత}}{\text{యక}}$ = సక అగుచున్నది.

ఇట్లు దజగ, యటగ జాత్యముల సాజాత్యమువలన $\frac{\text{యగ} \times \text{దజ}}{\text{దగ}}$ = టయ ఇట్లు $\frac{\text{యగ} \times \text{జగ}}{\text{దగ}}$ = టగ అగుచున్నవి. ఇట్లీపద్ధతి ఉపపన్నమగుచున్నది.

అథకర్ణయో ర్యోగా దధోలంబజ్ఞానార్థం సూత్రం.

లంబౌ భూఘ్నౌ నిజనిజపీఠవిభక్తౌ చ వంశౌ స్తః।
తాభ్యాం ప్రాగ్వచ్ఛ్రుత్యో ర్యోగా ల్లంబః కుఖండేచ॥౧౦౩॥

టీ॥ లంబౌ = లంబములు భూఘ్నౌ = భూమిచే గుణింపబడినవై నిజనిజ పీఠవిభక్తౌచ = తమతమపీఠములచే భాగింపబడినవయ్యును వంశౌ = క్షేత్రమునకు రెండువైపులను వేణువులు స్తః = అగుచున్నవి తాభ్యాం = ఆవేణువులచే ప్రాగ్వత్ = పూర్వప్రకారము (79 శ్లో. సూ) శ్రుత్యోః = కర్ణములయొక్క యోగాత్ = యోగమువలన లంబః = లంబమున్ను కుఖండేచ = ఆబాధలున్ను (సాధింపదగినవి)

177. ప్ర. లంబములను వేర్వేర భూమిచే గుణించి తమతమపీఠములచే భాగింప క్షేత్రమునకు రెండువైపులను వంశప్రమాణము లగును. (అట్టి రెండు రేఖలు తెలియును.) ఆవంశములవలన పూర్వప్రకారము (161 ప్ర. చే) లంబమును ఆబాధలను సాధింప ఆలంబము కర్ణయోగమునుండి లంబమగును. ఆబాధలు ఈలంబముయొక్క ఆబాధ లగును.

లంబౌ ౧౮౯, ౨౨౪ భూ ౩౦౦ ఘ్నౌ స్వస్వపీఠాభ్యాం ౨౫౨, ౧౬౮ భక్తౌ ఏవమత్ర లబ్ధౌ వంశౌ ౨౨౫,౪౦౦ ఆభ్యామన్యోన్యమూలాగ్రగసూత్రయోగా దిత్యాదికరణేన లబ్ధఃకర్ణయోగాదధోలంబః ౧౪౪ కుఖండేచ ౧౦౮, ౧౯౨.

లంబములను భూమిచే గుణించి తమతమపీఠములచే భాగింప క్రమముగ వాటి వంశరేఖలు $\frac{189 \times 300}{252} = \frac{56700}{252} = 225$ అక ఇట్లు $\frac{224 \times 168}{252} = \frac{67200}{252} = 400$ చగ. ఈ అక, చగ రేఖలు వంశములు కగ భూమి. ఇట్లు కల్పించి (161 ప్ర. చే) అన్యోన్య మూలాగ్రగ సూత్రయోగము నుండి లంబాబాధల సాధింప కర్ణయోగమునుండి లంబాబాధ లగుచున్నవి. అట్టిలంబము $\frac{400 \times 225}{400 + 225} = 144$డల ఆబాధలు 108 కల, 192 లగ.

ఉపపత్తి. అకగ, జదగ జాత్యములు సజాతీయములై యున్నవి.

$\therefore \frac{\text{జద} \times \text{కగ}}{\text{దగ}} =$ అక = వంశరేఖ. ఇట్లు చగక, తయక, జాత్యముల సాజాత్యముచే $\frac{\text{తయ} \times \text{గక}}{\text{యక}} =$ చగ = వంశరేఖ యగుచున్నది.

ఇందు అగ, చక రేఖలు కర్ణము లగుచున్నవి. కావున అన్యోన్యమూలాగ్రగసూత్రములగుచున్నవి. దానిచే లంబాబాధలనెఱుంగుట (161 ప్ర. చే) సులభము

అథ సూచ్యాబాధాలంబభుజజ్ఞానార్థం సూత్రం వృత్తత్రియమ్

లంబహృతో నిజసంధిః పరలంబగుణస్సమాహ్వయో జ్ఞేయః।
సమపరసంధ్యో రైక్యంహార స్తేనోద్ధృతౌ తౌ చ॥ ౧౦౪॥
సమపరసంధీ భూఘ్నౌ సూచ్యాబాధే పృథ క్స్యాతామ్।
హారహృతఃపరలంబ స్సూచీలంబో భవే ద్భూఘ్నః॥ ౧౦౫॥
సూచీలంబఘ్నభుజౌ నిజనిజలంబోద్ధృతౌ భుజౌ సూచ్యాః।
ఏవంక్షేత్రక్షోదః ప్రాజ్ఞైస్త్రైరాశికాత్క్రియతే॥ ౧౦౬॥

టీ॥ లంబహృతః = లంబముచే భాగింపబడిన నిజసంధిః = ఆ లంబముయొక్క సంధి పరలంబగుణః = పరలంబముచే గుణింపబడినదియై సమాహ్వయః = సమమను పేరుగలదియై జ్ఞేయః = తెలియదగినది. సమపరసంధ్యోః = సమమనుదానియొక్కయు పరసంధియొక్కయు యోగము హారః = హారమగును. తౌ = ఆ సమపరసంధీ = సమమున్ను పరసంధియున్ను భూఘ్నౌ = భూమిచే గుణింపబడినవియై తేన = ఆహారముచేతను ఉద్ధృతౌచ = భాగింపబడినవియును పృథక్ = వేరుగ సూచ్యాబాధే = సూచియొక్క ఆబాధలు స్యాతాం = అగును. పరలంబః = పరలంబము భూఘ్నః = భూమిచే గుణింపబడినదై హారహృతః = హారముచేభాగింపబడినదై సూచీలంబః = సూచీలంబము భవేత్ = అగును. సూచీలంబఘ్నభుజౌ = సూచీలంబముచే గుణింపబడినభుజలు నిజనిజలంబోద్ధృతౌ = తమతమలంబములచే భాగింపబడినవియై సూచ్యాః=సూచీక్షేత్రముయొక్క భుజౌ = భుజలు (అగును) ఏవం = ఈప్రకారము ప్రాజ్ఞైః =బుద్ధి

మంతులచే క్షేత్రక్షోదః = క్షేత్రమర్దనము త్రైరాశికాత్ = త్రైరాశికము వలన క్రియతే = చేయబడుచున్నది.

178. ప్ర. (1) సంధియను పేరుగల (ఆబాధ)సంఖ్యను ఆసంధియొక్క లంబముచే భాగించి పరలంబముచే గుణింపనగు సంఖ్యకు సమమని పేరు. అట్టిసమములు రెండులంబములకును వేర్వేరుగ నగును. ఒకలంబముయొక్క సమమునకును పరసంధికిని యోగము హారము అనిచెప్పబడుచున్నది.

(2) ఒకలంబము తాలూకు సమమును భూమిచేగుణించి దానిని హారముచే భాగింపుము. అట్లు ఇతరలంబముయొక్క సంధి (అనగా పరసంధి)ని భూమిచే గుణించి ఆహారముచేతనే భాగింపుము. ఈలబ్ధములు ఉద్దిష్టక్షేత్రముయొక్క భుజలను స్వస్వమార్గములందు పెంచుటచే కలియుస్థానము సూచి, ఆసూచినుండి భూమియందు లంబమును చేయుటచేనైన ఆబాధలు అగును.

(3) ఒకలంబముయొక్క హారముచే ఇతరలంబ (పరలంబ)మును భాగించి భూమిచే గుణింప సూచినుండి భూమివరకునైన లంబము సూచీలంబము అగును.

(4) ఉద్దిష్టక్షేత్రమునందలి భుజలను వేరువేరుగ సూచీలంబముచే గుణించి తమతమలంబములచే భాగింప (భూమినుండి సూచివరకునైన) సూచీక్షేత్ర భుజలు అగును.

ఇట్లు త్రైరాశికముచే బుద్ధిమంతులు క్షేత్రవ్యవహారమును నలుగగొట్టుచున్నారు.

అత్ర కలాయం లంబః ౨౨౪ అస్యసంధిః ౧౩౨ అయం పరలంబేన ౧౮౯ గుణితోనేన ౨౨౪ భక్తః సమాఖ్యో జాతః $\frac{౮౯౧}{౮}$ అస్య పరసంధేశ్చ ౪౮ యోగో హారాఖ్యః $\frac{౧౨౭౫}{౮}$ అనేనసమపరసంధీ భక్తౌ భూమిగుణౌ జాతే సూచ్యాబాధే $\frac{౩౫౬౪}{౧౭}$, $\frac{౧౫౩౬}{౧౭}$

ఏవం ద్వితీయసమాహ్వయః $\frac{౫౧౨}{౯}$ ద్వితీయోహారః $\frac{౧౭౦౦}{౯}$ అనేన భూఘ్నస్స్వయస్సమః $\frac{౧౫౩౬౦౦}{౯}$ పరసంధిశ్చ $\frac{౩౯౬౦౦}{౧}$ భక్తౌ జాతే సూచ్యాబాధే $\frac{౧౫౩౬}{౧౭}$, $\frac{౩౫౬౪}{౧౭}$

పరలంబః ౨౨౪ భూమి ౩౦౦ గుణః హారేణ $\frac{౧౨౭౫}{౮}$ భక్తో జాత స్సూచీలంబః $\frac{౭౧౬౮}{౧౭}$, సూచీలంబేన భుజౌ ౧౯౫, ౨౬౦ గుణితౌ స్వస్వలంబాభ్యాం ౧౮౯, ౨౨౪ యథాక్రమం భక్తౌ జాతౌ స్వమార్గవృద్ధౌ సూచీభుజౌ. $\frac{౬౨౪౦}{౧౭}$, $\frac{౮౩౨౦}{౧౭}$

ఏవమత్ర సర్వత్ర భాగహారరాశిం ప్రమాణం గుణ్యగుణకౌతు యథాయోగ్యం ఫలేచ్ఛే ప్రకల్ప్య సుధియా త్రైరాశికమూహ్యం॥

ఇచట ఒకలంబము 224 తీసికొందము. దీనిసంధి 132. దీనిని పరలంబముచే గుణించి స్వలంబముచే భాగింప $\frac{132 \times 189}{224} = \frac{891}{8}$ దీనికి సమమని పేరు. ఇందు పరసంధిని కలుప $\frac{891}{8} + \frac{48}{1} = \frac{1275}{8}$ ఇది హారము. దీనిచే సమమును పరసంధిని వేర్వేర భాగించి భూమిచే గుణింప

$$\frac{891 \times 300 \times 8}{8 \times 1275} = \frac{891 \times 300}{1275} = \frac{3564}{17}$$ ఇదియును $$\frac{48 \times 300 \times 8}{1275} = \frac{1536}{17}$$

ఇదియును సూచీలంబమువలననైన భూమియందలి ఆబాధలు.

ఈప్రకారము రెండవలంబమువలనను అబాధలగును.

లంబము 189. దీనిసంధి 48 ని పరలంబముచే గుణించి స్వలంబముచే భాగింప $\frac{48 \times 224}{189} = \frac{512}{9}$ సమము. దీనియందు పరసంధిని గలుప ఈలంబము

యొక్క హారము $\frac{512}{9}+\frac{132}{1}=\frac{1700}{9}$ ఈ హారముచే భూమిగుణితసమమును భాగింప $\frac{512\times 300\times 9}{9\times 1700}=\frac{512\times 3}{17}=\frac{1536}{17}$ ఇది యాబాధ ఇట్లు భూమిగుణితపరసంధిని భాగింప $\frac{132\times 300\times 9}{1700}=\frac{3564}{17}$ ఇది యొకఆబాధ. ఇట్లును ఆ ఆబాధలే యైనవి.

పరలంబము224 అనుకొనుచో దీనిని భూమిచే గుణించి హారముచేభాగింప $\frac{224\times 300\times 9}{1700}=\frac{6048}{17}$ సూచీలంబము. లేక189 పరలంబమగుచో $\frac{189\times 300\times 8}{1275}$ $=\frac{6048}{17}$ సూచీలంబము అగుచున్నది.

భుజలను వేర్వేర సూచీలంబముచే గుణించి తమతమ లంబములచే భాగింప సూచీభుజ లగును.

$$\frac{195}{1}\times\frac{6048}{17}\times\frac{1}{189}=\frac{6240}{17},\ \text{ఇట్లు}\ \frac{6048\times 260}{224}=\frac{7020}{17}$$

ఇవి సూచీభుజ లగుచున్నవి.

ఉపపత్తి: సూచీక్షేత్రము కసగ, ఇందు పన లంబము. కన, గన, ఆబాధలు. తొలుత ఆబాధలు తెలియుటకై సమము, హారము, తేబడినవి.

ఎట్లనగా: యతలంబమునందు త బిందువును స్పృశించునట్లు కప రేఖతో సమానాంతరరేఖను చేసినచో ఆరేఖ భూమియం దెచట తగులునో అది మొదలుగ పరమైన ఖండము యత లంబసంబంధమగు సూచికి భూమి యగుచున్నది. ఇది యతలంబ సంబంధిహారము. ఈహారముకలన యగ ఖండమును తీసివేయగానగు శేషము సమము. ఈసమము కప సమానాంతరరేఖవలన నైనదగుటచే సాజాత్యమువలన జదకోటియందు కదసంధి భుజయగుచో యతకోటియం దెంతభుజ ? యను త్రైరాశికముచే నగును.

అట్లు గప సమానాంతరరేఖ జబిందువునందు కలియునట్లు చేసినచోనైన జదలంబసంబంధమగు సూచికి భూమి జదలంబసంబంధిహారము. ఈ హారమువలన

కదఖండమును తీసివేయ శేషము దీనియొక్క సమము. ఇదియును గపసమానాంతరరేఖవలననైన దగుటచే సాజాత్యమువలన యతకోటియందు యగభుజయగుచో జదకోటియం దెంత? ఈ త్రైరాశికముచే నగుచున్నది. ఇట్లు సమహారముల పద్ధతి ఉపపన్న మగుచున్నది.

ఇందు జదలంబముచేనైన సూచియందలి సమము యతలంబ సంబంధము గను, యతలంబముచేనైన సూచియందలి సమము జదలంబసంబంధముగను గణితమునుబట్టి చెప్పబడినవి. కావున సమమునకును పరసంధికిని యోగము హారమగునని చెప్పబడినది.

హారభూమియందు సమపరసంధులు ఆబాధలగుచో భూమియందు ఆబాధ లెంతయెంత ? అను త్రైరాశికముచే సూచ్యాబాధ లగుచున్నవి.

ఒకలంబసంబంధమగు సమము మరియొకలంబమును సంబంధించినట్లు చెప్పుటవలన హారమున్ను సమపరసంధియోగమగుటచే జదలంబమునుసంబంధించిన లఘుసూచియందలి భూమియగు హారము యతలంబసంబంధమైనదిగను యతలంబ సంబంధి లఘుసూచియందలి హారము జదలంబసంబంధమైనదిగను సమమువలెనే వ్యవహరింపబడినది. కావున స్వలంబము పరలంబమని వ్యవహరింపవలసివచ్చినది.

హారభూమియందు పరలంబము లంబమగుచో భూమియం దెంత ? అను త్రైరాశికముచే సూచీలంబమగుచున్నది.

పిమ్మట సాజాత్యముచే $\frac{\text{జక}\times\text{పన}}{\text{జద}}=\text{పక},\ \frac{\text{గత}\times\text{పన}}{\text{యత}}=\text{గప}$ ఇట్లు త్రైరాశికముచే నీక్షేత్రపద్ధతియంతయు ఉపపన్నమగుచున్నది.

అట్లు ఈక్షేత్రమందలి ఇతరరేఖలనున్న తేవచ్చును.

$\frac{\text{జగ}\times\text{కగ}}{\text{దగ}}=\text{అగ},\ \frac{\text{తక}\times\text{కగ}}{\text{యక}}=\text{చక}$ అట్లు పన, అక, చగ సమానాంతరరేఖలగుటచే $(\text{పన}-\text{అక})^2+\text{కన}^2=\text{అప}^2$ అట్లు $(\text{చగ}-\text{పన})^2+\text{గన}^2=\text{పచ}$ అగుచున్నవి. అకప త్రిభుజమునందు అర లంబమున్ను గచప త్రిభుజమునందు చమ లంబమున్ను 163 ప. చే తెలియబడును. వాటిఫలములున్ను తెలియుట సులభము.

అట్లు కప — కజ = జప, గబ — గత = తప జత = ముఖము.

ఈసూచీక్షేత్రోపరిభాగమందైన క్షేత్రమునకును ఫలము వేరుగ తెలియును.

కజతగ ఉద్దిష్టచతుర్భుజక్షేత్రమునందు కపగ త్రిభుజఫలమువలన పజత త్రిభుజఫలమును వ్యవకలింప ఫలమగుచున్నది. లేక ఇందు కర్ణములు పరస్పరలంబ రూపములగుటచే (167 ప్ర. 2 విధిచే) ఫలము తెలియుచున్నది.

లేక కజత జాత్యము. యతగ జాత్యము. దజతయ సమలంబచతుర్భుజము. వీటి ఫలముల యోగము చతుర్భుజఫలము అగుచున్నది.

ఇట్లు వేరువేరుగ తేబడిన ఫలములయొక్క యోగము అకగచప పంచ భుజక్షేత్రమునందు సమష్టిఫల మగుచున్నది. విస్తరభీతిచే చూపలేదు.

వృత్త క్షేత్ర ప్రకరణము.

వృత్తక్షేత్రే కరణసూత్రం వృత్తం.

వ్యాసేభనందాగ్నిహతే విభక్తేఖబాణసూర్యైః పరిధిస్ససూక్ష్మః।
ద్వావింశతిఘ్నే విహృతేథశైలైస్థూలోథవాస్యాద్వ్యవహారయోగ్యః

టీ॥ వ్యాసే = వ్యాసము, భనందాగ్నిహతే = 3927 చే గుణింపబడి ఖబాణసూర్యైః = 1250 చే, విభక్తే = భాగింపబడినదగుచో, సః = ఆలబ్ధము, సూక్ష్మః = సరియైనదగు, పరిధిః = పరిధి(యగును) అథవా = లేక, ద్వావింశతిఘ్నే = 22 చే గుణింపబడినదియై, శైలైః = 7 చే, విహృతే = భాగింపబడినదగుచో, వ్యవహారయోగ్యః = వ్యవహారమునకుతగిన, స్థూలః = స్వల్పాంతరము గల, పరిధిః = పరిధి, స్యాత్ = అగును.

179. ప్ర. వ్యాసముచే పరిధిని గనుగొనుట.

(1) వ్యాసమును $\frac{3927}{1250}$ చే గుణించినచో సూక్ష్మపరిధి యగును. పరిధిని దీనిచే భాగింప వ్యాసమగును

(2) వ్యాసమును $\frac{22}{7}$ చే గుణించిన స్థూలపరిధి యగును. పరిధిని దీనిచే భాగింప స్థూలవ్యాస మగుచున్నది.

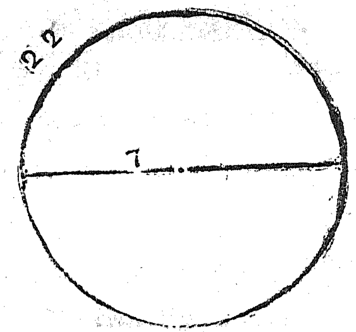
తరుచుగ గణితముచేయుటయందు సులభమగుటచే నీ (2) పద్ధతి యుప యోగింప వీలగుచున్నది.

ఉదాహరణం.

విష్కంభమానంకిలసప్తయత్ర తత్రప్రమాణంపరిధేఃప్రచక్ష్వ।
ద్వావింశతిర్యత్పరిధిప్రమాణం తద్వ్యాససఙ్ఖ్యాంచసఖేవిచింత్య॥

తా॥ ఒకవృత్తక్షేత్రమునందు వ్యాసము 7 గజము లున్నది. అందు పరిధి యెంత ? చెప్పుము. పరిధి 22 గజములున్నచో ఆవృత్తక్షేత్రమునందు వ్యాస ప్రమాణమున్ను మిత్రమా ఆలోచించి చెప్పుము.

న్యాసః. వ్యాసమానం ౭ లబ్ధం పరిధిమానం ౨౧ $\frac{౧౨౩౯}{౧౨౫౦}$ స్థూలంవా ౨౨॥ న్యాసః అథవా పరిధితోవ్యాసానయనాయ గుణ హారవిపర్యయేణ వ్యాసమానం ౭ $\frac{౧౧}{౩౯౨౭}$ స్థూలంవా ౭.



వ్యాసము 7 పరిధియెంత ?

వ్యాసము 7 ను 3927 చే గుణించి 1250 చే భాగింపవలయును కావున $\frac{7 \times 3927}{1250} = \frac{27489}{1250} = 21\frac{1239}{1250}$ సూక్ష్మపరిధి యగుచున్నది. లేక వ్యాసమును 22 చే గుణించి 7 చే భాగింప $\frac{22 \times 7}{7} = 22$ పరిధి యగుచున్నది. ఇది స్థూలము.

ఇట్లు పరిధి 22 అగుచో పరిధిని 1250 చే గుణించి 3927 చే భాగింపవల యును కావున $\frac{22 \times 1250}{3927} = \frac{2750}{3927} = 7\frac{11}{3927}$ ఇది వ్యాస మగుచున్నది. ఇది సూక్ష్మము. లేక పరిధిని 7 చే గుణించి 22 చే భాగింప $\frac{22 \times 7}{22} = 7$ ఇది వ్యాసమాన మగుచున్నది. ఇదిస్థూలము.

ఉపపత్తి: సిద్ధాంతశిరోమణి గోలాధ్యాయమునందు భాస్కరాచార్యులు ఇట్లు వ్రాసియున్నారు "పెద్దవ్యాసముగల ఒకవృత్తమును కల్పించి ఆవృత్త పరిధిని ఒకానొక పెద్దసంఖ్య (100 కంటె పెద్దసంఖ్య) చే భాగించి ఆవిభాగము చేసైన చాపమునకు త్రికోణమితిప్రకారము జ్యాసాధనము చేయవలయును. ఆ జ్యాను పరిధినిభాగించినసంఖ్యచే గుణింప పరిధిమానమగును." భాగించుసంఖ్య యొక్క ఆధిక్యమునుబట్టి ఆఅంశము యొక్క జ్యాచాపములు సమములగుచున్నవి. కావున జ్యామానమే చాపమానము అగును. ఆపెద్దసంఖ్యచే ఆజ్యామానము (ఆచాపమానము)ను గుణింప పరిధిమానము అగును.

అట్టి వ్యాసమునకును ఆపరిధికిని గల సంబంధము అయావృత్తవ్యాసపరిధులకును ఉండుటచే దానింబట్టి త్రైరాశికముచే వ్యాసమువలన పరిధియు పరిధివలన వ్యాసమున్ను తెలియుచున్నది. అట్లు కోటిద్వయవ్యాసమందు పరిధిని సాధింప 62831853 అగుచున్నది. అనగా ఇష్టవ్యాసమును ఈపరిధిచే గుణించి కోటిద్వయముచే భాగింప ఇష్టవృత్తపరిధి యగును. కావున $\frac{62831853}{20000000}$ ఈ సంఖ్యచే వ్యాసమును గుణించిన పరిధి యగును. ఇది పెద్దసంఖ్యఅగుచున్నది కావున స్వల్పాంతరముచే $\frac{62832}{20000}$ ఇట్లు గ్రహింపవచ్చును. దీనిని 16 చే నపవర్తింప $\frac{3927}{1250}$ అగుచున్నది. లేక పైసంఖ్యకు ఆసన్నమానములు (82 ప్ర. 83 ప్ర.చూ) $\frac{3}{1}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$, $\frac{355}{113}$ ఇట్లు అగుచున్నవి. ఇందు రెండవఆసన్నమానము $\frac{22}{7}$ దీనిని గ్రహించి స్థూలపద్ధతి యని చెప్పబడినది. ఇట్లు గణితసౌకర్యముకొరకు మొదటి మానమును గ్రహించియు వ్యాసమును 3 చే గుణించి అది పరిధియనుట గలదు. ఈ ఆసన్నమానములందు 4వ మానమును గ్రహించి

"వ్యాసే పంచశరాగ్ని (355)క్షుణ్ణే దహనేశ (113)భాజితే పరిధిః
ఆచార్యోక్తాత్తూస్మాత్పరిధే రపి భవతి సూక్ష్మతరః" అని

మ. మ. పం. బాపుదేవ శాస్త్రిగారు చెప్పియున్నారు.

వృత్త గోలయోః ఫలానయనే కరణసూత్రం వృత్తం.

వృత్తక్షేత్రే పరిధిగుణితవ్యాసపాదః ఫలం తత్క్షుణ్ణం వేదై రుపరి
పరితః కందుకస్యేవ జాలం। గోలస్యైవం తదపిచ ఫలం పృష్ఠజం
వ్యాసనిఘ్నం షడ్భి ర్భక్తం భవతి నియతం గోలగర్భే ఘనాఖ్యం॥

టీ॥ పరిధిగుణితవ్యాసపాదః = పరిధిచేగుణింపబడిన వ్యాసముయొక్క చతుర్థాంశము, వృత్తక్షేత్రే = వృత్తక్షేత్రమందు, ఫలం = ఫలము. తత్ = ఆవృత్తక్షేత్రఫలము, వేదైః = 4చే, క్షుణ్ణం = గుణింపబడినదై, గోలస్య = గోలముయొక్క, ఉపరి = పైభాగమునందు, కందుకస్య = బంతియొక్క, ఉపరి = పైభాగమునందు, జాలమివ = వలవలెనున్న, ఫలం = ఫలము, భవతి = అగును. ఏవం = ఈప్రకారము, తత్ = ఆ, పృష్ఠజం = పైభాగమునందైన, ఫలమపి = ఫలమున్ను, వ్యాసనిఘ్నం = వ్యాసముచేగుణింపబడినదై, షడ్భిః = 6చే, భక్తం = భాగింపబడినదై, గోలగర్భే = గోలగర్భమునందు, ఘనాఖ్యం = ఘనమను పేరుగల, నియతం = నియతమైన, ఫలం = ఫలము. భవతి = అగుచున్నది.

180. ప్ర. (1) వృత్త క్షేత్ర ఫలము.

పరిధిని వ్యాసముచే గుణించి 4చే భాగింప వృత్తక్షేత్ర ఫలమగును.

(2) గోల పృష్ఠ ఫలము.

ఆవృత్తక్షేత్రఫలమును 4చే గుణింప అనగా పరిధిని వ్యాసముచే గుణింప గోలపృష్ఠఫలమగును.

(3) గోల ఘన ఫలము.

ఆగోలపృష్ఠఫలమును వ్యాసముచే గుణించి 6చే భాగింప గోలఘనఫలము.

ఉదాహరణమ్

యద్వ్యాస స్తురగై ర్మితః కిల ఫలం క్షేత్రే సమే తత్ర కిం
వ్యాస స్సప్తమితశ్చ యస్య సుమతే గోలస్య తస్యాపి కిం। పృష్ఠే
కందుకజాలసన్నిభఫలం గోలస్య తస్యాపి కిం మధ్యే బ్రూహి ఘనం
ఫలంచ విమలాం చే ద్వేత్సి లీలావతీం॥ ౯౦॥

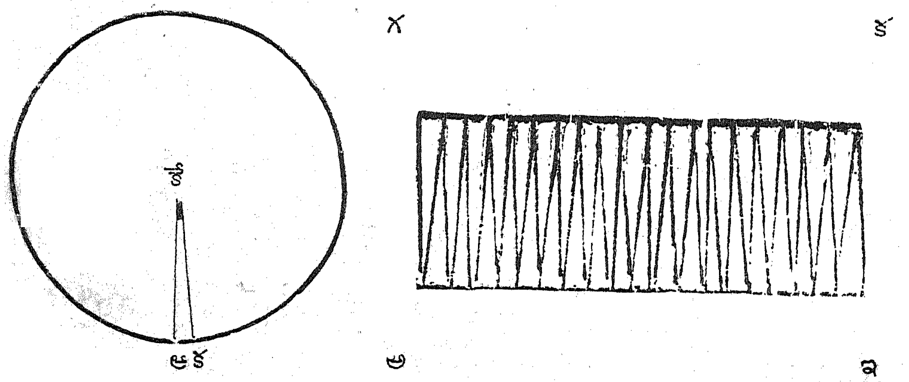
తా॥ ఏవృత్తక్షేత్రమందు వ్యాసము 7 పరిమితి గలదియో ఆ సమవృత్త క్షేత్రమునందు క్షేత్రఫల మెంతయగును? బుద్ధిమంతుడా ! అట్లు 7 వ్యాసము గల గోలమునకు గోలపృష్ఠమునందు కందుకమునకు వలవలెనున్న ఫలము ఎంతయగును ? ఆగోలమునకే మధ్యయందు ఘనఫల మెంత యగును? నీవు నిర్మలమగు లీలావతీగణితము నెరింగితివేని చెప్పుము.

న్యాసః. వ్యాసః౭ లబ్ధంక్షేత్రఫలం ౩౮ $\frac{౨౪౨౩}{౫౦౦౦}$ గోలపృష్ఠ ఫలం ౧౫౩ $\frac{౧౧౭౩}{౧౨౫౦}$ గోలస్యాంతర్ఘనఫలమ్ ౧౭౯ $\frac{౧౪౮౭}{౨౫౦౦}$

వ్యాసము 7అగుచో సూక్ష్మపరిధి 21 $\frac{1239}{1250}$ కావున $\frac{\text{ప} \times \text{వ్యా}}{4} = \frac{27489 \times 7}{1250 \times 4} = 38\frac{2423}{5000}$ క్షేత్రఫల మగుచున్నది. ఈ క్షేత్రఫలమును 4చే గుణింప గోలపృష్ఠ ఫలము $\frac{192423 \times 4}{1250 \times 4} = \frac{192423}{1250} = 153\frac{1173}{1250}$.

ఘనఫల $= \frac{\text{పృఫ} \times \text{వ్యా}}{6} = \frac{192423 \times 7}{1250 \times 6} = \frac{64141 \times 7}{1250 \times 2} = \frac{448987}{2500} = 179\frac{1487}{2500}$

ఉపపత్తి: (1) వృత్త క్షేత్ర ఫలమును గూర్చి.



వృత్తక్షేత్రము ఒకటియు ఆయతమొకటియు చూపబడినవి. వృత్తక్షేత్రమునందు కే కేంద్రమునుండి కేక వ్యాసార్ధముచే వృత్తము చేయబడినది. ఆవృత్తముయొక్క పరిధిని సమముగ అనేకవిభాగములు చేసితి మనుకొనుము. ఆవిభాగ సంఖ్య = యా, అందొకవిభాగము = అక రేఖాఖండము. ఇపుడు 'కేఅక' జాత్యత్రిభుజమైనది. పరిధియొక్క అతిసూక్ష్మవిభాగము రేఖారూపమే యగుచున్నది. కావున ఈ (కే అక) క్షేత్రముయొక్క ఫలము $\frac{\text{కేక} \times \text{అక}}{2}$ అగుచున్నది.

ఇందు అక $= \frac{\text{ప}}{\text{యా}}$ కావున $\frac{\text{కేక} \times \text{ప}}{2 \times \text{యా}}$ జాత్యఫలము. ఇట్టి జాత్యములు 'యా' పరిమితములు కావున 'యా'చే గుణింప సర్వవృత్తక్షేత్రఫల మగును.

$\therefore \frac{\text{కేక} \times \text{ప} \times \text{యా}}{2 \times \text{యా}} = \frac{\text{కేక} \times \text{ప}}{2} \because \text{కేక} = \frac{\text{వ్యా}}{2} \therefore \frac{\text{వ్యా} \times \text{ప}}{2 \times 2}$ అగుచున్నది.

లేక 'కేఅక' క్షేత్రముతో సమమైన త్రిభుజములు 'యా' సంఖ్యాపరిమితములగుచున్నవి. కావున అట్టి త్రిభుజములను ఒకక్షేత్రముయొక్క శీర్షకోణము పైకి ఉండునట్లును మరియొకక్షేత్రముయొక్క శీర్షకోణము క్రిందికి ఉండునట్లును ఇట్లు క్రమముగ వరుసగా ఆక్షేత్రముల నుంచితి మనుకొనుము. అట్లుఉంచినచో 'అఇకగ' ఆయతక్షేత్ర మగుచున్నది. 'యా' సంఖ్యామితక్షేత్రములలో సగము క్షేత్రములు క్రిందుగను సగముక్షేత్రములు ఊర్ధ్వముగను శీర్షకోణము గలిగియున్నవి. కావున అఇ = కగ $= \frac{\text{ప}}{2}$ అగుచున్నది. అగ = ఇక = కేక $= \frac{\text{వ్యా}}{2}$ అగును.

$\therefore \text{అఇ} \times \text{అగ} = \frac{\text{ప} \times \text{వ్యా}}{2 \times 2} = \frac{\text{ప} \times \text{వ్యా}}{4}$ ఆయతఫలములేక వృత్తక్షేత్రఫలము.

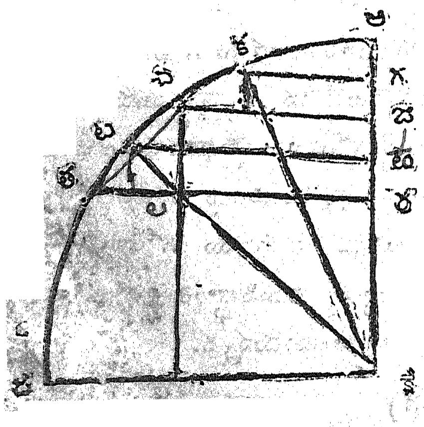
(2) గోల పృష్ఠ ఫలానయనమును గూర్చి.

సమమగు వ్యాసముగల బంతివంటి గుండ్రనిపదార్థము గోలమని చెప్పబడుచున్నది. అనగా వ్యాసరేఖయందు ఆవ్యాసరేఖచేనైన వృత్తార్ధమును భ్రమింపచేయుటచే గోలముత్పన్న మగుచున్నది. అట్టి గోలముపైభాగమునందు వస్త్రఖండముచే సరిగ కప్పి ఆవస్త్రఖండమును సమభూమియందు పరచినచో ఎంత ప్రదేశ మాక్రమింపబడునో ఆప్రదేశముయొక్క చతుర్గము గోలపృష్ఠఫలము.

ఈపద్ధతినిగూర్చి శ్రీభాస్కరాచార్యులు తమసిద్ధాంత శిరోమణియందు వాసనాభాష్యమున వ్రాసిరి. దానినిబట్టి వ్రాయబడుచున్నది.

మృణ్మయము (మట్టిచేచేయబడినది) గాని దారుమయముగాని యగు గోలము నొకదానిని చేసి దానిని సరిగ సగమునకు ఛేదించుము అది గోలార్ధమగును. గోలార్ధముయొక్క పృష్ఠఫలమును 2చే గుణింప గోలపృష్ఠఫలము కాగలదు. కావున గోలార్ధపృష్ఠఫలమును మనము తెలిసికొనవలయును.

ఆగోలార్ధమును శిరోభాగమున ఒక బిందుచిహ్నమును చేయును. ఆ బిందువును కేంద్రముగా చేసి ఇష్టమగు చిన్నని చాపరూపవ్యాసార్ధమునుకల్పించి దానిచే ఆ బిందువునుండి ఆ గోలార్ధమునం దొకవృత్తమును చేయును. తిరుగ ఆఇష్టచాపరూపమగు వ్యాసార్ధమును 2చే గుణించి ఆబిందువునుండియే వృత్తమును చేయుము. తిరుగ నాఇష్టచాపరూపవ్యాసార్ధమును 3చే గుణించి వృత్తమును చేయుము. ఇట్లు ఏకోత్తరగుణకగుణితచాపరూపవ్యాసార్ధములచే ఆగోలార్ధము యొక్క శీర్షబిందువునుండి వృత్తములను చేయగా తుదివృత్తము గోలపరిధి యగు చున్నది. ప్రతివృత్తమునకును ఇష్టచాపరూపాంతరము సమానముగ నగుచున్నది అట్టివృత్తములలో పైవృత్తమునకును దాని క్రిందివృత్తమునకును మధ్యయందలి ఫలములను వేరువేరుగ తెలిసికొని అన్నిటిని కలిపి రెట్టించినచో గోలపృష్ఠఫలమగును పై వృత్తమునకును దాని క్రిందివృత్తమునకును మధ్యభాగమందలి చతురము, ఆరెండువృత్తములవు మధ్యభాగమును కప్పిన ఒకకాగితముముక్కను కాని వస్త్ర ఖండమును గాని క్రిందసరచినచో ఒక సమలంబక్షేత్రము గాగలదు. అందు పైభాగమందలి చిన్నవృత్తపరిమాణము ముఖము. క్రిందిభాగమందలి పెద్దవృత్త పరిమాణము భూమి. ఇష్టచాపరూపాంతరము లంబము. కావున భూమియొక్కయు ముఖముయొక్కయు యోగార్ధమును 2చే భాగించి లంబముచే గుణింప సమలంబక్షేత్రఫల మగుచున్నది. (167 ప్ర. 4 విధి) ఇట్టి ఫలములను వేర్వేర సాధించి కలిపి రెట్టింప గోలపృష్ఠఫల ము అది పరిధివ్యాసఘాతముతో సమ మగుచున్నది.



అట్టి ఫలానయనము చూపబడుచున్నది. అందు ఆయావృత్తపరిమాణములు తెలియవలయును. అవి వ్యాసార్ధములచే తెలియబడుచున్నవి. ఈక్షేత్రమునందు 'అ' శీర్షబిందువు అటనుండి అచ చాపరూపవ్యాసార్ధముచేసైన వృత్తమునందు జచ వ్యాసార్ధ మగుచున్నది. 2 అచ = అత కావున అతచాపరూప వ్యాసార్ధముచేసైన వృత్తమునందు తర వ్యాసార్ధ మగుచున్నది. 'కేద' గోలవ్యా

సార్ధము ఈక్షేత్రమునందు జచ వ్యాసార్ధముచేసైన వృత్తముయొక్కయు తర వ్యాసార్ధముచేసైన వృత్తముయొక్కయు మధ్యయందలి వలయక్షేత్రఫల మును తెలిసికొందము ఇందు జచ రేఖయొక్క అగ్రమునుండి రత రేఖాగ్రము వరకు చత రేఖ చేయబడినది. ఇది చత చాపమునకు పూర్ణజ్య యగుచున్నది. దీనిని ట బిందువువద్ద అర్ధించి టడ రేఖ చేయబడినది. ఇది జచ వ్యాసార్ధవృత్త ముయొక్కయు తర వ్యాసార్ధవృత్తముయొక్కయు సగముచేసైన వృత్తమునకు వ్యాసార్ధ మగుచున్నది. చత చాపముయొక్క సగమగు చాపమునకు చట రేఖ 'జ్యా' అగుచున్నది. కేట కోటిజ్య అగుచున్నది. అట్లు అర చాపమునకు అత ఉత్క్రమజ్య అగును. అచ చాపమునకు అజ ఉత్క్రమజ్య అగును. జర=చల ఉత్క్రమజ్యాంతరము. లత = (తర - జచ) అగుచున్నది.తర రేఖయొక్కయు చగ రేఖయొక్కయుసంపాతమును 'ల' అనుకొనుము.

చత పూర్ణజ్యయందు కేట లంబముగాన కేటచ కోణము సమకోణము. అట్లు చటడ కోణ + టచగ కోణ = సమకోణము. కావున ∠టచగ= ∠కేటడ అగుచున్నది. కావున సాజాత్యముచే చత ఇష్టచాపపూర్ణజ్యాకర్ణమునందు జర ఉత్క్రమజ్యాంతరము భుజయగుచో కేట ఇష్టచాపార్ధకోటిజ్యాకర్ణమునందు భుజ యెంత ? యను త్రైరాశికముచే 'టడ' ప్రథమద్వితీయవృత్తయోగార్ధముచేసైన వృత్తమునకు వ్యాసార్ధ మగుచున్నది. అనగా

$$\frac{\text{ఉఅం} \times \text{కోజ్యా ఇ}\frac{1}{2}}{\text{ఇపూజ్యా}} = \text{ఊర్ధ్వాధోవృత్త యోగార్ధవృత్త వ్యాసార్ధము.}$$

గోలపరిధివ్యాస = వ్యా, గోలపరిధి = ప అనుకొందము. పైవ్యాసార్ధమును 2చే గుణించి త్రైరాశికముచే దానిని గోలపరిధిచే గుణించి గోలవ్యాసముచే భాగింప ఆ వ్యాసార్ధముచేసైన వృత్తపరిమాణము తెలియును. కావున

$$\frac{(\text{ఉఅం} \times \text{కోజ్యాఇ}\frac{1}{2})2 \times \text{ప}}{\text{వ్యా} \times \text{ఇపూజ్యా}} = \text{యోగార్ధపరిధి యగుచున్నది. దీనిని ఇష్టచాప}$$

మగులంబముచే గుణింప ఆ వలయమందలి ఫలము

$$= \frac{(\text{ఉఅం} \times \text{కోజ్యాఇ}\frac{1}{2})2\text{ప} \times \text{ఇపూజ్యా}}{\text{వ్యా} \times \text{ఇపూజ్యా}} = \frac{(\text{ఉఅం} \times \text{కోజ్యాఇ}\frac{1}{2})\text{ప } 2}{\text{వ్యా}}$$

ఇచట ఇష్టచాపమునకును ఇష్టచాపపూర్ణజ్యకును ఇష్టచాపము తగ్గినకొలదిని అభేదము గలుగుచున్నది గాన ఇష్టచాపమునకు మారుగ ఇపూజ్యా గ్రహించి చూపబడినది. ఇట్లు ప్రతివృత్తద్వయముయొక్కయు మధ్యనున్న వలయాఫలమును సాధించునపుడు ఆయావృత్తముల ఊర్ధ్వాధోరూపాంతరమగు ఉత్క్రమజ్యాంతరమునకు ఇష్టచాపార్ధ కోటిజ్య, 2, పరిధి, గుణకము లగుచున్నవి. వ్యాసము హారమగుచున్నది. కావున

$$\frac{\text{ప్రఉఅం} \times \text{కోజ్యాఇ}\frac{1}{2} \times \text{ప} \times 2}{\text{వ్యా}} + \frac{\text{ద్విఉఅం} \times \text{కోజ్యాఇ}\frac{1}{2} \times \text{ప} \times 2}{\text{వ్యా}} \text{ ఇత్యా} ..$$

$$\therefore (\text{ప్రఉఅం} + \text{ద్విఉఅం} + \text{తృఉఅం} ..) \times \frac{\text{కోజ్యాఇ}\frac{1}{2} \times \text{ప} \times 2}{\text{వ్యా}} = \text{గోలార్ధ}$$

పృష్ఠఫల. ఇష్టచాప మల్పమైనకొలదిని ఇష్టచాపార్ధకోటిజ్య త్రిజ్యాసన్న మగుచున్నది కావున ఇష్టచాప $= 0$ అనుకొనుచో కోజ్యాఇ$\frac{1}{2}$ = త్రి = $\frac{\text{వ్యా}}{2}$ అగును

$$\text{కావున. } (\text{ప్రఉఅం} + \text{ద్విఉఅం} + \text{తృఉఅం ఇత్యా} \ldots) \times \frac{\text{త్రి} \times \text{ప} \times 2}{\text{వ్యా}} = \text{గోలా}$$

ర్ధపృష్ఠఫల. ఉత్క్రమజ్యాంతరముల యోగము త్రిజ్య యగుచుండుటచే

$$\text{గోలార్ధపృష్ఠఫల} = \frac{\text{త్రి} \times \text{త్రి} \times 2 \times \text{ప}}{\text{వ్యా}} \text{ ఇందు త్రి} \times 2 = \text{వ్యా కావున}$$

త్రి × ప = గోలార్ధపృష్ఠఫల. దీనిని రెట్టింప త్రి × 2 × ప = వ్యా × ప

$$\because \text{ వృత్తక్షేత్రఫల} = \frac{\text{వ్యా} \times \text{ప}}{4} \therefore \text{ వ్యా} \times \text{ప} = \text{వృఫ} \times 4 \text{ అగుచున్నది.}$$

ఇట్లు గోలపృష్ఠఫలానయనపద్ధతి ఉపపన్న మగుచున్నది.

(3) గోల ఘనఫలానయనోపపత్తి: (లీలావతిశ్లోకసూత్రము 119 చూ) గోలపృష్ఠభాగమందు పృష్ఠఫల మెంతయో అన్ని సమచతురశ్రక్షేత్రము లగుచున్నవి, అనగా వ్యాసము7 పరిధి 22 అగుచో (ఇవి అంగుళములనుకొనుము) పరిధివ్యాసఘాతము 7 × 22 = 154 చతురపు అంగుళములు ఆగోలోపరిభాగమందుండును. అట్టి వర్గక్షేత్రముయొక్క 4కోణములనుండియు గోలగర్భ(కేంద్ర)కు 4 రేఖలను చేసితి మనుకొనుము. ఈ 4 రేఖలును ఆగోలకేంద్రమందు

కలియుచున్నవి. అట్లు అన్ని వర్గక్షేత్రములయొక్కయు రేఖలు ఆగోలగర్భమందు కలియుచున్నవి. ఒక్కొకవర్గక్షేత్రముచేతను ఒక్కొక సూచీఘనక్షేత్రమగుచున్నది. అందు వెడల్పు 1 అంగుళము, పొడవు 1 అంగుళము. వేధ (ఎత్తు) వ్యాసార్ధము. కావున దీనిని వ్యాసార్ధముచే గుణించి 3చే భాగింప సూచీఘనఫల మగుచున్నది. అన్ని సూచీఘనఫలములయొక్కయు యోగము గోలఘనఫలమగుచున్నది.

$$\text{కావున } 154 \times \frac{\text{వ్యా}}{2} \div 3 = \frac{154 \times \text{వ్యా}}{6} = \frac{\text{గోపృఫ} \times \text{వ్యా}}{6} = \text{గోలఘనఫల.}$$

ఇట్లు ఘనఫలానయన ముపపన్న మగుచున్నది.

ప్రకారాంతరేణ తత్ఫలానయనే కరణసూత్రం సార్ధవృత్తం.

వ్యాసస్యవర్గేభనవాగ్నినిఘ్నే సూక్ష్మంఫలం పంచసహస్రభక్తే।
రుద్రాహతేశక్రహృతేథవాస్యాత్ స్థూలంఫలంసంవ్యవహారయోగ్యం
ఘనీకృతవ్యాసదలంనిజైకవింశాంశయుగ్గోలఫలంఘనంస్యాత్।౧౯౮ [?]

టీ॥ వ్యాసస్య = వ్యాసముయొక్క. వర్గే = వర్గము, భనవాగ్నినిఘ్నే = 3927చే గుణింపబడినదై, పంచసహస్రభక్తే = 5000 చే భాగింపబడినదియగుచో సూక్ష్మం = సూక్ష్మమైన ఫలం = క్షేత్రఫల మగును. అథవా = లేక, రుద్రాహతే = 11చే గుణింపబడినదై. శక్రహృతే = 14చే భాగింపబడినదియగుచో సంవ్యవహారయోగ్యం = వ్యవహారమునకుతగిన, స్థూలం = స్థూలమైన, ఫలం = ఫలము, స్యాత్ = అగుచున్నది.

ఘనీకృతవ్యాసదలం = ఘనీకరింపబడినవ్యాసముయొక్క సగము, నిజైకవింశాంశయుక్ = తనలోని 21వ వంతుతో గూడినదై, ఘనం = ఘనమైన, గోలఫలం = గోలఫలము. (గోలఘనఫలము) స్యాత్ = అగును.

181. ప్ర. (1) వ్యాసవర్గమును 3927చే గుణించి 5000 (5 వేలు)చే భాగింప వృత్తక్షేత్రఫలము సూక్ష్మమైనది యగును.

(2) వ్యాసవర్గమును 11చే గుణించి 14చే భాగింప స్థూలఫలమగును.

(3) వ్యాసముయొక్క ఘనముయొక్క సగమునందు స్వాంశానుబంధవిధిచే $\frac{1}{21}$ కలుప గోలఘనఫలమగును.

న్యాసః. జాతం తదేవ సూక్ష్మంఫలం ౩౮ $\frac{\text{౨౪౨౩}}{\text{౫౦౦౦}}$

స్థూలంవా ౩౮ $\frac{\text{౧}}{\text{౨}}$ ఘనఫలంవా ౧౭౯ $\frac{\text{౨}}{\text{౩}}$

వ్యాసము 7 అగునపుడు వ్యాసవర్గము49 దీనిని 3927చే గుణించి 5000 చే భాగింప $\frac{49\times 3927}{5000} = 38\frac{2423}{5000}$ అగుచున్నది.

అట్లు $\frac{7^2\times 11}{14} = 38\frac{1}{2}$ అట్లు ఘనఫలము $\left(\frac{7^3}{2}\right) + \text{స్వ}\frac{1}{21} = 179\frac{2}{3}$

ఉపపత్తి: (1) వృఫ $= \frac{\text{వ్యా}\times \text{ప}}{4}$, ప $= \frac{\text{వ్యా}\times 3927}{1250}$

$$\therefore \frac{\text{వ్యా}\times\text{వ్యా}\times 3927}{5000} = \text{వృఫ}$$

(2) అట్లు ప $= \frac{\text{వ్యా}\times 22}{7}$ అగుచో $\frac{\text{వ్యా}\times\text{ప}}{4}$

$$= \frac{\text{వ్యా}\times\text{వ్యా}\times 22}{7\times 4} = \frac{\text{వ్యా}^2\times 11}{14} = \text{వృఫ}.$$

(3) గోలఘనఫల $= \frac{\text{ప}\times\text{వ్యా}\times\text{వ్యా}}{6}$ (180 ప్ర 3చూ).

$\because$ ప $= \frac{\text{వ్యా}\times 22}{7}$ $\therefore$ గోఘఫ $= \frac{\text{వ్యా}\times\text{వ్యా}\times\text{వ్యా}\times 22}{7\times 6}$

$$= \frac{\text{వ్యా}^3\times 22}{42} = \frac{\text{వ్యా}^3\times 22}{2\times 21} = \frac{\text{వ్యా}^3\times 21 + \text{వ్యా}^3}{2\times 21} = \left(\frac{\text{వ్యా}^3}{2}\right) + \text{స్వ}\frac{1}{21}$$

అగుచున్నది.

182. ప్ర. ఇట్లు మ. మ. పం. బాపుదేవశాస్త్రిగారి శ్లోకప్రకారము.

ప $= \frac{\text{వ్యా}\times 355}{113}$ కావున వృఫ $= \frac{\text{వ్యా}^2\times 355}{4\times 113} = \frac{\text{వ్యా}^2\times 355}{452}$ కావున

వ్యాసవర్గే త్రిబాణాగ్ని (355) ఘ్నే నేత్రశరాబ్ధిభిః (452)।
విభాజితే భవేన్నూనం వృత్తే సూక్ష్మతరం ఫలం॥

ప × వ్యా $= \frac{\text{వ్యా}^2\times 355}{113} =$ గోలపృష్ఠఫలం కావున

పంచపంచాగ్నిభిః (355) ఘ్నే వ్యాసవర్గే గ్నిశంకరైః (113)।
విభక్తే పృష్ఠజం గోలే ఫలం సూక్ష్మతరం భవేత్॥

$$\frac{\text{ప. వ్యా. వ్యా}}{6} = \frac{\text{వ్యా}\times\text{వ్యా}\times\text{వ్యా}\times 355}{6\times 113} = \frac{\text{వ్యా}^3\times 355}{678} = \text{గోలఘనఫల}$$

ఘనే వ్యాసస్య సంఘ్నే శరబాణహుతాశనైః (355)।
వసునప్తర్తుభి (678) ర్భక్తే గోలే ఘనఫలం స్మృతం॥

ఈబాపుదేవశాస్త్రిగారి శ్లోకము లుపపన్నము లగుచున్నవి.

శరజీవానయనాయ కరణసూత్రం సార్ధవృత్తం

జ్యావ్యాస యోగాంతర ఘాతమూలం వ్యాస స్తదూనో దలిత శ్శర స్స్యాత్॥ వ్యాసా చ్ఛరోనా చ్ఛరసంగుణాచ్చ మూలం ద్వినిఘ్నం భవతీహ జీవా॥ జీవార్ధవర్గే శరభక్తయుక్తే వ్యాస ప్రమాణం ప్రవదన్తి వృత్తే॥ ౧౧౧॥

టీ॥ జ్యా వ్యాస యోగాంతర ఘాతమూలం = జ్యావ్యాసముల యోగమును జ్యావ్యాసముల అంతరముచే గుణింపనగు సంఖ్యయొక్క మూలము చేయదగినది. వ్యాసః = వ్యాసము, తదూనః = ఆమూలముచే వ్యవకలింపబడినదై, దలితః = అర్ధింపబడినదై, శరః = శరము, స్యాత్ = అగును. శరోనాత్ = శరముచేవ్యవకలింపబడినదియు, శరసంగుణాత్ = శరముచేగుణింపబడినదియునగు వ్యాసాత్= వ్యాసమువలననగు, మూలం = మూలము, ద్వినిఘ్నం = 2చే గుణింపబడినదై, ఇహ = ఈగణితమునందు, జీవా = జ్యా, భవతి = అగుచున్నది.

జీవార్ధవర్గే = జ్యార్ధముయొక్క వర్గము, శరభక్తయుక్తే = శరముచే భాగింపబడి శరముతో కలుపబడినదియునగుచో (ఆసంఖ్యను) వృత్తే = వృత్తమందు వ్యాస ప్రమాణం = వ్యాసప్రమాణముగ ప్రవదంతి = చెప్పుచున్నారు.

శరమును తెలియుట.

183. ప్ర. (1) జ్యా అనగా పూర్ణజ్యయని ఈసూత్రమునందు గ్రహింప వలయును. ఒకానొక పూర్ణజ్యయొక్కయు వ్యాసముయొక్కయు యోగాంతర ఘాతమున కగు మూలమును వ్యాసమువలన వ్యవకలించి అర్ధింప శరమగును.

పూర్ణజ్యను తెలియుట.

(2) వ్యాసమువలన శరమును వ్యవకలించి ఆశేషమును శరముచే గుణింర దానియొక్క వర్గమూలమును రెండుచే గుణింప పూర్ణజ్య యగును.

వ్యాసమును తెలియుట.

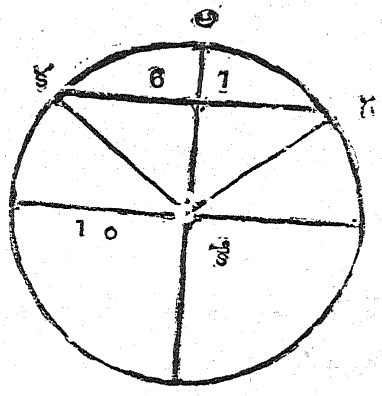
(3) పూర్ణజ్యయొక్క అర్ధముయొక్క వర్గమును శరముచే భాగించి శర మును కలుప వ్యాసమాన మగును.

ఉదాహరణం.

దశవిస్తృతి వృత్తాంత ర్యత్ర జ్యా షణ్మితా సఖే।
తత్రేషుం వద బాణా జ్జ్యాం జ్యాబాణాభ్యాం చ విస్తృతిం॥ ౯౧॥

న్యాసః. వ్యాసః ౧౦ జ్యా ౬ లబ్ధో బాణమితిః ౧ అథ బాణా ల్లబ్ధా జ్యా ౬ అథ జ్యాబాణయో ర్జ్ఞాతయో ర్లబ్ధా వృత్తవిస్తృతిః ౧౦

తా॥ మిత్రమా! 10వ్యాసప్రమాణముగల వృత్తమునందు జ్యాప్రమాణము 6 అగుచో నచట శరమును చెప్పుము. అట్లు శరమున్ను వ్యాసమున్ను తెలిసినచో జ్యాప్రమాణ మెంతయుండును ? జ్యాశరములవలన వ్యాసమును చెప్పుము.



అకగవృత్త వ్యాసము10 ఈవృత్తమునందు కగ పూర్ణజ్య 6 గలదు. ఇది కఅగ చాపము నకు పూర్ణజ్య 6 అగుచున్నది. ఇందు 'కేఅ' వ్యాసార్ధమునందు అ బిందువునుండి కగ పూర్ణ జ్యవరకునైన ఖండము శరమనియు ఉత్క్రమజ్యయనియు చెప్పబడుచున్నది. పూర్ణజ్య 6 వ్యాసము10 శరమెంత ?

వ్యాసము 10లో పూర్ణజ్య 6ను కలుప 16 దీనిని అంతరము $10 - 6 = 4$చే గుణింప $16 \times 4 = 64$ దీనిమూలము 8 ను వ్యాసము 10 లో వ్యవకలింప $10 - 8 = 2$ అర్ధింప 1 ఇది శరప్రమాణము.

వ్యాసశరములు తెలిసి పూర్ణజ్య తెలియవలసినచో వ్యాసము 10 వలన శరము 1టిని తీసివేయ 9 శరము 1చే గుణింప $9 \times 1 = 9$ మూలము 3 దీని 2చే గుణింప 6 పూర్ణజ్య.

శరపూర్ణజ్యలు తెలిసి వ్యాసము తెలియవలసినచో పూర్ణజ్యా 6 ర్ధము 3యొక్క వర్గము 9 ను శరముచే భాగింప 9 ఇందు శరమును కలుప 10వ్యాసము.

ఉపపత్తి: (1) కేఅ = కేక = వ్యాసార్ధము. ఈవ్యాసార్ధమువలన శర మును వ్యవకలింప కేంద్రమునుండి పూర్ణజ్యవరకునైన 'కేఅ' వ్యాసార్ధముయొక్క ఖండము అగుచున్నది. అది కోటి. పూర్ణజ్యార్ధము భుజ,వ్యాసార్ధము కర్ణము. ఇది జాత్య త్రిభుజము.

$\therefore \left(\frac{\text{వ్యా}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\text{జ్యా}}{2}\right)^2 = \text{కోటి}^2$ అగుచున్నది. కావున

$$\sqrt{\frac{\text{వ్యా}^2}{4} - \frac{\text{జ్యా}^2}{4}} = \frac{\sqrt{\text{వ్యా} - \text{జ్యా}^2}}{2} = \text{కో} \quad \therefore \sqrt{\text{వ్యా}^2 - \text{జ్యా}^2} = 2\,\text{కోటి}$$

వర్గాంతరము యోగాంతరఘాతసమమగుటచే $\sqrt{(\text{వ్యా} + \text{జ్యా})(\text{వ్యా} - \text{జ్యా})} = 2\,\text{కోటి}$; $\frac{\text{వ్యా}}{2} - \text{కో} = \text{శర}$ $\therefore \text{వ్యా} - 2\,\text{కో} = 2\,\text{శ}$ కావున జ్యావ్యాస యోగాంతర ఘాత మూలమగు ద్విగుణితకోటిని వ్యాసమువలన వ్యవకలించి అర్ధింప శరమగుచున్నది.

(2) $\left(\frac{\text{వ్యా}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\text{వ్యా}}{2} - \text{శ}\right)^2 = \left(\frac{\text{పూర్ణజ్యా}}{2}\right)^2$ అగుచున్నది.

$\frac{\text{వ్యా}}{2}$ = త్రి కావున

$\text{త్రి}^2 - (\text{త్రి} - \text{శ})^2 = \text{త్రి}^2 - (\text{త్రి}^2 - 2\text{త్రి}.\text{శ} + \text{శ}^2) = \left(\frac{\text{జ్యా}}{2}\right)^2$

$= \sqrt{2\text{త్రి}.\text{శ} - \text{శ}^2} = \sqrt{\text{వ్యా}.\text{శ} - \text{శ}^2} = \sqrt{(\text{వ్యా} - \text{శ})\text{శ}} = \text{జ్యా}$

దీనిని ద్విగుణింప పూర్ణజ్య యగును.

(3) ఆప్రకారము $\sqrt{(\text{వ్యా} - \text{శ})\text{శ}} = \frac{\text{జ్యా}}{2}$ కావున.

$\left(\frac{\text{జ్యా}}{2}\right)^2 = (\text{వ్యా} - \text{శ})\text{శ} \therefore \left(\frac{\text{జ్యా}}{2}\right)^2 \div \text{శ} + \text{శ} = \text{వ్యాస}.$

వృత్తాంత ర్త్ర్యస్రాది నవాస్రాంత క్షేత్రాణాం భుజమా
నానయనాయ కరణసూత్రం వృత్తత్రయం.

త్రిద్వ్యంకాగ్నినభశ్చంద్రైః ౧౦౩౯౨౩ స్త్రిబాణాష్టయుగాష్టభిః ౮౪౮౫౩॥ వేదాగ్నిపంచఖాశ్వైశ్చ ౭౦౫౩౪ ఖఖాభ్రాభ్రరసైః ౬౦౦౦౦ క్రమాత్॥ ౧౧౨॥ బాణేషునఖబాణైశ్చ ౫౨౦౫౫ ద్విద్వినందేషుసాగరైః ౪౫౯౨౨। కురామదశవేదైశ్చ ౪౧౦౩౧ వృత్తవ్యాసే సమాహతే॥ ౧౧౩॥ ఖఖఖాభ్రార్క ౧౨౦౦౦౦ సంభక్తే లభ్యన్తే క్రమశోభుజాః। వృత్తాంత ర్త్ర్యస్రపూర్వాణాం నవాస్రాంతంపృథ క్పృథక్॥ ౧౧౪॥

184. ప్ర. తా॥ అభీష్టవ్యాసముగల వృత్తమునందు సమబాహుకములగు త్రిభుజ చతుర్భుజ పంచభుజ షడ్భుజ సప్తభు జాష్టభుజ నవభుజ క్షేత్రముల చేయవలసినచో పద్ధతి:—

అభీష్టవృత్తముయొక్క వ్యాసమును 103923 ఈసంఖ్యచే గుణించి120000 చే భాగింప వృత్తాంతర్గత సమభుజ త్రిభుజముయొక్క ఒకభుజకు పరిమాణ మగును.

అట్లు 84853చే గుణించి 120000చే భాగింప చతుర్భుజ భుజ
70534చే గుణించి 120000చే భాగింప పంచభుజ భుజ
60000చే గుణించి 120000చే భాగింప షడ్భుజ భుజ
52055చే గుణించి 120000చే భాగింప సప్తభుజ భుజ
459 2చే గుణించి 120000చే భాగింప అష్టభుజ భుజ
41031చే గుణించి 120000చే భాగింప నవభుజ భుజయు అగును

ఉపపత్తి: 120000 వ్యాసముగా గల వృత్తమందు త్రిభుజాది భుజపరిమాణములు సాధించి పఠింపబడినవి. 120000 వ్యాసమువందు 103923 త్రిభుజభుజ యగుచో ఇష్టవ్యాసము గల వృత్తమునం దెంత ? ఇట్లు త్రైరాశికము చేయుట చెప్పబడెను.

"పై సప్తభుజ క్షేత్రభుజయందును నవభుజక్షేత్ర భుజయందును, సూక్ష్మ జ్యానయనపద్ధతిచే భుజల సాధింప 52066న్ను 41042న్ను వచ్చుచున్నవి కావున భాస్కరాచార్యులు స్థూలపద్ధతిచే సాధించిరని చెప్పవలయును" అని మ. మ. పం. బాపుదేవశాస్త్రిగారును మ. మ. పం. సుధాకరద్వివేదిగారును వ్రాసిరి.

ఉదాహరణం.

సహస్రద్వితయం వ్యాసం యద్వృత్తం తస్య మధ్యతః।
సమత్ర్యస్రాదికానాం మే భుజా న్వద పృథ క్పృథక్॥ ౯౨॥

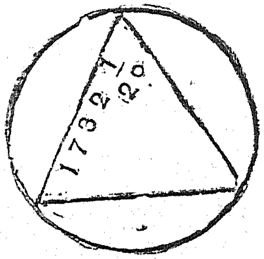
తా॥ ఏవృత్తము 2 వేలు (2000) వ్యాసము గలదియో ఆవృత్తముయొక్క మధ్యయందు సమభుజలు గల త్రిభుజ చతుర్భుజ పంచభుజ షడ్భుజ సప్తభు జాష్టభుజ నవభుజ క్షేత్రములయొక్క భుజల వేర్వేర చెప్పుము.

న్యాసః. వ్యాసః ౨౦౦౦ లబ్ధం త్ర్యస్రే భుజమానమ్ ౧౭౩౨ $\frac{౧}{౨౦}$ చతురస్రే ౧౪౧౪ $\frac{౧౩}{౨౦}$ పంచాస్రే ౧౧౭౫ $\frac{౧౯}{౩౦}$. షడస్రే ౧౦౦౦ సప్తాస్రే ౮౬౭ $\frac{౭}{౧౧}$ అష్టాస్రే ౭౬౫ $\frac{౨౧}{౩౦}$ నవాస్రే ౬౮౩ $\frac{౧౯}{౨౦}$ చ, ఏవ మిష్టవ్యాసే ఏభ్యోఽన్యా అపి జీవా స్సిధ్యన్తి. తాస్తు గోలే జ్యోత్పత్తౌ వక్ష్యే.

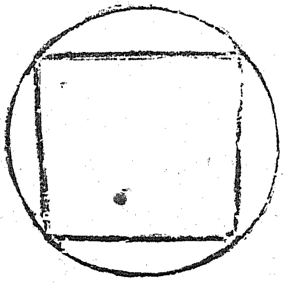
వ్యాసప్రమాణము 2000 గల వృత్తములందు త్రిభుజాదిక్షేత్రములందు భుజపరిమాణములు.

వృత్తవ్యాసమును పైన చెప్పబడిన గుణకములచే గుణించి 120000 చే భాగింప లబ్ధములు, క్రమముగ త్రిభుజాదిక్షేత్రములందు భుజ లగుచున్నవి.

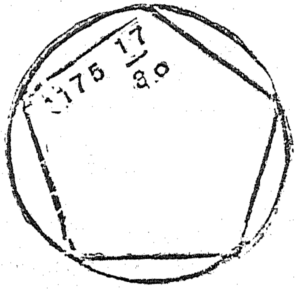
త్రిభుజ



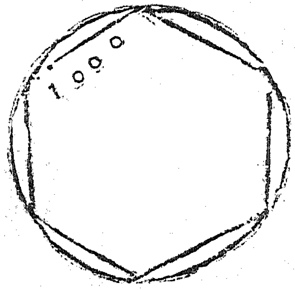
చతుర్భుజ, 1444 13/20



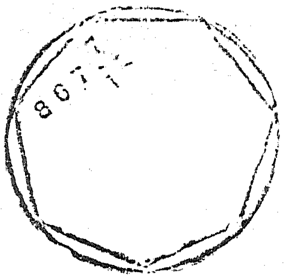
పంచభుజ



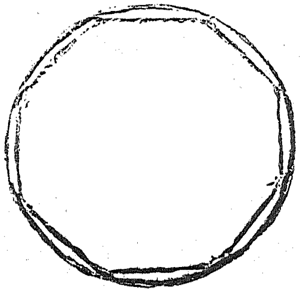
షడ్భుజ



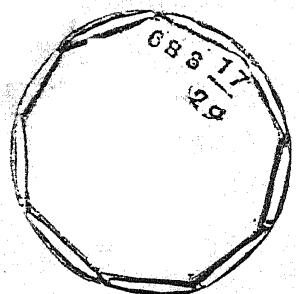
సప్తభుజ



అష్టభుజ, 765 21/30



నవభుజ



$\frac{2000 \times 103923}{120000} = 1732\frac{1}{12}$ త్రిభుజ భుజ,

$\frac{2000 \times 84853}{120000} = 1444\frac{13}{20}$ చతుర్భుజ భుజ,

$\frac{2000 \times 70534}{120000} = 1175\frac{17}{30}$ పంచభుజ భుజ,

$\frac{2000 \times 60000}{120000} = 1000$ షడస్రిభుజము

$\frac{2000 \times 52055}{120000} = 867\frac{7}{12}$ సప్తాస్రిభుజ, $\frac{2000 \times 45922}{120000} = 765\frac{21}{30}$ అష్టాస్ర భుజ, $\frac{20000 \times 41031}{120000} = 683\frac{17}{20}$ నవాస్రిభుజ. ఈపూర్ణజ్యలవలన. ఇష్టవ్యాస

ముగల వృత్తమునందు ఇతరములగు పూర్ణజ్యలనున్ను సాధింపవచ్చును. వాటిని భాస్కరాచార్యులు సిద్ధాంతశిరోమణియందు చెప్పియున్నారు.

అథస్థూలజీవాజ్ఞానార్థం లఘుక్రియాకరణసూత్రం వృత్తం.

చాపోననిఘ్నపరిధిః ప్రథమాహ్వయ స్స్యా త్పంచాహతః పరిధివర్గచతుర్థభాగః। ఆద్యోనితేన ఖలు తేన భజే చ్చతుర్ఘ్నవ్యాసాహతం ప్రథమ మాప్త మిహ జ్యకా స్యాత్॥ ౧౧౭॥

టీ॥ చాపోననిఘ్నపరిధిః = చాపముచే తీసివేయబడి చాపముచే గుణింపబడిన పరిధి, ప్రథమాహ్వయః = ప్రథమము అనుపేరుగలది, స్యాత్ = అగును పరిధివర్గచతుర్థభాగః = పరిధివర్గముయొక్క 4వ వంతు, పంచాహతః (కార్యః) = 5చే గుణింపదగినది. ఆద్యోనితేన = ప్రథమముచే వ్యవకలింపబడిన, తేన = ఆపరిధివర్గచతుర్థభాగముచే, చతుర్ఘ్నవ్యాసాహతం = 4చే గుణింపబడిన వ్యాసముచే గుణింపబడిన, ప్రథమం = ప్రథమమును, భజేత్ = భాగింపవలయును. ఆప్తం = అట్లు భాగింపనైనలబ్ధము, ఇహ = ఈచాపమునందు, జ్యకా = పూర్ణజ్యయై, స్యాత్ = అగును.

185. ప్ర. అభీష్టచాపమునకు పూర్ణజ్య నెఱుంగుట.

పరిధిప్రమాణమువలన చాపమును వ్యవకలించి శేషమును చాపముచే గుణింపుము. దానికి ప్రథమము లేక ఆద్యము అనిపేరు.

పరిధిని వర్గించి 4చే భాగింప నగు లబ్ధమును 5చే గుణించి ఆద్యమువలన వ్యవకలింపుము. ఈశేషముచే నాలుగుచేతను వ్యాసముచేతను గుణింపబడిన ఆద్యమును భాగింపుము ఆలబ్ధము అభీష్టచాపమునకు పూర్ణజ్య యగును.

ఉదాహరణం

అష్టాదశాంశేన వృతే స్సమాన మేకాదినిఘ్నేన చ యత్ర చాపం। పృథ క్పృథక్తత్రవదాశుజీవాంఖ్యాస్యైర్మితంవ్యాసదలంచయత్ర॥ ౯౩

తా॥ వ్యాసప్రమాణము 240 (వ్యాసార్థము 120) ఆ వృత్తక్షేత్రమునందు పరిధిని 18చే భాగింపనగుసంఖ్యను 1, 2, 3 మొదలగుసంఖ్యలచే వేర్వేర గుణింపనగుసంఖ్యలుగల చాపమునకు వేరువేరుగ పూర్ణజ్యాప్రమాణములను చెప్పుము.

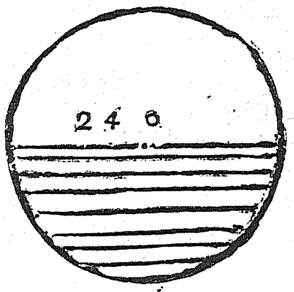
న్యాసః. వ్యాసః ౨౪౦ అత్రైకిలాంకలాఘవాయ వింశతే స్సార్ధార్క-శతాంశస్య మేలనేన పరిధిః౭౫౪ అస్య అష్టాదశాంశః౪౨ అత్రాపివ్యంకలాఘవాయ ద్వయో రష్టాదశాంశయుతో గృహీతః అనేన పృథగేకాదిగుణితేన తుల్యే ధనుషి జ్యాస్సాధ్యాః. అథవాత్ర సుఖార్థం పరిధే రష్టాదశాంశేన పరిధిం ధనూంషి చాపవర్త్య జ్యా స్సాధ్యన్తే తథాపి తా ఏవ భవంతి. అపవర్తితే న్యాసః. పరిధిః ౧౮ చాపాని, ౧, ౨, ౩, ౪, ౫, ౬, ౭, ౮, ౯ యథోక్తకరణేన లబ్ధాని జ్యామానాని ౪౨, ౮౨, ౧౨౦, ౧౫౪, ౧౮౪, ౨౦౮, ౨౨౬, ౨౩౬, ౨౪౦ ఏవ మన్యస్మిన్నపి వ్యాసే॥

ఉదా: వ్యాసము 240 దీనిచే పరిధి $\frac{240 \times 3927}{1250} = 753\frac{1230}{1250}$ ఇందు స్వల్పాంతరముచే 1250 భాగములలో 20 భాగములు కలుపగా 754 పరిధిగ గ్రహింపబడినది. ఈపరిధి 754ని 18చే భాగింప $41\frac{16}{18}$ ఇచటను అంకలాఘవ ముకై 18వంతులలో 2వంతు గ్రహింప 42 అష్టాదశాంశ మగుచున్నది. దీనిని క్రమముగ ఏకాదిసంఖ్యలచే గుణింపనగు ధనుస్సులకు పూర్ణజ్యల సాధింపవల యును. ఏకాదిసంఖ్యలచే గుణింప 42, 84, 126, 168, 210, 252, 294, 336, 378 అగుచున్నవి.

పైపద్ధతిప్రకారము పరిధి 754లో చాపము 42ను వ్యవకలింప 712చాపము 42చేగుణింప 29904 ఇది ఆద్యము. పరిధి754యొక్క వర్గము 568516లో నాలవ భాగము 142129 దీనిని 5చే గుణింప 710645 ఇందు ఆద్యము 29904 ను వ్యవక లింప 680741 హారము వ్యాసము 240 ను 4చే గుణింప 960 దీనిచే ఆద్యము 29904ను గుణింప 2870784 ఈభాజ్యమును హారము 680741చే భాగింప లబ్ధము $42\frac{116718}{680741}$ ఇది పూర్ణజ్యాపరిమాణ మగుచున్నది. ఇట్లు అన్నిటిని సాధింప వలయును.

లేక పరిధిని ధనుస్సు (చాపము)లను అపవర్తించి పైప్రకారము సాధించి నను పూర్ణజ్యలు కాగలవు. ఇంచుమించున కోర్చి 42చే పరిధి నపవర్తింప 18అప వర్తితపరిధి. చాపములు 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ఇపుడు పరిధివలన చాప

మును వ్యవకలింప 18 — 1 = 17 చాపముచే దీనిని గుణింప 17 ఆద్యము. పరిధివర్గము 324యొక్క చతుర్థభాగము 81ను 5చే గుణింప 405 దీనివలన ఆద్య మును వ్యవకలింప 388 ఇదిహారము. 4చే గుణింపబడిన వ్యాసము 960చే గుణింప బడిన పోథమును 960 × 17 = 16320 దీనిని హారము 388చే భాగింప లబ్ధము $42\frac{24}{388}$ పూర్ణజ్య.



ఇట్లు ఏకాదినవాంతసంఖ్యలచే పరిధ్యష్టాదశాంశ మును గుణింపగానైన చాపములకు పూర్ణజ్యా పరిమాణ ములు. 42, 82, 120, 154, 184, 208, 226, 236, 240 అగుచున్నవి. ఇందు స్వల్పాంతరమును గణింపక పూర్ణసంఖ్యలు చూపబడినవి.

ఉపపత్తి: పైపద్ధతిప్రకారము సాధింపబడిన ఆద్యము పూర్ణజ్యాపరిమాణమగుచో చాపము శూన్య మగుచున్నది.

ఆ = (ప — చా) చా = జ్యాచా అనుకొందము. ఇతర చాపమునందు ఆ ఆద్యమును ఒకానొకసంఖ్యచే గుణించి ఒకానొకసంఖ్యచే భాగింపనగు సంఖ్య జ్యాపరిమాణ మగుచున్నది. కావున ఆగుణకసంఖ్య ‘యా’అనియు భాజకసంఖ్యను ఆద్యముతో కలుపగానగుసంఖ్య ‘కా’ అనియు కల్పించుదము అపుడు—

$$\text{జ్యాచా} = \frac{\text{యా} \times \text{ఆ}}{\text{కా} - \text{ఆ}} \text{ అగుచున్నది అనగా } \frac{(\text{ప} - \text{చా})\,\text{చా} \times \text{యా}}{\text{కా} - (\text{ప} - \text{చా})\text{చా}}$$

$$\text{చాప} = 180 = \frac{\text{ప}}{2} \text{ అగుచో } \frac{(\text{ప} - \frac{\text{ప}}{2})\frac{\text{ప}}{2} \times \text{యా}}{\text{కా} - (\text{ప} - \frac{\text{ప}}{2})\frac{\text{ప}}{2}} = \frac{\text{యా} \times \frac{\text{ప}^2}{4}}{\text{కా} - \frac{\text{ప}^2}{4}} = \text{వ్యాస}$$

$$\therefore \text{యా}\frac{\text{ప}^2}{4} = \text{కా}.\text{వ్యా} - \frac{\text{ప}^2}{4} \times \text{వ్యా} \therefore \text{యా}.\text{ప}^2 = 4\text{కా}.\text{వ్యా} - \text{ప}^2.\text{వ్యా}$$

$$\text{ఇట్లు చాప} = \frac{\text{ప}}{6} \text{ అగుచో ఆద్య} - \frac{5\text{ప}^2}{36} \therefore \frac{\frac{5\text{ప}^2}{36} \times \text{యా}}{\text{కా} - \frac{5\text{ప}^2}{36}} = \text{జ్య}\left(\frac{\text{ప}}{6}\right) = \frac{\text{వ్యా}}{2}$$

$$\therefore \text{యా} \times 10\text{ప}^2 = \text{కా}.\text{వ్యా}\,36 - 5\text{ప}^2.\text{వ్యా} \text{ అగుచున్నది.}$$

$$\text{కావున చాప} = \frac{\text{ప}}{2} \text{ అగునపుడు యా}.\text{ప}^2 = 4\,\text{కా}.\text{వ్యా} - \text{వ్యా}.\text{ప}^2$$

$$\text{చాప} = \frac{\text{ప}}{6}\ \text{అగునపుడు}\ \text{యా}.\ \text{ప}^2 = \frac{36\,\text{కా}.\text{వ్యా} - \text{వ్యా}.\text{ప}^2 5}{10}$$

పై సమీకరణములవలన సమీకరణముచేయగా

$$40\ \text{కా}.\text{వ్యా} - 10\ \text{వ్యా}.\text{ప}^2 = 36\ \text{కా}.\text{వ్యా} - \text{వ్యా}.\text{ప}^2 5$$

$$\therefore 40\,\text{కా} - 10\text{ప}^2 = 36\text{కా} - \text{ప}^2 5 \quad \therefore \text{కా} = \frac{5\text{ప}^2}{2}$$

$$\text{ఇట్లు}\ \text{యా} = \frac{\text{వ్యా}\,(4\text{కా} - \text{ప}^2)}{\text{ప}^2} = \frac{\text{వ్యా}(36\text{కా} - \text{ప}^2 5)}{\text{ప}^2 10}$$

$$\text{కా} = \frac{5\text{ప}^2}{4}\ \text{కావున}\ \text{యా} = \frac{\text{వ్యా}(5\text{ప}^2 - \text{ప}^2)}{\text{ప}^2} = \frac{\text{వ్యా}(9\text{ప}^2 - \text{ప}^2)}{2\text{ప}^2} = 4\text{వ్యా}$$

$$\text{కావున}\ \text{జ్యాచా} = \frac{\text{యా} \times (\text{ప} - \text{చా})\text{చా}}{\text{కా} - (\text{ప} - \text{చా})\,\text{చా}} = \frac{4\text{వ్యా} \times \text{అ}}{\frac{5\text{ప}^2}{4} - \text{అ}}\ \text{అగుచున్నది.}$$

ఇచట (ప — చా) చా = అ = ప్రథమ ఇట్లు గ్రహింపబడినది.

ఈపద్ధతి చాపముశూన్యమగునపుడును పరిధిషష్ఠాంశము చాపమగునపుడును పరిధ్యర్థము చాపమగునపుడును పైన సమీకరణములచే నేర్పడినది ఈచాపము లగునపుడు తప్పక సరిపడును. ఇతరచాపములగునపుడును సరిపడవలయును. కాని ఇట్లు ఇతరములగు ప్రకారములును ఇతరచాపసమీకరణములవలన కాగలవు. కావున ఈపద్ధతిచే నితరచాపములందు స్థూలముగ (అసన్నముగ) పూర్ణజ్య లగుచున్నవి. కావుననే "స్థూలంజ్యానయనం పాట్యా మిహ తన్నోదితం మయా" అని భాస్కరాచార్యులు సిద్ధాంతశిరోమణియందు చెప్పియున్నారు.

అథ చాపానయనాయ కరణసూత్రం వృత్తమ్.

వ్యాసాబ్ధిఘాతయుతమౌర్వికయా విభక్తో జీవాంఘ్రిపంచ గుణితః పరిధేస్తు వర్గః। లబ్ధోనితాత్పరిధివర్గచతుర్థభాగా దాప్తే పదే వృతిదలాత్పతితే ధనుస్స్యాత్॥ ౧౧౫॥

టీ॥ జీవాంఘ్రిపంచగుణితః = జ్యాయొక్క 4గు 5వంతులచే (జ్యా $\frac{5}{4}$చే) గుణింపబడిన, పరిధేః = పరిధియొక్క, వర్గః = వర్గము, వ్యాసాబ్ధిఘాతయుతమౌర్వికయా = 4చే గుణింపబడినవ్యాసముతో కలుపబడిన 'జ్యా' చే. విభక్తః = భాగింపబడినదై చేయదగినది. లబ్ధోనితాత్ = లబ్ధముచే వ్యవకలింపబడిన,

పరిధివర్గచతుర్థభాగాత్ = పరిధివర్గముయొక్క నాలవవంతువలన, ఆప్తే = పొందబడిన, పదే = వర్గమూలము, వృతిదలాత్ = పరిధ్యర్థమువలన, పతితే = వ్యవకలింప(నగుశేషము) ధనుః = చాపము, స్యాత్ = అగును.

186. ప్ర. పూర్ణజ్యనుబట్టి చాపము నెరుంగుట. (పైపద్ధతికి వ్యతిరేకము)

(1) వ్యాసమును 4చే గుణించి పూర్ణజ్యయందు కలిపి దానిచే, పరిధివర్గమును జ్యాచేతనున్ను $\frac{5}{4}$చేతనున్ను గుణింపగానగు సంఖ్యను భాగింపుము.

(2) పరిధివర్గమును 4చే భాగింపగానగు సంఖ్యవలన లబ్ధమును వ్యవకలించి దానియొక్క వర్గమూలమును పరిధ్యర్థమువలన వ్యవకలింపనగు శేషముచాపమగును.

$$\text{ఉపపత్తి: పైపద్ధతిచే}\ \frac{4\ \text{వ్యా} \times \text{అ}}{\frac{5\text{ప}^2}{4} - \text{అ}} = \text{జ్యాచా}$$

$$\text{కావున}\ 4\text{వ్యా}.\ \text{అ} = \frac{5}{4}\text{ప}\frac{2}{4} \times \text{జ్యాచా} - \text{జ్యాచా}.\ \text{అ}$$

$$\therefore \text{అ}\ (4\text{వ్యా} + \text{జ్యాచా}) = \text{ప}^{2\,5} \times \text{జ్యాచా}$$

$$\therefore \text{అ} = \frac{\text{ప}^2\frac{5}{4} \times \text{జ్యాచా}}{4\text{వ్యా} + \text{జ్యాచా}} = \text{లబ్ధము, అద్య మగుచున్నది.}$$

$$\because \text{అ} = (\text{ప} - \text{చా})\,\text{చా} = \text{ప}.\text{చా} - \text{చా}^2 = \text{ల} \quad \therefore \text{చా}^2 - \text{ప}.\text{చా} = -\text{ల}$$

పక్షద్వయమునందును వర్గమును కలుపగా

$$\text{చా}^2 - \text{ప}.\text{చ} + \left(\frac{\text{ప}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\text{ప}}{2}\right)^2 - \text{ల}$$

$$\therefore \text{చా} - \frac{\text{ప}}{2} = \sqrt{\frac{\text{ప}^2}{4} - \text{ల}} = \text{మూలము, ఋణ మగుచున్నది.}$$

$$\text{కావున చా} = \text{మూ} - \frac{\text{ప}}{2}\ \text{అగుచున్నది.}$$

ఉదాహరణమ్

విహితా ఇహ యే గుణాస్తతో వద తేషా మధునా ధనుర్మితిం।
యది తేస్తి ధనుర్గుణక్రియాగణితే గాణితి కాతినైపుణం॥ ౯౪॥

న్యాసః. జ్యాః ౪౨, ౮౨, ౧౨౦, ౧౫౪, ౧౮౪, ౨౦౮, ౨౨౬, ౨౩౬, ౨౪౦ సపవాపవర్తితపరిధిః ౧౮ అతోజ్ఞాతాని ధనూంషి ౧, ౨, ౩, ౪, ౫, ౬, ౭, ౮, ౯ ఏతాని పరిధ్యష్టాదశాంశేన గుణితాని వాస్తవాని స్స్యుః

ఇతి క్షేత్రవ్యవహారః.

తా॥ ఓగాణితికుడా ! చాపజ్యాగణితమునందు నీకు మంచినైపుణ్యము న్నచో పూర్వమందు చెప్పబడిన పూర్ణజ్యాలు గలవో వాటివలన వాటియొక్క ధనుఃప్రమాణములను ఇపుడు చెప్పుము.

పూర్ణజ్యాలు 42, 82, 120, 154, 184, 208, 226, 236, 240 ఆ అపవర్తితపరిధి 18 వ్యాసము 240. ప్రథమచాపమును గూర్చి గణితము చూపబడుచున్నది. వ్యాసము 240ను 4చే గుణింప 960 ఇందు జ్యా 42ను కలుప 1002 దీనిచే జ్యాచతుర్థాంశము $\frac{21}{2}$ చేతను 5చేతను గుణింపబడిన పరిధివర్గము ($324 \times \frac{21}{2} \times 5 = 162 \times 21 \times 5 = 17010$)ను భాగింప స్వల్పాంతరముగ లబ్ధము 17 దీనిని పరిధివర్గముయొక్క నాలవవంతులో తీసివేయ $81 - 17 = 64$ దీనియొక్క మూలము 8ను పరిధ్యర్ధము 9 వలన వ్యవకలింప 1 చాపమగుచున్నది. ఇట్లు రెండవది మొదలగు చాపములును వచ్చును.

187. ప్ర. కొన్ని విశేషసూత్రములును వ్రాయబడుచున్నవి.

(1) గోలఖండ పృష్ఠఫలానయనము (మ. మ. పం. సుధాకర నూ)

గోలస్య పరిధి ర్బాణగుణిత స్స్యా త్ఫలం ధ్రువమ్।
గోలఖండజ పృష్ఠస్య తజ్జిజ్ఞానో రతిస్ఫుటమ్॥ ౧॥

తా॥ గోలఖండముయొక్క క్రింది వృత్త వ్యాసము అనగా పూర్ణజ్యా, ఖండముయొక్క శీర్షబిందువునుండి క్రిందివరకు దళసరి శరము, ఇవి తెలిసినచో గోలపరిధిని, (183 ప్ర)చే వ్యాసమానమును తెలిసికొని దానిచే తెలియవచ్చును. ఆపరిధిని శరముచే గుణింప గోల ఖండ పృష్ఠఫల మగును.

ఉపపత్తి: త్రిజ్యచే గోలార్ధపృష్ఠఫలము అగుచో శరము (ఉత్క్రమజ్యా)చే నెంత యగును? ఈత్రైరాశికముచే $\frac{\text{ప} \times \text{వ్యా} \times \text{శ}}{2 \times \text{త్రి}} = \frac{\text{ప} \times \text{త్రి} \times \text{శ}}{\text{త్రి}} = \text{ప} \times \text{శ}$ అగుచున్నది.

(2) వలయాకారమగు గోలఖండముయొక్క పృష్ఠఫలము.

వ్యాసార్ధవర్గాంతరముచ్ఛ్రయేణ హృతం యుతం తద్దలవర్గయుక్తాత్।
మూలం ముఖవ్యాసదలస్యవర్గాత్; ఫలార్ధహీనం ముఖవిస్తృతే శ్శరః॥ ౨॥

ఉచ్ఛ్రయగుణితో గోలోద్భవపరిధి స్స్యా చ్ఛ పృష్ఠఫల మత్ర।
వలయే వప్రే వ్యాసో మధ్యాంతరచాపగుణిత స్తు॥ ౩॥

తా॥ ఒకగోలార్ధమును వలయాకారముగల 3ఖండము లగునట్లు రెండుప్రదేశములందు ఛేదింప నగు ఖండములలో మధ్యనున్నదియగు వలయాకారఖండముయొక్క పృష్ఠఫలము నెరుంగుట. అందును ముఖమునుండి గోలశీర్షబిందువువరకు నంతరమగు ముఖశరము నెరుంగుటయును చెప్పబడినవి. ఆవలయఖండమునందు పెద్దవృత్తము భూవృత్తము. చిన్నవృత్తము ముఖవృత్తము. అట్టుంచినఖండము యొక్క ఎత్తు ఉచ్ఛ్రయము. భూవృత్తముయొక్కయు, ముఖవృత్తముయొక్కయు వ్యాసార్ధములయొక్క వర్గాంతరమును ఉచ్ఛ్రయముచే భాగించి ఉచ్ఛ్రయమును ఆలబ్ధముతో కలుపవలయును ఇదిఫలము. ఈఫలార్ధముయొక్క వర్గమును ముఖవృత్తవ్యాసార్ధవర్గముతో కలిపి మూలింప నగు సంఖ్యవలన ఫలార్ధమును వ్యవకలింప ముఖవ్యాసార్ధముయొక్క శర మగును.

(2) గోలపరిధిని ఉచ్ఛ్రయముచే గుణింప ఆవలయఖండపృష్ఠఫలము.

(3) ఉసిరిక కాయయందు తొనకును తొనకును మధ్యయందు రేఖలు కానుపించును. ఆరెండు రేఖలయొక్క మధ్యప్రదేశము (ఒకతొనయొక్క పైభాగము) వప్రమని చెప్పబడును. అట్టి వప్ర ప్రదేశముయొక్క మధ్యయందు అడ్డముగనున్న చాపరూప మగు అంతరముచే గోలవ్యాసమును గుణింప వప్రక్షేత్రఫలమగును.

ముఖవ్యాసార్ధ = ముఖ్యాద, భూవ్యాసార్ధము = భూవ్యాద, ముఖశర = శ. ఉచ్ఛ్రయ = ఉ (183 ప్ర. చే) గోలవ్యాసము.

$$\text{గోవ్యా} = \frac{\text{మువ్యాద}^2}{\text{శ}} + \text{శ} = \frac{\text{భూవ్యాద}^2}{\text{ఉ} + \text{శ}} + \text{ఉ} + \text{శ}$$

$$\therefore \frac{\text{మువ్యాద}^2}{\text{శ}} = \frac{\text{భూవ్యాద}^2}{\text{ఉ} + \text{శ}} + \text{ఉ}$$

$$\therefore \text{ఉ}.\text{మువ్యాద}^2 + \text{శ}.\text{మువ్యాద}^2 = \text{శ}.\text{భూవ్యాద}^2 + \text{శ}^2.\text{ఉ} + \text{ఉ}^2.\text{శ}$$

$$\text{ఉ}.\text{మువ్యాద}^2 = \text{శ}^2.\text{ఉ} + \text{శ} (\text{భూవ్యాద}^2 - \text{మువ్యాద}^2 + \text{ఉ}^2)$$

$$\text{మువ్యాద}^2 = \text{శ}^2 + \text{శ} \times \left(\frac{\text{భూవ్యాద}^2 - \text{మువ్యాద}^2}{\text{ఉ}} + \text{ఉ} \right)$$

ఇచట $\frac{\text{భూవ్యాద}^2 - \text{మువ్యాద}^2}{\text{ఉ}} + \text{ఉ} = \frac{\text{వ్యాసార్ధవర్గాంతర}}{\text{ఉ}} + \text{ఉ} = \text{ఫల}$

$\therefore$ $\text{మువ్యాప}^2 = \text{శ}^2 + \text{శ}.\text{ఫ}$ పక్షద్వయమందు $\left(\frac{\text{ఫ}}{2}\right)^2$ కలుప

$$\text{మువ్యాద}^2 + \left(\frac{\text{ఫ}}{2}\right)^2 = \text{శ}^2 + \text{శ}.\text{ప} + \left(\frac{\text{ఫ}}{2}\right)^2$$

$$\sqrt{\text{మువ్యాద}^2 + \left(\frac{\text{ఫ}}{2}\right)^2} = \text{శ} + \frac{\text{ఫ}}{2} \quad \therefore \quad \text{శ} = \sqrt{\text{మువ్యాద}^2 + \left(\frac{\text{ఫ}}{2}\right)^2} - \frac{\text{ఫ}}{2}$$

ఇట్లు ముఖశరానయన ముపపన్న మగుచున్నది.

(2) పై గోలఖండ పృష్ఠఫలానయనముచే

$\text{వ్యా} \times (\text{ఉ} + \text{శ}) - (\text{వ్యా} \times \text{శ}) = \text{వ్యా} \times \text{ఉ}$, అగుచున్నది.

ముఖవృత్తముచే నైన పైఖండముయొక్క ఫలము వ్యవకలింపబడినది

(3) పరిధిచాపమునందు $\text{ప} \times \text{వ్యా}$, ఫలమగుచో పప్రిచాపమందెంత ?

ఈ త్రైరాశికముచే $\frac{\text{ప} \times \text{వ్యా} \times \text{పచా}}{\text{ప}} = \text{వ్యా} \times \text{పచా}$ అగుచున్నది.

అభ్యాసము కొరకు ప్రశ్నములు.

(1) ఒకభూమి తూర్పున 756 లింకులు గలదు. దక్షిణమున 800 పశ్చిమమున 600 ఉత్తరమున 900 లింకులున్ను గలదు. ఆభూమియందు ఆగ్నేయమూలనుంచి వాయవ్యమూలవరకు కర్ణము 1080 లింకులు గలది. అందలిచతుర మెంత? ఎన్నిఎకరముల ఎన్నిసెంట్లు ఉండును?

(2) ఒక పంచభుజలుగల భూమియందు తూర్పు800 దక్షిణమున ఒకభుజ 450 రెండవభుజ500 పశ్చిమమున 700 ఉత్తరము 900, లింకులు. ఆగ్నేయపుమూలనుండి నిరృతిమూలకు కర్ణరేఖ 1100 లింకులు అటనుండి ఈశాన్యపుమూలకు కర్ణరేఖ 1200 లింకులు ఆభూమి యెంతయుండును ?

(3) 500 లింకులు చుట్టుకొలతగల వృత్తరూపమగు భూమికి వ్యాసమెంత? చతుర మెంత ?

(4) 200 లింకులు వ్యాసముగల వృత్తాకారభూమికి పరిధియెంత? చతుర మెంత ?

(5) 25000 మైళ్లు భూగోలముయొక్క చుట్టుకొలతయగుచో వ్యాసమెంత యుండును? పృష్ఠఫల మెంత? ఘనఫల మెంత ?

(6) వ్యాసము 6872 ప్రమాణముగల వృత్తమునందు 960 చాపమునందు పూర్ణజ్య ఎంత యుండును?

(7) 11 అంగుళములు వ్యాసముకల గోలమునందు 20 అంగుళములు పరిధి ప్రమాణముగల ఖండమును చేసినచో ఆఖండమునందు శీర్షబిందువునుండి ఖండిత వృత్తమువరకునైన ఎత్తు(శరము) ఎంత?

(8) భూమి 120 ముఖము50 ఒకభుజ78 రెండవభుజ 104 ఒకకర్ణము 112 రెండవకర్ణము 126 ఇట్టిక్షేత్రమునందు లంబములు, సూచీక్షేత్రలంబము, కర్ణయోగమునుండి లంబము, వంశములు, కర్ణలంబములయోగములనుండి వాటిఖండములు, చతుర్భుజఫలము, వీటిని చెప్పుము.

ఇది క్షేత్ర వ్యవహారము 15వ ప్రకరణము.

ఖాతవ్యవహారము.

16వ ప్రకరణము.

అథ ఖాతవ్యవహారే కరణసూత్రం సార్ధార్యా.

గణయిత్వా విస్తారం బహుషు స్థానేషు తద్యుతి ర్భాజ్యా॥ ౧౧౬॥

స్థానకమిత్యా సమమితి రేవం దైర్ఘ్యేచ వేధేచ॥
క్షేత్రఫలం వేధగుణం ఖాతే ఘనహస్తసంఖ్యా స్యాత్॥ ౧౧౭॥

టీ॥ విస్తారం = వెడల్పును, బహుషు = అనేకములైన, స్థానేషు = స్థానములందు, గణయిత్వా = కొలచి. తద్యుతిః = వాటియోగము, స్థానకమిత్యా= ఎన్నిస్థానములందుకొలవబడెనో ఆస్థానములసంఖ్యచే, భాజ్యా = భాగింపదగి

నది. సమమితిః = సమమగువిస్తారప్రమాణము (అగును.) ఏవం = ఈప్రకారము, దైర్ఘ్యేచ = పొడవునందును, వేధేచ = లోతునందును (సమమితియగును)

క్షేత్రఫలం = క్షేత్రఫలము, వేధగుణం = వేధచేగుణింపబడినదై, ఖాతే = ఖాతమందు, ఘనహస్తసంఖ్యా = ఘనహస్తములసంఖ్య, స్యాత్ = అగును.

188. ప్ర. (1) ఖాతమన త్రవ్వబడిన ప్రదేశము. ఆ త్రవ్వినప్రదేశము అడుగునుండి పైవరకును ఒకేవిధముగ నున్నచో (వెడల్పు, పొడవులు సమముగ నున్నచో) ఆక్షేత్రఫలమును లోతు (వేధ)చే గుణింప ఘనఫలమగును.

(2) అట్లుగాక ఆవిస్తార దైర్ఘ్యములు క్రింది భాగమందు తక్కువగను మధ్యమధ్యను పైభాగమునను క్రమముగ హెచ్చుగను నున్నచో ఆఖాతమునందు ఘనఫలము నెరుంగుపద్ధతి చెప్పబడుచున్నది.

(3) ఎక్కువతక్కువలు ఎన్నిస్థానములందు గలవో అన్నిస్థానములందును వెడల్పునున్ను పొడవునున్ను వేరుగ గణింపుము. అన్ని వెడల్పులను అన్నిపొడవులను వేర్వేర కలుపుము. ఆస్థానములసంఖ్యచే ఆమొత్తములను భాగింపుము. అవి సమమితు లగుచున్నవి. సమకర్ణఖాతములు కొనిచో కర్ణములనున్ను కలిపి స్థానసంఖ్యచే భాగింపుము. అపుడు క్షేత్రఫలమును సాధింపుము

(4) ఆక్షేత్రఫలమును వేధచే గుణింపుము ఘనఫల మగును.

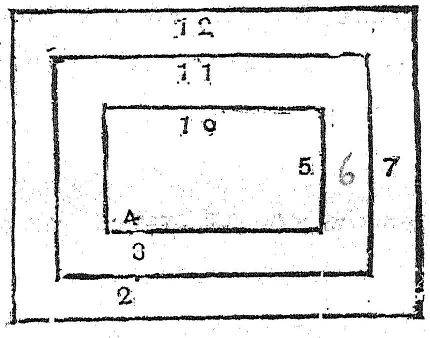
(5) ఆవేధలు 2, 3 విధములుగ నున్నచో వాటియొక్కయు యోగమును స్థానసంఖ్యచే భాగించి దానిచే గుణింపుము. అది ఘనఫలము.

ఉదాహరణమ్

భుజవక్రతయా దైర్ఘ్యం దశేశార్క కరైర్మితం।
త్రిషు స్థానేషు షట్పంచ సప్త హస్తా చ విస్తృతిః॥ ౯౫॥
యస్య ఖాతస్య వేధోపి ద్వి చతు స్త్రి కర స్సఖే।
తత్ర ఖాతే కియన్త స్స్యు ర్ఘనహస్తాః ప్రచక్ష్వ మే॥ ౯౬॥

న్యాసః. అత్రసమమితికరణేన విస్తారే:హస్తాః౬ దైర్ఘ్యే౧౧ వేధేచ3 లబ్ధా ఘనహస్తసంఖ్యా౧౯౮

తా॥ ఒకానొకఖాతము సమానములగు భుజలుకలది కాకపోవుటచే దైర్ఘ్యవిస్తారములు ఒకవిధముగ నైనవి కావు. అట్టి ఖాతమునందు క్రిందిభాగమున పొడవు 10 హస్తములు, మధ్యయందు 11హస్తములు, పైభాగమున 12హస్తములు అట్లు వెడలుపు క్రిందిభాగమున 5హస్తములు, మధ్యయందు 6హస్తములు, పైభాగమునందు 7 హస్తములును గలిగియున్నది. లోతైనను ఒకచో 2హస్తములు మరియొకచో 3 హస్తములు మరియు నొకచో 4హస్తములును గలదు. ఆఖాతక్షేత్రమునందు ఘనహస్తము లెన్నియగును? చెప్పుము.



పొడవులను 3స్థానములందు కొలచి కలుప 10+11+12 = 33 స్థానసంఖ్య 3చే భాగింప 11 ఇట్లు వెడల్పులను కలుప 5+6+7 = 18 దీనినిన్ని స్థానసంఖ్య 3చే భాగింప 6 ఇట్లు వేధలనున్ను కలుప 4+3+2 = 9 స్థానసంఖ్యచే భాగింప 3 ఇది ఆయతరూప ఖాతము కావున క్షేత్రఫలము 6 × 11 =66 అగుచున్నది. దీనిని వేధసమమానము 3చే గుణింప 198 ఘనఫలమగుచున్నది.

ఉపపత్తి. వైషమ్యములగు సంఖ్యలనన్నిటిని కలిపి సంఖ్యల సంఖ్యచే భాగింప మధ్యమమాన మగుననుట ప్రసిద్ధము. అట్లు మధ్యమమానముచే దైర్ఘ్యవిస్తారములును వేధయును తేబడి వాటిచే ఫలము తేబడినది.

ఖాతాంతరే కరణసూత్రం సార్థవృత్తం.

ముఖజ తలజ తద్యుతిజ క్షేత్రఫలైక్యం హృతం షడ్భిః।
క్షేత్రఫలం సమ మేత ద్వేధహతం ఘనఫలం స్పష్టం॥ ౧౧౮॥
సమఖాతఫలత్ర్యంశః సూచీఖాతే ఫలం భవతి॥

టీ॥ ముఖజ తలజ తద్యుతిజ క్షేత్రఫలైక్యం = ముఖభాగమందైనట్టియు క్రిందిభాగమందైనట్టియు వాటియోగమువలననైనట్టియు క్షేత్రఫలముల యోగము

షడ్భిః = 6చే, హృతం = భాగింపబడినదై, సమం = సమమగు, క్షేత్రఫలం = క్షేత్రఫలము (అగును). ఏతత్ = ఈక్షేత్రఫలము, వేధహతం = వేధచేగుణింపబడినదై, స్ఫుటం = స్ఫుటమైన, ఘనఫలం = ఘనఫలము అగును.

సమఖాతఫలత్ర్యంశః = సమఖాతముయొక్క ఘనఫలములోని 3వ వంతు సూచీఖాతే = సూచీఖాతమునందు, ఫలం = ఫలము, భవతి = అగుచున్నది.

189. ప్ర. ఏఖాతమునందు విస్తారదైర్ఘ్యములు పైనుండి క్రిందికి క్రమముగ తగ్గియున్నవో అట్టిఖాతమునందలి ఘనఫలము నెరుంగుపద్ధతి.

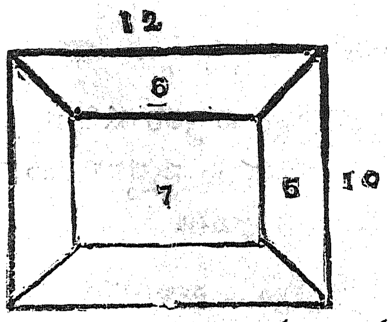
(1) మొదట ముఖభాగమందలి విస్తారదైర్ఘ్యములవలన క్షేత్రఫలమును గనుగొనుము. అట్లు క్రింది (అడుగు)భాగమందలి క్షేత్రఫలమును గనుగొనుము. పిమ్మట ముఖవిస్తారమును క్రింది విస్తారమును గలిపి విస్తారముగను ముఖదైర్ఘ్యమును క్రిందిభాగమునందలి పొడవును కలిపి దైర్ఘ్యముగను కల్పించి దానిచే క్షేత్రఫలము నరయుము.

(2) ఆమూడువిధములగు క్షేత్రఫలములను గలిపి 6చే భాగింప సమమగు క్షేత్రఫల మగును. ఆక్షేత్రఫలమును వేధచే గుణింప ఘనఫలము.

(3) సూచీభాగమునందు సమఖాతమునందైన ఘనఫలమును 3చే భాగింప ఘనఫలమగును.

ఉదాహరణమ్

ముఖే దశద్వాదశహస్తతుల్యం విస్తారదైర్ఘ్యంతు తలే తదర్ధం।
యస్యాస్సఖే సప్తకరశ్చ వేధః కాఖాతసంఖ్యావదతత్రవాప్యాం॥౮౭॥



తా॥ మిత్రమా! ముఖభాగమందు వెడల్పు 10హస్తములు పొడవు 12హస్తములు. తలప్రదేశమందు వెడల్పు 5హస్తములు హ 6 లు పొడవు. లోతు (వేధ) 7 హస్తములు. ఆవాపియందు ఖాతఫల మెంత? (ఘనహస్తములెన్ని?)

న్యాసః. జాతగ ఖాతఫలం ఘనహస్తాః ౪౯౦

ముఖభాగమందలి క్షేత్రఫలము $10 \times 12 = 120$ తలప్రదేశమందలి క్షేత్రఫలము $6 \times 5 = 30$ యోగక్షేత్రఫలము $(6+12) \times (10+5) = 270$ మూటియొక్కయు యోగము $270+120+30 = 420$ దీనిని 6చే భాగింప 70 సమక్షేత్రఫలము. దీనిని వేధ7చే గుణింప $70 \times 7 = 490$ ఖాతమునందలి ఘనఫల మగుచున్నది.

ద్వితీయోదాహరణమ్

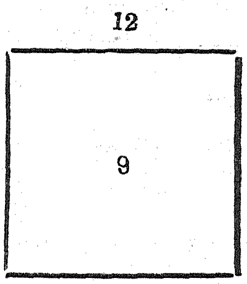
ఖాతే థ తిగ్మకర౧౨ తుల్యచతుర్భుజే చ కిం స్యాత్ఫలం నవమితః౯ ఖలు।యత్ర వేధః। వృత్తే తథైవ దశవిస్తృతిపంచవేధే సూచీఫలం వద తయోశ్చ పృథక్పృథఙ్మే॥ ౯౮॥

తా॥ (1) ఒకఖాతమునందు నాలుగుభుజలును సమముగ 12 పరిమాణములుగలవి వేధ 9 యగుచున్నది. ఆఖాతమందు ఘనఫల మెంత ?

(2) 10 వ్యాసముగల వృత్తఖాతమందు 5 వేధ; అందలి ఫలమెంత ?

(3) పైరెండు క్షేత్రములందును సూచీఫల మెంతయగును? అనగా ముఖభాగమందు చెప్పబడిన పరిమాణములు గలిగి క్రమముగ సన్నగించి వేధమితదూరమునందు సూచ్యాకారము ఏర్పడినచో ఘనఫల మెంత యగును?

న్యాసః. భుజః౧౨ వేధః౯ జాతం యథోక్తకరణేన ఖాతఫలం ఘనహస్తాః ౧౨౯౬ సూచీఫలం ౪౩౨.

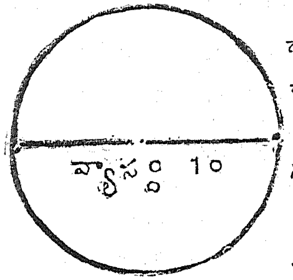


భుజ 12 వేధ 9 భుజవర్గము 144 ను వేధ 9చే గుణింప 1296 సమఖాతఘనఫలము. దీనిని 3చే భాగింప 432 సూచీఖాతఫలము.

వృత్తఖాత దర్శనాయ న్యాసః. వృత్తవ్యాసః ౧౦ పంచవేధే త్ర సూక్ష్మఫలం $\frac{౩౯౨౭}{౧౦}$

సూచీఫలం $\frac{౧౩౦౯}{౧౦}$ ॥ స్థూలంఫలంవా $\frac{౨౭౫౦}{౭}$ సూచీఫలంస్థూలంవా $\frac{౨౭౫౦}{౨౧}$

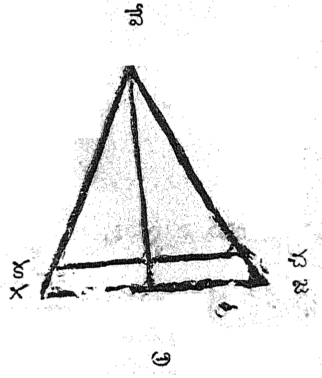
ఇతి ఖాత వ్యవహారః.



ఈవృత్తఖాతమునందు క్షేత్రఫలమునకు పరిధ్యానయనము వ్యాసము 10ను 22చే గుణించి 7చే భాగింప $\frac{220}{7}$ ఇది స్థూలపరిధి. దీనిని వ్యాసము 10 చే గుణించి 4చే భాగింప $\frac{220 \times 10}{7 \times 4} = \frac{550}{7}$ ఈవృత్తక్షేత్రఫలమును వేధనే గుణింప $\frac{550 \times 5}{7} = \frac{2750}{7}$ సమఖాతఫలము. దీనిని 3చే భాగింప $\frac{2750}{7 \times 3} = \frac{2750}{21}$ సూచీఖాతఫలము. ఇదిస్థూలము.

ఇట్లు సూక్ష్మపరిధిని గ్రహించినచో సమఖాతఫలము $\frac{3927}{10}$ సూచీఫలము $\frac{1309}{10}$యును అగుచున్నది.

ఉపపత్తి: పైప్రదేశమునుండి క్రిందికిపోయినకొలదిని క్రమక్రమముగ భుజపరిమాణములు (లేక విస్తీర్ణము) తగ్గునట్లు త్రవ్వబడిన ఖాతము తుదకు సూచి (సూది)వలె విస్తీర్ణములేక యున్నచో నది సూచీఖాతము. అట్లు కాక పైభాగముకంటె క్రిందిభాగమునందు భుజములు తగ్గుటచే అల్పవిస్తీర్ణము గలిగి యున్నచో నది సూచీఖాతముయొక్క ఖండమగు ఖాత మగుచున్నది. ఖాతము



లందు సూచీముఖము క్రిందుగ నుండును ఇచట సూచీముఖము ఊర్ధ్వముగనుండునట్లు తలక్రిందుగ చూపబడినది. కావున ఇందు వే=ముఖము అగుచో 'గజ' తల మగును. వేగజ సూచీఖాతమగును. కగజచ సూచీఖండ మగుచున్నది. వేఅ = లంబము సూచీఖాతమందలి వేధ యగుచున్నది. సూచీఖండమందు కచ, గజ రేఖలయొక్క మధ్యనున్న 'వేఅ' లంబముయొక్క ఖండము వేధ యగును. ఇందు కచ = ముఖము గజ = తలము. ఈసూచీఖండముయొక్క ముఖభుజలున్ను తలమందలి భుజలున్ను ప్రత్యేకము సమములగుచో ముఖభుజవర్గము ముఖఫలమున్ను తలభుజ

వర్గము 'తల'ఫలమున్ను అగును. అట్లుగాక ఆయతములగుచో భుజకోటిఘాతములు ఫలము లగుచున్నవి. భుజకోటిఘాతమున్ను భుజవర్గమున్ను సమములుకాకపోవుటచే భుజవర్గమును ఒకానొకగుణకముచే గుణించినచో భుజకోటిఘాతముతో సమమగును. అట్టిగుణక మేది యగునో ఆగుణకము = గు అనుకొనుచో భు × కో = $భు^2$.గు అగును. కావున ఆయతమందు ఫలము = $భు^2$.గు అనుకొనవచ్చును. ముఖక్షేత్ర తలక్షేత్రములు ప్రత్యేకము వర్గక్షేత్రములగుచో తత్తద్భుజవర్గములే ఆయాక్షేత్రముల ఫలము లగును.

పైసూచీఖండమును అడ్డముగ ఛేదించి అనేకఖండములుగ చేసితి మనుకొనుము. అపుడు ఆయాఖండము లందలి ప్రత్యేక తలముఖక్షేత్రములు విశిష్ట సూచీఖండముయొక్క తలముఖక్షేత్రములతో సమానాంతరములు గావలయును. అన్నిటియొక్కయు వేధలు (దళసరి) సమముగా నుండవలయును. అట్టిఖండముల తలక్షేత్రములన్నియు సజాతీయములుగనే యుండును. మొత్తము వేధను ఖండసంఖ్యచే భాగింప నగు లబ్ధము ప్రత్యేకఖండముయొక్క వేధ యగుచున్నది అట్టి ప్రత్యేకఖండవేధ = అ, అనుకొనుము. అపుడు ఖండసంఖ్య $= \frac{వే}{అ}$ అగును. ప్రత్యేకవేధ (అ) ఎంత స్వల్పమగునో అంతగ ఆయాఖండముల ముఖతలక్షేత్రఫలములు సమానప్రాయము లగుచున్నవి. అట్టిక్షేత్రఫలములను ప్రత్యేకఖండవేధ (అ)చే గుణింప ప్రత్యేక ఘనఫలములగును. అన్నిటియొక్కయు యోగము సూచీఖండఫల మగును.

కావున ఆయాఖండముల తల భుజప్రమాణముల సాధింపవలయును.

ముఖభుజ = ము, తలభుజ = త, వీటియంతరము (త — ము) అగుచున్నది. వేధమితదూరమునందు ఈ(త — ము) అంతర మగుచో (అ) మితమగు వేధయందును అంతరమెంత? ఈత్రైరాశికముచే $\frac{(త — ము) అ}{వే}$ = వచ్చులబ్ధమును ముఖభుజ = (ము) యందు కలుప ప్రథమఖండ తలభుజ యగును. ఇట్లు ద్వితీయఖండవేధ (అ2)చే $\frac{(త — ము)\ అ2}{వే}$ ఇట్లు త్రైరాశిక మగుచున్నది. అన్నిత్రైరాశిక

ములవలనను వచ్చులబ్ధములు క్రమముగ ఏకద్వ్యాదిగుణితమగు ప్రథమత్రైరాశిక ఫలము లగుచున్నవి. కావున

$\frac{(\text{త} - \text{ము})\,\text{అ}}{\text{వే}} =$ ఫ అనుకొనుచో ఫ, 2ఫ, 3ఫ, 4ఫ ..... $\frac{\text{వే}}{\text{అ}}$.ఫ అగుచున్నవి.

వీటిని ముఖభుజతో గలుప (ము + ఫ), (ము + 2ఫ), (ము + 3ఫ)...... ఆయా ఖండ భుజలగుచున్నవి. ఆయాఖండముల క్షేత్రములు వర్గక్షేత్రములగుచో ఆయాభుజవర్గములే క్షేత్రఫలములు కావున

క్షేత్రఫలములు $= (\text{ము}+\text{ఫ})^2,\ (\text{ము}+2\text{ఫ})^2,\ (\text{ము}+3\text{ఫ})^2$, ఇత్యాది.........

$= \text{ము}^2 + 2\text{ముఫ} + \text{ఫ}^2$
$\text{ము}^2 + 4\text{ముఫ} + \text{ఫ}^2 4$
$\text{ము}^2 + 6\text{ముఫ} + \text{ఫ}^2 9$
ఇత్యాది.

వీటిని ప్రత్యేకవేధచే గుణింప ప్రత్యేక ఖాతఫలములు. అన్నిటియొక్కయు యోగము విశిష్టఖాతఫలము కావున అన్నిటిని కలిపి ప్రత్యేకవేధ(అ) ప్రమాణముచే గుణించినను విశిష్టఖాత ఫలమగుచున్నది. కావున వీటియోగము చేయవలయును. అన్నిటియందును ము² గలదు. వీటినన్నిటిని గలుప $\frac{\text{ము}^2 \times \text{వే}}{\text{అ}}$ అగుచున్నది. ఇట్లు వర్గములందలి రెండవ ఖండములను కలుప $(2\,\text{ము}.\text{ఫ}) + (4\,\text{ము}.\text{ఫ}) + (6\text{ము}.\text{ఫ}) \ldots\ldots = 2\,\text{ము}.\text{ఫ} \times \left(1+2+3+4+\ldots\frac{\text{వే}}{\text{అ}}\right) = \text{ము}.\text{ఫ}.\frac{(\text{వే}+\text{అ})\text{వే}}{\text{అ}^2}$ (136 ప్ర 1 విధి చూ) అట్లు

3వ ఖండముల కలుప$(\text{ఫ}^2 + \text{ఫ}^2 4 + \text{ఫ}^2 9$ ఇత్యా$) = \text{ఫ}^2.\frac{(\text{వే}^2 2 + \text{వే}.\text{అ}3 + \text{అ}^2)\text{వే}}{\text{అ}^3 6}$

(చూ 137 ప్ర. 1) $\therefore \left\{(\text{ము}+\text{ఫ})^2 + (\text{ము}+2\text{ఫ})^2 + (\text{ము}+3\text{ఫ})^2 + \ldots\right\}$

$= \frac{\text{ము}^2.\text{వే}}{\text{అ}} + \text{ము}.\ \text{ఫ}.\frac{(\text{వే}+\text{అ})\text{వే}}{\text{అ}^2} + \text{ఫ}2.\frac{(\text{వే}^2 2 + \text{వే}\text{అ}3 + \text{అ}^2)\text{వే}}{6\text{అ}^3}$ ఈ క్షేత్రఫల ములయోగమును ప్రత్యేకఖండవేధ (అ)చే గుణింప ఖాతఫః యోగము

$= \text{ము}^2.\ \text{వే} + \frac{\text{ము}.\text{ఫ}(\text{వే}+\text{అ})\text{వే}}{\text{అ}} + \frac{\text{ఫ}^2(2\text{వే}^2 + 3\text{వే}.\text{అ} + \text{అ}^2)\text{వే}}{6\text{అ}^2} =$ ఖా ఫ యో

$\because \text{ఫ} = \frac{(\text{త} - \text{ము})\text{అ}}{\text{వే}} \quad \therefore \text{ఫ}^2 = \frac{(\text{త}-\text{ము})^2\text{అ}2}{\text{వే}2}$ ∴ ఖాఫయో

$= \text{ము}2\ \text{వే} + \text{ము}(\text{వే}+\text{అ})\ (\text{త}-\text{ము}) + \frac{(\text{త}-\text{ము})^2}{} \frac{\times (2\text{వే}2 + 3\text{వేఅ} + \text{అ}^2)}{\text{వే}6}$

$= \text{ము}^2.\text{వే} + \text{ము}(\text{వే}+\text{అ})\ (\text{త}-\text{ము}) + (\text{త}-\text{ము})^2 \times \left\{\frac{2\text{వే} + 3\text{అ} + \frac{\text{అ}^2}{\text{వే}}}{6}\right\}$

ఇచట ప్రత్యేకఖండవేధప్రమాణ మల్ప మైనకొలదిని ఫలము సూక్ష్మమగు చున్నది కావున అ = 0 అనుకొనుచో $\left(3\ \text{అ} + \frac{\text{అ}^2}{\text{వే}}\right) = 0$

$\therefore \text{ము}^2.\text{వే} + (\text{త}-\text{ము})\ \text{ము}.\text{వే} + \frac{(\text{త}-\text{ము})^2\text{వే}1}{3} =$ ఖాతఘనఫల

$= \left\{\text{ము}^2 + \text{ముత} - \text{ము}^2 + \frac{\text{త}^2 + \text{ము}^2 - 2\text{ముత}}{3}\right\}\text{వే} = (\text{త}^2 + \text{ము}^2 + \text{ముత})\frac{\text{వే}}{3}$

$= (2\text{త}^2 + 2\text{ము}^2 + 2\text{ముత})\frac{\text{వే}}{6} = \left\{\text{త}^2 + \text{ము}^2 + (\text{త}+\text{ము})^2\right\}\frac{\text{వే}}{6}$

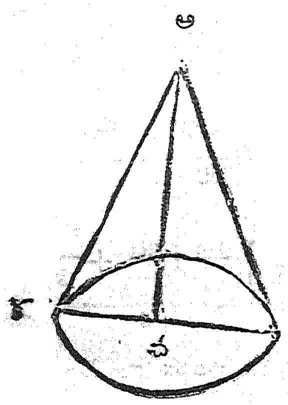
పూర్వము త² = తలక్షేత్రఫల, ము² = ముఖక్షేత్రఫల అని గ్రహింపబడెను.
వర్గక్షేత్రమునందు త² = తలక్షేత్ర భుజవర్గ = తలక్షేత్రఫల.
ఆయతక్షేత్రమునందు త² = తలక్షేత్రభుజవర్గ × గుణక = తలక్షేత్రఫల
అట్లు ము² = ముఖక్షేత్రఫల అనుకొనుచో పైగణితప్రకారము

$\left\{\text{త}^2 + \text{ము}^2 + (\text{త}+\text{ము})2\right\}$ గు $\times \frac{\text{వే}}{6}$ అగుచున్నది.

ఇట్లు సూచీఖండఖాతఫలానయనమగు పైపద్ధతిలోని 1,2 భాగములు ఉపపన్నము లగుచున్నవి. పైసమీకరణమునందు ము = 0 అనుకొనుచో

$\left\{\text{త}^2 + \text{ము} + (\text{త}^2 + \text{ము})2\right\} \times \frac{\text{వే}}{6} = \frac{2\text{త}^2 \times \text{వే}}{6} = \frac{\text{త}^2 \times \text{వే}}{3} = \frac{\text{క్షేత్రఫల} \times \text{వేధ}}{3}$

ఇట్లు సూచీఖాతఫలానయనము ఉపపన్నమగుచున్నది.



ఇచట త^2 = తలక్షేత్రఫల = ఖాతమునందలి పై భాగమునకైన క్షేత్రఫలము కావున వృత్తఖాతమునందును వృత్తక్షేత్రఫలము వేధచే గుణించి 3చే భాగింప వృత్తక్షేత్రగ ఖాతఫల మగుననుట స్పష్టము.

సూచీ పృష్ఠఫలము.

190. ప్ర. జాత్యత్రిభుజమునందు కోటిని స్థిరముగ చేసి త్రిభుజక్షేత్రము నొకమారు త్రిప్పుటచే నగు సూచి సమశంకు అనియు చెప్పబడుచున్నది.

పై క్షేత్రమునందు అచక జాత్యము అచ కోటి, కచ భుజ, అక కర్ణము. అచ కోటి కదల కుండునట్లు క బిందువును త్రిప్పుటచే కచభుజ వ్యాసార్ధముగ గల వృత్తము క్రింది భాగమున ఏర్పడుచున్నది క్రమముగ సన్ననై పైభాగమున 'అ' బిందుమాత్రమే గల సూచీశంకు ఏర్పడినది. ఇట్టి సూచీక్షేత్రమునందు పృష్ఠఫలానయనమునుగూర్చి సూత్రము

వే ధాధో వ్యాస దలయో ర్వర్గయోగా త్పదేన వై।
అథోవృత్తం హతం ద్వాభ్యాం భక్తం పృష్ఠఫలం భవేత్॥ మ.మ.పం. సుధాకరులు

ఉపపత్తి: పైనచూపబడిన సూచీ శంకును సరిగ కప్పునట్టిఒక కాగితము కలదనుకొనుము దానిని భూమియందు పరచినచో ఒక త్రిభుజాకారముగల క్షేత్రము ఏర్పడుచున్నది. అక, అగ, భుజలగును. కచ వ్యాసార్ధముచే చేయబడిన వృత్తపరిధియొక్క ప్రమాణముగల రేఖ భూమి యగుచున్నది. కాని అట్టికాగితమునందు అ శీర్షబిందువునుండి భూమియగు రేఖయందు చేయబడిన ప్రతిబిందువు వరకును సగళ రేఖలను చేసినచో అన్నియు సమములు గావలయును. కావుననే ఆభూమియగు రేఖ కేవల సరలముగాక కొంచెము వక్రముగ నుండవలయును. అట్టి భూరేఖయందున్న ప్రతిబిందువువరకును అ శీర్షబిందువునుండి అనేకరేఖలను

చేయుటచే అనేకత్రిభుజములగుచున్నవి. భూరేఖయందలి పరిధియందును అనేకములగు విభాగము లగుచున్నవి. ఒక్కొక త్రిభుజమునందును పరిధియొక్క ఒక్కొక విభాగము భూమి. విభాగములు బహుళము లగుటచే సరలరేఖారూపములే యగును. లంబమున్ను భుజలున్ను సమముగనే యుండును. కావున అట్టి ప్రత్యేకత్రిభుజఫలమును సాధించి దానిని పరిధివిభాగ (లేక త్రిభుజ) సంఖ్యచే గుణింప ఆకాగితమునందలి మొత్తము క్షేత్రఫలము అగును.

పరిధిని 'బ' సంఖ్యగల ఖండములుగ చేసితి మనుకొనుచో

$\frac{\text{ప}}{\text{బ}}$ = భూమి యగుచున్నది. 'బ' సంఖ్యగల త్రిభుజము లగును.

$\therefore \frac{\text{లం} \times \text{భూ}}{2} = \frac{\text{అక} \times \text{ప}}{\text{బ} \times 2}$ దీనిని త్రిభుజసంఖ్య (బ)చే గుణింప $\frac{\text{అక} \times \text{ప}}{2}$

ఇచట $\text{అక} = \sqrt{\text{కచ}^2 + \text{అచ}^2} = \sqrt{\left(\frac{\text{వ్యా}}{2}\right)^2 + \text{వే}^2}$

$\therefore \frac{\sqrt{\left(\frac{\text{వ్యా}}{2}\right)^2 + \text{వే}^2} \times \text{ప}}{2}$ = సూచీపృష్ఠఫలము.

కావున అథోవృత్తముయొక్క వ్యాసార్ధముయొక్కయు వేధయొక్కయు వర్గయోగమూలమును అథోవృత్తముచే గుణించి 2చే భాగింప సూచీపృష్ఠఫలమగును అని చెప్పబడినది.

ఇది ఖాత వ్యవహారము 16 ప్రకరణము.

చిత్రివ్యవహారము.

17 ప్రకరణము.

చితౌకరణసూత్రంసార్ధవృత్తం.

ఉచ్ఛ్రయేణగుణితంచితేఃకిల క్షేత్రసంభవఫలంఘనంభవేత్॥ ౧౯౯॥
ఇష్టకాఘనహృతేఘనేచితే రిష్టకాపరిమితిశ్చలభ్యతే॥ [౧౨౦॥
ఇష్టకోచ్ఛ్రయహృదుచ్ఛ్రితిశ్చితేస్స్యుస్తరాశ్చదృషదాంచితేరపి॥

టీ॥ చితేః = (ఇటుకలు రాళ్ళు మొదలగువాటియొక్క పేర్చినగుట్టచితి) గుట్టయొక్క క్షేత్రసంభవఫలం = క్షేత్రఫలము, ఉచ్ఛ్రయేణ = ఎత్తుచే, గుణితం = గుణింపబడినదై, ఘనం = ఘనఫలము, భవేత్కిల = అగునుగదా! చితేః = గుట్టయొక్క, ఘనే = ఘనఫలము, ఇష్టకాఘనహృతే = ఇటుకయొక్కఘనముచే భాగింపబడినదై, ఇష్టకాపరిమితిశ్చ = ఇటుకలసంఖ్యయున్న, లభ్యతే = వచ్చుచున్నది. చితేః = గుట్టయొక్క, ఉచ్ఛ్రితిః = ఔన్నత్యము, ఇష్టకోచ్ఛ్రయహృత్ = ఇటుకయొక్క ఔన్నత్యముచే భాగింపబడినదై, స్తరాః = వరుసలు, స్యుః = అగును. దృషదాం = రాళ్ళయొక్క, చితేరపి = గుట్టయొక్కయున్న, స్తరాః = వరసలు, స్యుః = అగును.

191. ప్ర. పేర్చబడిన సమపరిమాణముగల ఇటుకలు, అట్టి చెక్కబడిన రాళ్ళు, వాటిచేనైన గుట్ట (లేక ఆమ) యొక్క ఘనపరిమాణమును తెలిసికొని దానిచే ఆ ఆమయందు ఎన్నివరసలున్నదియు ఎన్ని ఇటుక లున్నదియు చెప్పుట.

(1) ఇటుకామయొక్క పొడవును వెడల్పును తెలిసికొని క్షేత్రఫలము గనుగొనుము.

(2) ఆక్షేత్రఫలమును ఎత్తుచే గుణింప ఘనఫలము.

(3) అట్లు ఒకఇటుకకు ప్రత్యేకఘనపరిమాణమును తెలిసికొనుము.

(4) ఒకఇటుకయొక్క ఘనపరిమాణముచే ఆమయొక్కఘనపరిమాణమును భాగించినచో ఆ ఆమయందలి ఇటుకల సంఖ్య అగును.

(5) ఒకఇటుకఎత్తుచే ఆమయొక్క ఎత్తును భాగించినచో ఆమయొక్క వరస (దొంతర)లగును.

(6) ఇట్లు రాతిగుట్టయందును చేయవలయును.

ఇది సరిగా (ఎగుడుదిగుడులేకుండునట్లు) పేర్చబడిన పెట్టెవంటి ఆమయైననే ఉపయోగించును.

ఉదాహరణమ్

అష్టాదశాంగులం దైర్ఘ్యం విస్తారో ద్వాదశాంగులః।
ఉచ్ఛ్రితి స్త్ర్యంగులా యస్యా మిష్టికా స్తా శ్చితౌ కిల॥ ౯౯॥

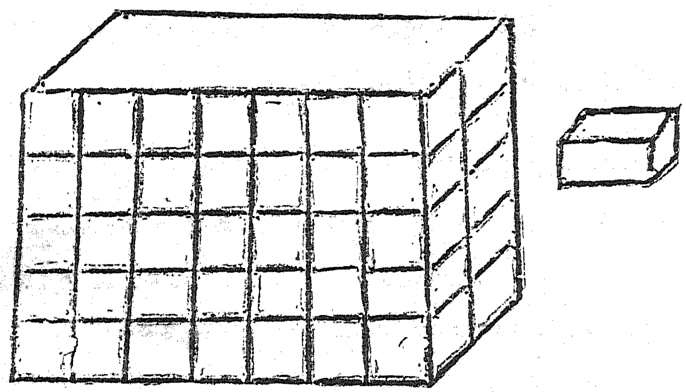
యద్విస్తృతిః పంచకరాష్టహస్తం దైర్ఘ్యంచయస్యాంత్రికరోచ్ఛ్రితిశ్చ।
తస్యాంచితౌ కింఫలమిష్టికానాంసంఖ్యాచకాబ్రూహికతిస్తరాశ్చ॥౧౦౦

తా॥ ఒకఇటుకయొక్క పొడవు 18 అంగుళములు వెడల్పు అం 12 లు ఎత్తు అం 3 లు అట్టి ఇటుకలు ఒకఆమగ పేర్చబడినవి. అదియే చితి లేక చయము.

ఆ చితియొక్క వెడల్పు 5 హస్తములు పొడవు హ 8 లు ఎత్తు హ 3 లు ఆ చితియందు ఘనఫలమెంత? ఇటుక లెన్ని? వరస లెన్ని?

న్యాసః ఇష్టకా ఘనహస్తమానం $\frac{౩}{౬౪}$ చితేః క్షేత్రఫలం ౪౦ ఘనహస్తాః ౧౨౦ లబ్ధా ఇష్టకాసంఖ్యా ౨౫౬౦ స్తరసంఖ్యా ౨౪ ఏవం పాషాణచయేపి.

ఇతి చితివ్యవహారః.



ఇటుకయొక్క కొలత అంగుళములలో నియ్యబడినది ఆమ (చయము) యొక్క కొలత హస్తములలో నియ్యబడినది, కావున రెండును ఒకజాతివి యగుటకై ఇటుకయొక్క ఘనప్రమాణమును హస్తములలోనికి మార్చవలయును. ఒకఘనహస్తమునకు ఘనాంగుళములు 13824; ఇటుకయొక్కఘనాంగుళములు $18 \times 12 \times 3 = 648$ కావున $\frac{648}{13824} = \frac{3}{64}$ ఇది ఇటుకయొక్క ఘనహస్తపరిమాణ మగుచున్నది.

చయముయొక్క ఘనహస్తములు $5 \times 8 \times 3 = 120$ దీనిని ఇష్టకాఘనపరిమాణము $\frac{3}{64}$ చే భాగింప $\frac{120}{1} \div \frac{3}{64} = \frac{120}{1} \times \frac{64}{3} = 64 \times 40 = 2560$ ఇటుకలు.

చయముయొక్క ఎత్తు హ 3 లు = 72 అంగుళములు ఇష్టకొన్నత్యాంగుళముల 3చే భాగింప $\frac{72}{3} = 24$ వరసలు అగుచున్నవి, ఇట్లు రాతిగుట్టయందును తెలియదగినది,

ఉపపత్తి: పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తు వీటిగుణనము ఘనమగుట పరిభాషచే సిద్ధమగు విషయము. వరసలును ఇటుకలును త్రైరాశికముచే తెలుసుకొనబడినవి.

ఇది చితివ్యవహారము 17 ప్రకరణము.

క్రకచవ్యవహారము.

18వ ప్రకరణము.

అథ క్రకచవ్యవహారే కరణసూత్రం

పిండయోగదలమగ్రమూలయో ర్దైర్ఘ్యసంగుణితమంగులాత్మకం।
దారుదారణపథైస్సమాహతం షట్స్వరేషువిహృతంకరాత్మకం॥

టీ॥ అగ్రమూలయోః = అగ్రమందును మొదటియందునునైన. అంగులాత్మకం = అంగుళములస్వరూపమగు. పిండయోగదలం = దళసరులయొక్క మొత్తమునసగము, దైర్ఘ్యసంగుణితం = (అంగుళాత్మకమగు) పొడవుచే గుణింపబడినదియై, దారుదారణపథైః = కట్టెయొక్క కోతయందలి మార్గములచే, సమాహతం = గుణింపబడినదియై, షట్స్వరేషువిహృతం = 576చే భాగింపబడినదై, కరాత్మకం = హస్తాత్మకమగు గణిత మగుచున్నది.

192. ప్ర. ఇంత చతురపుప్రదేశము (గజము హస్తము అడుగు మొదలగునది) నకు ఇంతచొప్పున నగు ద్రవ్యము ఇయ్యబడువట్లు నిర్ణయించి కోయబడిన రంపపుకోతలందు ఎన్నిచతురపుగజములు మొదలగునవి అయినదియు తెలిసికొను పద్ధతి చెప్పబడుచున్నది.

(1) కోయబడిన కర్రయొక్క మొదటను తుదను గల దళసరి వేరువేరుగ తెలిసికొని రెండిటిని కలిపి అర్ధింపుము. దానిని పొడవుచే గుణింపుము. ఆఫలమును కోతల సంఖ్యచే గుణింపుము.

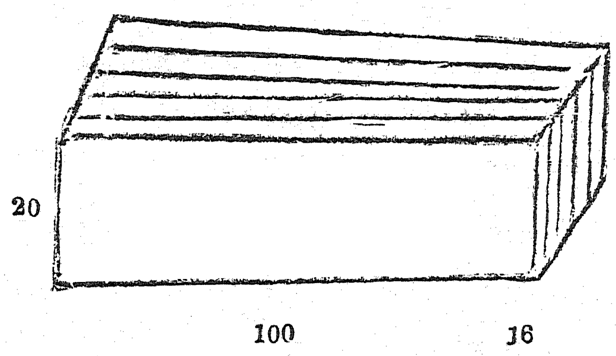
(2) దళసరియు పొడవున్ను అంగుళము లగునో పూర్వగుణనఫలమును 576చే భాగింప హస్తాత్మకమగు ఫలమగును. 144చే భాగింప అడుగులలోవచ్చును

ఉదాహరణమ్.

మూలే నఖాంగులమితో౽థ నృపాంగులో౽గ్రే పిండ శ్శతాంగులమితం కిల యస్య దైర్ఘ్యం। తద్దారుదారణపథేషు చతుర్షు కిం స్యాద్ధస్తాత్మకం వద సఖే గణితం ద్రుతం మే॥ ౧౦౧॥

తా॥ ఒకకర్రకు మొదట దళసరి 20 అంగుళములు, తుదను అం 16 లు దళసరి, పొడవు అం 100 లు ఆకర్రను పొడవుగ 4 రంపపుకోతలు కోయుచో హస్తములచే నెంత చతురమగు నదియును మిత్రమా నాకు శీఘ్రముగచెప్పుము.

న్యాసః. పిండయోగదలం ౧౮ దైర్ఘ్యేణ ౧౦౦ సంగుణితం ౧౮౦౦ మార్గ ౪ గుణితం ౭౨౦౦ షట్స్వరేషు ౫౭౬ విహృతం జాతం కరాత్మకం గణితం $\frac{౨౫}{౨}$



ఈకర్రయొక్క మొదట దళసరి అనగా ఎత్తు 20 అంగుళములు, తుదను దళసరి 16 అంగుళములు. పొడవు 100అంగుళములు. 4 కోతలు పొడవుగ కోయుచో 5 చెక్కలు కాగలవు. అట్టిపలకలు 5 ఐనను రంపముచే కోయబడినవి 4 కోతలే కావున ఆనాలుగిటియొక్కయు ఒకవైపు చతురముల మొత్తము ఈగణితముచే వచ్చుచున్నది.

మొదటిదళసరి 20 తుదిదళసరి 16 రెంటిటి యోగార్ధము $\frac{20+16}{2} = 18$ పొడవు 100చే గుణింప 1800 ఇది ఒక్కొకపలకయొక్కయు చతుర మగుచున్నది. దీనిని 4చే (కోతలసంఖ్యచే) గుణింప 7200 రంపముచే కోయబడిన అంగుళములు. హస్తముయొక్కవర్గము $24^2 = 576$చే భాగింప $\frac{7200}{576} = 12\frac{1}{2}$ చతురపుహస్తము లగుచున్నవి, ఒక్కొక చతురపుహస్తమునకు నియమితమగు ద్రవ్యమును ఈహస్తసంఖ్యచే గుణింప ఇవ్వదగిన ధనమగును.

దీనియుపపత్తి స్పష్టముగ తెలియుచున్నది.

క్రకచాంతరే కరణసూత్రం సార్ధవృత్తమ్

ఛిద్యతే తు యది తిర్యగుక్తవత్పిండ విస్తృతిహతేః ఫలం తదా॥

టీ॥ తిర్యక్ = అడ్డముగా, ఛిద్యతేయది = కోయబడినచో, తదా = అప్పుడు, ఉక్తవత్ = చెప్పబడినప్రకారము, పిండవిస్తృతిహతేః = దళసరియొక్కయు వెడల్పుయొక్కయు గుణనమువలన, ఫలం = ఫలమగును,

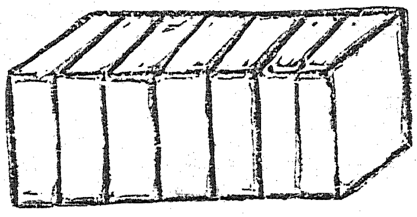
193. ప్ర. అట్లు పొడవుగకోయక అడ్డముగ రంపపుకోతలగుచో దళసరిని అనగా ఎత్తును వెడలుపుచే గుణించి రంపపుకోతలసంఖ్యచే గుణింప ఫలమగును అంగులాత్మకమగుఫలమును 576చే భాగింప హస్తాత్మక మగును.

ఇచట దళసరియనగా భూమినుండి పైకి గల కర్రయొక్క ఎత్తు; వెడలుపు అనగా ఆదళసరికి అడ్డముగనైన కొలత. ఇందు అడ్డముగ కోతలనగా పైభాగమునుండి క్రిందుగ అడ్డకోతలు. అని గ్రహింపవలయును.

ఉదాహరణమ్

యద్విస్తృతి ర్దంతమితాంగులాని పిండ స్తథా షోడశ యత్ర కాష్ఠే। ఛేదేషు తిర్యఙ్నవసు ప్రచక్ష్వ కిం స్యాత్ఫలం తత్ర కరాత్మకం మే॥ ౧౦౨॥

న్యాసః విస్తారః ౩౨ పిండః ౧౬ మార్గాః ౯ జాతఫలం ౮ హస్తాః.



కర్రయొక్క ఎత్తు (దళసరి) 16 అంగుళములు, వెడల్పు 32 అంగుళములు. అడ్డముగ 9 కోతలు కోయబడినవి. అచట హస్తాత్మకమగు ఫలమెంతయగును ?

$16 \times 32 \times 9 = 4608$ కావున

$4608 \div 576 = 8$ చతురపు హస్తములు. ఇది ఫలము అగుచున్నది.

ఇష్టికాచితి దృషచ్చితి ఖాత క్రాకచ వ్యవహృతౌ ఖలు మూల్యం। కర్మకారజన సంప్రతిపత్త్యా తన్మృదుత్వ కఠినత్వ వశేన॥ ౧౦౩॥

ఇతి క్రకచ వ్యవహారః.

తా॥ ఇటుకలగుట్ట, రాతిగుట్ట, వాటియొక్క వెలలు; ఖాతమునందివ్వదగిన కూలి; (క్రకచ = రంపము) రంపపు కోతల కగుకూలి; వీటి నిర్ణయము ఆయా కాలమునందలి పనివాండ్ర సమ్మతినిబట్టియు ఆయాపదార్థములబట్టియు నిర్ణయింపదగినది అనగా రాతియొక్కయు ఇటుకయొక్కయు మంచి అనగాగట్టి దానిచే మూల్యము నిర్ణయింపవలయును. మెత్తనిభూమి త్రవ్వుట కొకవిధముగను గట్టి భూమి త్రవ్వుట కొకవిధముగను ఖాతములందు కూలి ఇవ్వదగియుండును. రంపపు కోతలందును మెత్తనికర్ర కొకవిధముగను బిరుసగుకర్ర కొకవిధముగను కూలి యగును. ఇవి ఆయాకాలములందు లోకవ్యవహారముచే నిర్ణయింపబడినవి. కావున ఇందు వాటినిర్ణయము చేయబడలేదని శ్రీభాస్కరాచార్యులు చెప్పియున్నారు.

ఇది క్రకచవ్యవహారము 18 ప్రకరణము.

రాశివ్యవహారము.

19వ ప్రకరణము.

అథ రాశి వ్యవహారే కరణసూత్రం వృత్తం.

అనణుషు దశమాంశోణుష్వ థైకాదశాంశః। పరిధేనవమభాగ శ్శూకధాన్యేషు వేధః॥ భవతి పరిధిషష్ఠే వర్గితే వేధనిఘ్నే। ఘన గణితకరా స్స్యుర్మాగధా స్తాశ్చ ఖార్యః॥ ౧౭౩॥

టీ॥ అనణుషు = స్థూలధాన్యములందు, దశమాంశః = పరిధియొక్క దశమాంశమున్న, అథ = పిమ్మట, అణుషు = అణుధాన్యములందు ఏకదశాంశః = 11వ వంతున్న శూకధాన్యేషు = శూక (ముల్లుగల) ధాన్యములందు, పరిధినవమభాగః = పరిధియొక్క 9వ వంతున్న, వేధః = వేధ (ఎత్తు) భవతి = అగుచున్నది.

పరిధిషష్ఠే = పరిధియొక్క 6వ వంతు, వర్గితే = వర్గింపబడి, వేధనిఘ్నే = వేధచేగుణింపబడినదగుచో, ఘనగణితకరాః = ఘనఫలముయొక్క హస్తములు, స్స్యుః = అగుచున్నవి. తాః = ఆఘనహస్తములు, మాగధాః = మగధదేశమందలి, ఖార్యః = ఖారికలు.

194. ప్ర. (1) ఖాతమునందు లోతు వేధ యగునట్లు రాశికి ఎత్తు వేధ యగును ఆవేధ శనగలు మొదలగు స్థూలధాన్యముల రాశియందు పరిధిలో 10వ వంతు అగును; సూక్ష్మధాన్యములు అనగా ఆవాలు చోళ్ళు కొఱ్ఱలు మొదలగు వాటి రాశియందు పరిధిలో 11వ వంతు వేధ యగును; ముల్లువంటి అగ్రముగల ధాన్యముల రాశియందు పరిధియొక్క 9వ వంతు వేధయగును. (ఇది సామాన్యముగ చెప్పబడినది కావున ఎత్తును కొలతచే తెలుసుకొనుట యుత్తమము)

(2) (హస్తాత్మక) పరిధియొక్క 6వవంతును వర్గించి (హస్తాత్మక)వేధచే గుణింప ఘనహస్తము లగును. అవి మగధదేశపు పుట్టెలు అగును.

(ఒకఘనహస్తమునందు గాని ఘనపుటడుగునందుగాని ధాన్యాదిక మెంత పట్టునదియు తత్కాలమానముచే తెలిసికొనదగినది. పరిధివేధలు ఏమానములో నివియో ఆమానముచే ఘనపరిమాణములగును,)

ఉపపత్తి: స్థూలపద్ధతిచే $\frac{ప}{3}$ = వ్యాస ఆప్రకారము క్షేత్రఫలము $\frac{ప}{3} \times \frac{ప}{4} = \frac{ప^2}{12}$ దీనిని వేధచే గుణించి 3చే భాగింప సూచీఘనఫలము (189 ప్రశ్నవిధి చూ) $\frac{ప^2 \times వే}{12 \times 3} = \frac{ప^2}{36} \times వే = (\frac{ప}{6})^2 \times వే$ ఇట్లు పద్ధతి ఉపపన్నమగుచున్నది.

ఇందు $\frac{ప}{3}$=వ్యాసము అనుట స్థూలమార్గమగుటచే ఇంచుమించుగ ఘనపరిమాణము లగును. అని గ్రహింపవలయును.

ఉదాహరణమ్

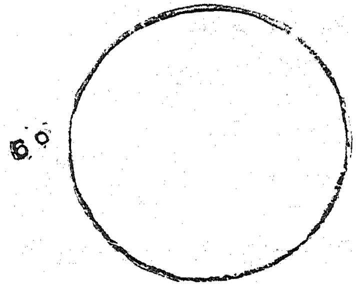
సమభువికిల రాశిర్యస్థితః స్థూలధాన్యః పరిధిపరిమితి స్స్యాద్ధస్తషష్టిర్యదీయా। ప్రవద గణక ఖార్యః కింమితా స్సంతి తస్మిన్నథ పృథగణుధాన్యైః శూకధాన్యైశ్చ శీఘ్రమ్॥ ౧౦౩॥

న్యాసః. స్థూలధాన్యపరిధిః ౬౦ వేధః౬ లబ్ధాః ఖార్యః ౬౦౦ అథాణుధాన్యరాశిపరిధిః $\frac{౬౦}{౧౧}$ జాతం ఫల ౫౪౫ $\frac{౫}{౧౧}$ అథ శూకధాన్యపరిధిః ౬౦ వేధః $\frac{౨౦}{౩}$ లబ్ధాః ఖార్యః ౬౬౬ $\frac{౨}{౩}$

తా॥ గణకుడా! సమభూమియందున్న స్థూలధాన్యరాశియొక్క పరిధి 60 హస్తములు. ఆరాశియందు ఎన్ని ఖారికలు గలవు? చెప్పుము.

అట్టి పరిధిగలరాశి అణుధాన్యమగుచో నెన్ని ఖారికలు?

శూకధాన్యమగుచో నెన్ని ఖారికలు? శీఘ్రముగ వేర్వేర చెప్పుము.



60 పరిధిప్రమాణముగల రాశి స్థూలధాన్యమగుచో $\frac{60}{10} = 6$ వేధయగును. కావున $(\frac{60}{6})^2 \times 6 = 100 \times 6 = 600$ ఘనహస్తములు. ఆరాశి అణుధాన్యమగుచో $\frac{60}{11}$ వేధయగును. కావున $100 \times \frac{60}{11} = \frac{6000}{11} = 545\frac{5}{11}$ ఘనహస్తములు. ఆరాశి శూకధాన్యరాశి యగుచో $\frac{60}{9} = \frac{20}{3}$ వేధయగుచున్నది. కావున

$$\left(\frac{60}{6}\right)^2 \times \frac{20}{3} = \frac{100 \times 20}{3} = 666\frac{2}{3}$$ ఘనహస్తములగును.

అథ భిత్త్యంతర్బాహ్యకోణసంలగ్నరాశిపరిమాణానయనే
కరణసూత్రం వృత్తార్థం.

ద్వి వేద సత్రిభాగైక నిఘ్నాత్తు పరిధేః ఫలం।
భిత్త్యంత ర్బాహ్య కోణస్థ రాశే స్స్వగుణభాజితం॥౧౨౪॥

టీ॥ భిత్త్యంతర్బాహ్యకోణస్థరాశేః = గోడయందును లోపలమూలయం దును, వెలుపటిమూలయందును, ఉన్న రాశియొక్క, ద్వివేదసత్రిభాగైకనిఘ్నాత్ = 2, 4, $\frac{4}{3}$, వీటిచే గుణింపబడిన, పరిధేః = పరిధివలననైన, ఫలం = ఫలము, స్వగుణభాజితం = తమగుణకముచే భాగింపబడినదై (చేయదగినది)

195. ప్ర. (1) ఒకగోడకుచేర్చి పోసినరాశియగుచో ఆరాశియొక్క చుట్టు కొలతను 2చే గుణించి ఆపరిధివలన పూర్వప్రకారము ఫలమును సాధించి ఆఫల మును 2చే భాగింప ఘనహస్తము లగును.

(2) రెండుగోడలయొక్క లోపలమూలయందు పోసిన రాశియగుచో ఆ పరిధిని 4చే గుణించి దానివలననైన ఘనహస్తసంఖ్యను 4చే భాగింపుము.

(3) రెండుగోడలయొక్కయు వెలుపటనున్న మూలయందున్న రాశియ గుచో ఆపరిధిని $\frac{4}{3}$చే గుణింప నగు పరిధివలననైన ఫలమును $\frac{4}{3}$చే భాగింపుము. అవి ఘనహస్తము లగును.

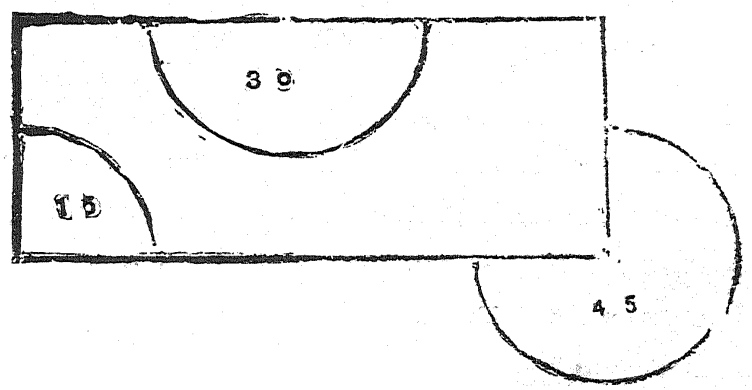
ఉదాహరణం

పరిధి ర్భిత్తిలగ్నస్య రాశే స్త్రింశత్కరః కిల।
అంతఃకోణస్థితస్యాపి తిథితుల్యకర స్సఖే॥ ౧౦౪॥
బహిఃకోణస్థిత స్యాపి పంచఘ్ననవసంమితః।
తేషా మాచక్ష్వ మే క్షిప్రం ఘనహస్తాన్పృథక్పృథక్॥౧౦౫॥

తా॥ ఒకగోడకు చేర్చిపోయబడిన ధాన్యరాశియొక్క పరిధి 30హస్తములు లోపలమూలయందున్న ధాన్యరాశియొక్క పరిధి 15 హస్తములు. వెలుపలమూల యందున్న ధాన్యరాశియొక్క పరిధి 45హస్తములు.

ఆరాసులయొక్క ఘనహస్తములను వేర్వేరుగ శీఘ్రముగ నాకుచెప్పుము.

న్యాసః. అత్రాద్యస్యపరిధి ౩౦ ద్విఘ్నః ౬౦ అన్యస్య ౧౫ చతుర్ఘ్నః ౬౦ తదితరస్య౪౫ సత్రిభాగైక $\frac{౪}{౩}$ నిఘ్నః ౬౦ ఏభ్యః ఫలం ౬౦౦ ఏతత్స్వగుణేనభక్తం జాతం పృథక్పృథక్ఫలం ౩౦౦, ౧౫౦, ౪౫౦॥ ఇతిరాశివ్యవహారః



భిత్తిసంలగ్నరాశిపరిధి 30 దీనినిరెట్టింప 60 దీనివలనస్థూలధాన్యఘనహస్త ములు $\left(\frac{60}{10}\right) \times \left(\frac{60}{6}\right)^2 = 6 \times 100 = 600$ దీనిని 2చే భాగింప300

ఇట్లు భిత్త్యంతఃకోణసంలగ్నరాశిపరిధి 15 దీనిని 4చే గుణింప 60 దీనిచేనైన స్థూలధాన్యఘనహస్తసంఖ్య 600 ను 4చే భాగింప 150

భిత్తిబహిఃకోణసంలగ్న రాశిపరిధి 45ని $\frac{4}{3}$చే గుణింప $\frac{45}{1} \times \frac{4}{3} = 60$ దీని వలననైన స్థూలధాన్యఘనహస్తసంఖ్య 600ను $\frac{4}{3}$చే భాగింప 450

ఇట్లు అంతటను గ్రహింపవలయును.

ఉపపత్తి: భిత్తిలగ్నరాశికి పరిధ్యర్థమే తెలియబడుచున్నది. అంతఃకోణ స్థరాశిపరిధి పరిధిచతుర్థాంశమగుచున్నది. బహిఃకోణస్థరాశికి రాశిపరిధిలో 4వంతు లలో 3వంతులు పరిధి అగుచున్నది. అట్లు ఆయారాశిపరిమాణములును క్రమముగ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ రాను లగుచున్నవి. కావున మొత్తము పరిధివలన మొత్తముపరిమాణమును తెలిసికొని దానివలన ఆయారాశిభాగములు తెలిసికొనబడినవి.

ఇదిరాశివ్యవహారము 19 ప్రకరణము.

ఛాయావ్యవహారము.

20వ ప్రకరణము.

అథ ఛాయా వ్యవహారే కరణ సూత్రం వృత్తం

ఛాయయోః కర్ణయో రంతరేయేతయోర్వర్గవిశ్లేషభక్తారసాద్రీషవః।
సైకలబ్ధేఃపదఘ్నంతుకర్ణాంతరంభాంతరేణోనయుక్తందలేస్తః ప్రభే॥125

టీ॥ రసాద్రీషవః = (రస = 6. అద్రి = 7, ఇషు = 5) 576, ఛాయయోః = ఛాయలయొక్కయు, కర్ణయోః = కర్ణములయొక్కయు, యే = ఏ, అంతరే = అంతరములుగలవో, తయోః = ఆఅంతరములయొక్క, వర్గవిశ్లేష భక్తాః = వర్గముల అంతరముచే భాగింపబడినవై (చేయదగినవి). కర్ణాంతరంతు =కర్ణములఅంతరము, సైకలబ్ధేః = ఒకటితోగూడిన పూర్వలబ్ధముయొక్క, పదఘ్నం = మూలముచే గుణింపబడినదై, భాంతరేణ = ఛాయలఅంతరముచే, ఊనయుక్తం = ఒకచోతీసివేయుబడినదియు మరియొకచో కలుపబడినదియునై (చేయదగినది). దలే = వాటిసగములు, ప్రభే = ఛాయలు, స్తః=అగుచున్నవి.

196. ప్ర (1) ఒకద్వాదశాంగుళశంకువును దీపసన్నిధానమునందు వేరువేరుప్రదేశములందునిచినచో దీపశంకువులకు దూరము భేదించుటచే ఛాయలు భేదించును. దీపమునకు శంకువు దూరమైనకొలదిని శంకుచ్ఛాయ వృద్ధినొందును. (అందు ద్వాదశాంగుళశంకువు కోటి యనుచో ఛాయ భుజయగును. శంక్వగ్రము నుండి ఛాయాగ్రమువరకునైన దూరము కర్ణము అగుచున్నది.) అట్టి రెండుఛాయలయొక్క అంతరమున్ను వాటికర్ణములయొక్క అంతరమున్ను తెలిసినచో ఛాయల నెరుంగుపద్ధతి:

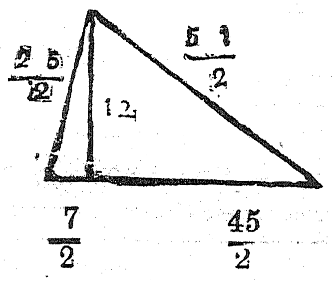
(2) ఛాయాంతరముయొక్కయు కర్ణాంతరముయొక్కయు వర్గములయంతరముచే 576ను భాగింపుము. అట్లు భాగింపగానగు లబ్ధమునందు 1టిని కలిపి దీనివర్గమూలముచే కర్ణాంతరమును గుణింపుము. ఈగుణనఫలమునందు ఛాయాంతరము నొకచో కలుపుము. మరియొకచో తీసివేయుము. వీటి నర్ధింప ఛాయలగును.

ఉదాహరణమ్

నందచంద్రైర్మితం ఛాయయో రంతరం కర్ణయో రంతరం
విశ్వతుల్యం యయోః। తే ప్రభే వక్తి యో యుక్తిమా న్వేత్త్యసా
వ్యక్త మవ్యక్తయుక్తం హి మన్యేఖిలం॥ ౧౯౬॥

తా॥ రెండుఛాయలయొక్కయు అంతరము 19అంగుళములు వాటికర్ణముల యంతరము 13 అంగుళములు ఆఛాయలను ఏబుద్ధిమంతుడు చెప్పునో వీడు బీజగణితముతో గూడిన సర్వవ్యక్తగణితమును తెలిసికొనుచున్నాడు. అని తలచుచున్నాను

న్యాసః ఛాయాంతరం౧౯ కర్ణాంతరం౧౩ అనయోర్వర్గాంతరేణానేన౧౯౨ భక్తా రసాద్రీషవః౫౭౬ లబ్ధమ్ ౩ సైకస్యాస్య ౪ మూలేన౨ గుణితం కర్ణాంతరం౨౬ ద్విఘ్నం౨౬ భాంతరేణ౧౯ ఊనయుతం౭,౪౫ తదర్ధే లబ్ధే ఛాయే $\frac{౭}{౨}$, $\frac{౪౫}{౨}$ అతః కర్ణౌ $\frac{౨౫}{౨}$, $\frac{౫౧}{౨}$



ఛాయలఅంతరము 19 అం. కర్ణముల అంతరము 13 అం. వీటివర్గాంతరము $(19+13) \times (19-13) = 192$ దీనిచే 576ను భాగింప లబ్ధము 3. ఇందు 1టిని కలుప 4. దీని మూలము 2చే కర్ణాంతరము 13ను గుణింప 26 ఇం దొకచో ఛాయాంతరమును కలిపియు మరియొకచో వ్యవకలించియు నర్ధింప $\frac{26+19}{2}=\frac{45}{2}$, $\frac{26-19}{2}=\frac{7}{2}$ ఇవిఛాయలు ఛాయ భుజ. ద్వాదశాంగుల శంకు12 కోటి గావున క్రమముగ కర్ణములు $\frac{51}{2}$, $\frac{25}{2}$ అగుచున్నవి.

ఉపపత్తి: పైఉదాహరణమునందలి క్షేత్రమునందు రెండుఛాయలును ద్వాదశాంగుళశంకువునకు రెండు వైపులను వేర్వేరలిఖించి చూపబడినవి. దానిచే

ఛాయాయోగము భూమిగను కర్ణములు భుజములుగను ద్వాదశాంగులశంకువు లంబముగను ఛాయలు ఆబాధలుగను గల త్రిభుజక్షేత్ర మైనది.

ఇటు కల్పనచే ఛాయాంతర = ఛా అం. కర్ణాంతరం = కఅం. లంబ = శం, ఛాయాయోగము = భూ, లఘుకర్ణ = లక, మహత్కర్ణ=మక, లఘ్వాబాధా = లఘుచ్ఛాయా = లఛా, బృహదాబాధా = బృహచ్ఛాయా = మఛా ఛాయాయోగ = భూ, ఛాయాంతర = ఛాఅం కావున బీజగణితముచే

$$\frac{\text{భూ} + \text{ఛాఅం}}{2} = \text{మఛా}, \quad \frac{\text{భూ} - \text{ఛా అం}}{2} = \text{లఛా} \quad (103\ \text{ప్రి. చే})$$

$$\because \text{మక}^2 - \text{లక}^2 = \text{మఛా}^2 - \text{లఛా}^2 \quad (163\ \text{ప్రి, ఉపపత్తి } 1\ \text{చూ})$$

$$\therefore \frac{\text{మఛా}^2 - \text{లఛా}^2}{\text{కఅం}} = \frac{\text{భూ} \times \text{ఛా అం}}{\text{కఅం}} = \text{కర్ణయోగ} \quad (104\ \text{ప్రి చే})$$

$$(103\ \text{ప్రి. చే})\ \text{లక} = \frac{\text{భూ}.\text{ఛా అం} - \text{కఅం}^2}{2\ \text{కఅం}}$$

$$(163\ \text{ప్రి. చే})\ \text{శం}^2 = \text{లక}^2 - \text{లఛా}^2$$

$$= \frac{\text{భూ}^2.\text{ఛాఅం}^2 - 2\text{భూ}.\text{ఛాఅం}.\text{కఅం}^2 + \text{కఅం}^4}{4\text{కఅం}^2}$$

$$- \frac{\text{భూ}^2 - 2\ \text{భూ}.\ \text{ఛా అం} + \text{ఛాఅం}^2}{4}$$

$$= \left\{ \frac{\text{భూ}^2.\text{ఛాఅం}^2 - 2\text{భూ}.\text{ఛాఅం}.\text{కఅం}^2 + \text{కఅం}^4 - \text{భూ}^2\ \text{కఅం}^2 + 2\text{భూ}.\text{ఛాఅం}.\text{కఅం}^2 - \text{కఅం}^2.\text{ఛాఅం}^2}{4\text{కఅం}^2} \right.$$

$$= \frac{\text{భూ}^2(\text{ఛాఅం}^2 - \text{కఅం}^2) + \text{కఅం}^2(\text{కఅం}^2 - \text{ఛాఅం}^2)}{4\text{కఅం}^2} = \text{శం}^2$$

$$\therefore \text{భూ}^2(\text{ఛాఅం}^2 - \text{కఅం}^2) + \text{కఅం}^2(\text{కఅం}^2 - \text{ఛాఅం}^2) = \text{శం}^2 \times 4 \times \text{కఅం}^2$$

$$= \text{భూ}^2(\text{ఛాఅం}^2 - \text{కఅం}^2) - \text{కఅం}^2(\text{ఛాఅం}^2 - \text{కఅం}^2) = 4\text{శం}^2 \times \text{కఅం}^2$$

$$\therefore \text{భూ}^2(\text{ఛాఅం}^2 - \text{కఅం}^2) = 4\text{శం}^2.\text{కఅం}^2 + \text{కఅం}^2(\text{ఛాఅం}^2 - \text{కఅం}^2)$$

$$\therefore \text{భూ}^2 = \frac{4\text{శం}^2.\text{కఅం}^2 + \text{కఅం}^2(\text{ఛాఅం}^2 - \text{కఅం}^2)}{\text{ఛాఅం}^2 - \text{కఅం}^2}$$

$$= \text{కఅం}^2 + \frac{\text{కఅం}^2 \times 4\text{శం}^2}{\text{ఛాఅం}^2 - \text{కఅం}^2} = \text{కఅం}^2\left(1 + \frac{4\text{శం}^2}{\text{ఛాఅం}^2 - \text{కఅం}^2}\right)$$

ఇచట $\text{శం} = 12$ కావున $4\ \text{శం}^2 = 12^2 \times 4 = 576$

$$\therefore \text{భూ} = \text{కఅం}\sqrt{1 + \frac{576}{\text{ఛాఅం}^2 - \text{కఅం}^2}}\ \text{అగుచున్నది.}$$

ఛాయాయోగమగుభూమి తెలియుటచే ఛాయాంతర మిదివరలో తెలియబడినది కావున సంక్రమణముచే (103 ప్రి. చే) ఛాయలు తెలియబడుచున్నవి ఇట్లీసూత్ర ముపపన్న మగుచున్నది.

ఛాయాంతరే కరణసూత్రమ్

శంకుః ప్రదీపతలశంకుతలాంతరఘ్న శ్ఛాయాభవేద్వినరదీపశిఖౌచ్యభక్తః

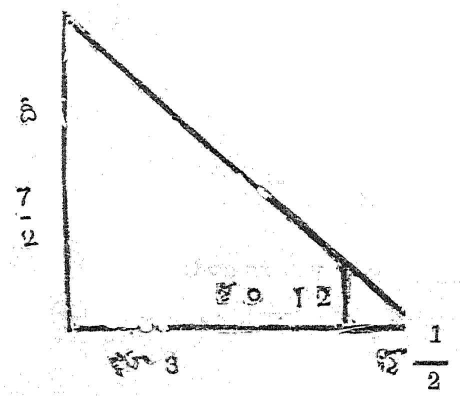
టీ॥ శంకుః = శంకువు, ప్రదీపతలశంకుతలాంతరఘ్నః = దీపమూలము యొక్కయు శంకుమూలముయొక్కయు, మధ్యభూమిచేగుణింపబడినదై, వినర దీపశిఖౌచ్యభక్తః = శంకుమానముచే తీసివేయబడిన దీపముయొక్క (శిఖాగ్రము వరకునైన) ఔన్నత్యప్రమాణముచే భాగింపబడినదై, ఛాయాభవేత్ = ఛాయయగును.

197. ప్రి. శంకుప్రమాణమును దీపమూలముయొక్కయు శంకుమూలము యొక్కయు మధ్యభూమిచే గుణించి దీపప్రమాణమువలన శంకుప్రమాణమును వ్యవకలింపగా నగు శేషమునలన భాగింప శంకువుయొక్క ఛాయాప్రమాణమగును.

ఉదాహరణమ్

శంకుప్రదీపాంతరభూస్త్రిహస్తా దీపోచ్ఛ్రితిస్సార్ధకరత్రయాచేత్।
శంకోస్తదార్కాంగులసంమితస్య తస్యప్రభాస్యాత్కియతీవదాశు॥

తా॥ శంకువునకును దీపమునకును దూరము 3హస్తములు. దీపముయొక్క ఔన్నత్యము $3\frac{1}{2}$ హస్తములు. అపుడు 12 అంగుళములు ఎత్తుగల శంకువునకు ఛాయ ఎంతయుండును? శీఘ్రముగ చెప్పుము

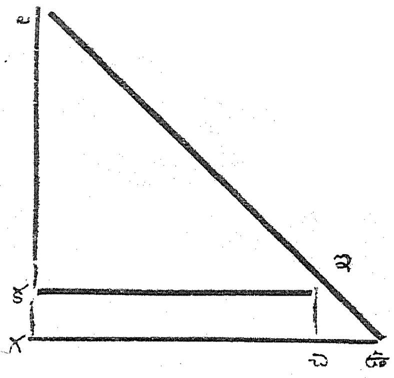


న్యాసః లబ్ధానిఛాయాంగులాని ౧౨

ఇచట శంకుప్రమాణము 12 అంగుళములు. అనగా ½ హస్తము. దీప = 3½ హస్తములు. దీపమునకును శంకువునకును మధ్యనున్న భూమి 3 హస్తములు. పై సూత్రప్రకారము

$$\frac{శం \times భూ}{దీ - శ} = \frac{\frac{1}{2} \times 3}{\frac{7}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \times \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$ హస్తము ఛాయ.

ఉపపత్తి: ఇచ = శంకు, అగ = దీపొచ్చ్యము, గచ = దీపశంక్వంతర భూమి, చఉ = ఛాయ, అ = దీప శిఖాగ్రము. దీపాగ్రమునుండి శంక్వగ్రము(ఇబిందువు)మీదుగా చేయబడిన సరల రేఖ 'ఉ' బిందువువద్ద భూమియందు పడుచున్నది. కావున ఉ=ఛాయాగ్రము 'అగఉ' పెద్దజాత్య త్రిభుజము. ఇందు 'గఉ' రేఖాసమానాంతరమగు కఇ రేఖ చేయబడినది. దానిచే 'అకఇ' 'ఇచఉ' రెండు జాత్యాంతర్గతలఘుజాత్యము లగుచున్నవి. ఈమూడుజాత్యములకును సాజాత్యము కావున



అక : కఇ : : ఇచ : చఉ

ఇచట అక = అగ — ఇచ, అగ = దీ, ఇచ = శం, కఇ = భూ కావున

(దీ — శం) : భూ : : శం : ఛాయ

$$\frac{శం \times భూ}{దీ - శం}$$ = ఛాయ యగుచున్నది.

అథ దీపోచ్ఛ్రిత్యానయనం

ఛాయాహృతేతు నరదీపతలాంతరఘ్నే।
శంకౌ భవే న్నరయుతేఖలు దీపకౌచ్యం॥ ౧౨౬॥

టీ॥ శంకౌ = శంకువు, నరదీపతలాంతరఘ్నే =దీపముయొక్కయు శంకుయొక్కయు మధ్యభూమిచే గుణింపబడినదై, ఛాయాహృతే = ఛాయచే భాగింపబడినదై, నరయుతే = శంకువుతో కలుపబడినదియై, దీపకౌచ్యంఖలు = దీపౌన్నత్యముగదా!

198. ప్ర. దీపమునకును శంకువునకును మధ్యభూమియు శంకువు ఛాయయు తెలిసినచో దీపప్రమాణము నెరుంగుట

దీపశంకువులమధ్యభూమిప్రమాణముచే శంకుమానమును గుణించి దానిని ఛాయచే భాగించి ఆలబ్ధమునందు శంకుమానమును గలిపినచో దీపముయొక్క ఎత్తగును.

ఉపపత్తి: $\frac{శం \times భూ}{దీ - శం}$ = ఛాయ (197 ప్ర. చూ).

$\therefore$ శం × భూ = (దీ — శం) × ఛా

$\therefore$ $\frac{శం \times భూ}{ఛా}$ + శం = దీ అగుచున్నది.

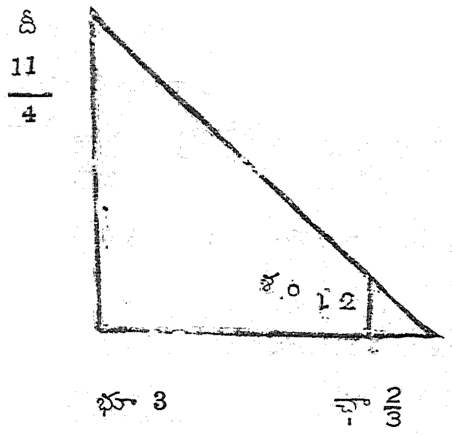
ఉదాహరణమ్

ప్రదీపశంక్వంతరభూ స్త్రిహస్తా ఛాయాంగులైః షోడశభిస్సమాచేత్। దీపోచ్ఛ్రితి స్స్యాత్కియతీ వదాశు। ప్రదీపశంక్వంతరముచ్యతాం మే॥ ౧౦౮॥

న్యాసః: శంకుః౧౨ ఛాయాంగులాని౧౬ శంకుప్రదీపాంతర హస్తాః3 లబ్ధం దీపకౌచ్యం హస్తాః౨ అంగులాని ౧౮

తా॥ (1) దీపశంకువులమధ్యభూమి 3హస్తములు. ఛాయ 16 అంగుళములు దీపౌన్నత్య మెంతయుండును? శీఘ్రముగ చెప్పుము.

(2) అట్లు దీపౌన్నత్యము, ఛాయా, వీటివలన దీపశంకువుల మధ్యభూమిని చెప్పుము. (ఇది ముందు సూత్రమున కుదాహరణము)



పైపద్ధతిప్రకారము

శంకు × భూ = $\frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$ దీనిని ఛాయచే భాగింప $\frac{3}{2} \div \frac{2}{3} = \frac{9}{4}$ ఇందు శంకువు $\frac{1}{2}$ను కలుప $\frac{11}{4}$ దీపౌన్నత్యము అగుచున్నది.

ప్రదీపశంక్వంతరభూమ్యానయనం

విశంకుదీపోచ్ఛ్రియసంగుణా భా శంకూద్ధృతా దీపనరాంతరం స్యాత్।

టీ॥ భా = ఛాయ, విశంకుదీపోచ్ఛ్రియసంగుణా = శంకుమానముచే వ్యవకలింపబడిన దీపప్రమాణముచే గుణింపబడినదై, శంకూద్ధృతా = శంకువుచే భాగింపబడి, దీపనరాంతరం = దీపశంకువుల మధ్యభూమి, స్యాత్ = అగును.

199. ప్ర. దీపౌన్నత్యమువలన శంకువును వ్యవకలించి దానిని ఛాయచే గుణించి శంకువుచే భాగింప లబ్ధము, దీపశంకువుల మధ్యభూమి యగును.

ఉపపత్తి: శం × భూ = (దీ — శం) × ఛా (198 ప్ర. చూ)

$\therefore$ $\frac{(\text{దీ} - \text{శం}) \times \text{ఛా}}{\text{శం}}$ = భూమి అగుచున్నది.

న్యాసః: పూర్వోక్త ఏవ దీపోచ్ఛ్రియః $\frac{౧౧}{౪}$ శంక్వంగులాని ౧౨ ఛాయా ౧౬ లబ్ధాః శంకుప్రదీపాంతరహస్తాః 3.

పూర్వోదాహరణము. దీపౌన్నత్యము $\frac{11}{4}$ శంకు $\frac{1}{2}$ ఛాయ $\frac{2}{3}$, దీ — శం = $\frac{11}{4} - \frac{1}{2} = \frac{9}{4}$ దీనిని ఛాయ 2చే గుణింప $\frac{3}{2}$ శంకు 1చే భాగింప 3 లబ్ధము దీపశంక్వంతరహస్తములు.

ఛాయాప్రదీపాంతర దీపౌచ్చ్యానయనాయ కరణసూత్రం

ఛాయాగ్రయో రంతరసంగుణాభా ఛాయాప్రమాణాంతరహృద్భవేద్భూః॥ ౧౨౭॥

భూశంకుఘాతః ప్రభయా విభక్తః ప్రజాయతే దీపశిఖౌచ్చ్యమేవమ్।
త్రైరాశికేనైవ యదేతదుక్తం వ్యాప్తం స్వభేదైర్హరిణేవ విశ్వమ్॥ 128॥

టీ॥ భా = ఛాయ, ఛాయాగ్రయోః = ఛాయాగ్రములయొక్క, అంతర సంగుణా = అంతరముచే గుణింపబడినదై, ఛాయాప్రమాణాంతరహృత్ = ఛాయల అంతరముచే భాగింపబడినదై, భూః = భూమి, భవేత్ = అగును.

భూశంకుఘాతః = భూమియొక్కయు శంకువుయొక్కయు గుణనము, ప్రభయా = ఛాయచే, విభక్తః = భాగింపబడినచో, దీపశిఖౌచ్చ్యం = దీపౌన్నత్యము, ప్రజాయతే = అగుచున్నది.

ఏవం = ఇట్లు, యత్ = ఏది ఉక్తం = చెప్పబడినదో, ఏతత్ = ఇది త్రైరాశికేనైవ = త్రైరాశికముచేతనే, హరిణావిశ్వమివ = విష్ణువుచే ప్రపంచమువలె, స్వభేదైః = తనయొక్క భేదములచే, వ్యాప్తం = వ్యాపింపబడినది.

200. ప్ర. (1) శంకుదీపాంతరము పెరిగినకొలదియు ఛాయ వృద్ధిబొందును. తొలుత నొకప్రదేశమునందు శంకు నునిచి దానిచ్ఛాయను తెలిసికొని ఆఛాయాగ్రమునకు తిన్నగ కొంతదూరమున ఆశంకువునే ఉంచినచో ఛాయ అధికముగ గన్పట్టును. అట్టి రెండుఛాయలును, ఆఛాయాగ్రప్రదేశముల దూరమున్ను తెలిసినచో వాటిచే దీపౌన్నత్యమును, దీపశంక్వంతరమును, తెలియు పద్ధతి.

(2) ఛాయను ఛాయాగ్రముల అంతరభూమిచే గుణించి ఛాయాప్రమాణముల అంతరముచే భాగింప దీపమూలమునుండి ఛాయాగ్రమువరకునైన భూమి యగును, (ఇందు ఛాయను వ్యవకలింప దీపశంక్వంతర మగును)

(3) ఆభూపరిమాణమును శంకుచేగుణించి ఛాయచే (ఇదివరలో గ్రహింపబడినది) భాగింప దీపౌన్నత్య మగును.

ఇట్లు పూర్వమందు చెప్పబడిన గణితమంతయు శ్రీహరిచే ప్రపంచము నిండియున్నట్లు త్రైరాశికముచే నిండియున్నది.

ఉదాహరణమ్

శంకోర్భాఽర్కమితాంగులస్య సుమతే దృష్టాకిలాష్టాంగులా।
ఛాయాగ్రాభిముఖే కరద్వయమితే న్యస్తస్య దేశేపునః॥
తస్యైవార్కమితాంగులా యది తదా ఛాయాప్రదీపాంతరం।
దీపౌచ్చ్యంచ కియ ద్వద వ్యవహృతిం ఛాయాభిధాం వేత్సిచేత్॥౧౦౯

తా॥ బుద్ధిమంతుడా! 12 అంగుళములుగల శంకుయొక్క ఛాయ 8 అంగుళములు పొడవుగలదిగ గన్పట్టినది. ఆఛాయాగ్రప్రదేశమునకు ముందటప్రదేశమున పూర్వశంకువునకు 2హస్తముల దూరమున తిరిగియుంచబడిన ఆశంకువుకే 12 అంగుళములుగల ఛాయ గన్పట్టినచో అపుడు ఛాయకును దీపమునకును అంతరమెంతయుండును? దీపౌన్నత్య మెంతయుండును? ఛాయావ్యవహారము నెరింగితివేని చెప్పుము.

న్యాసః అత్రఛాయాగ్రయో రంతరమంగులాత్మకం౫౨ ఛాయేచ౮,౧౨ అనయోరాద్యాల ఇయమనేన౫౨ గుణితా౪౧౬ ఛాయాప్రమాణాంతరేణ౪ భక్తా లబ్ధం భూమానమ్౧౦౪ ఇదం ప్రథమచ్ఛాయాప్రదీపతలయో రంతర మిత్యర్థః॥

ఏవంద్వితీయచ్ఛాయాంతరభూమానమ్౧౫౬ "భూశంకుఘాతః ప్రభయా విభక్త" ఇతి జాత ముభయత్రోపి దీపౌచ్చ్యం సమమేవ హస్తాః౬ ౧/౨

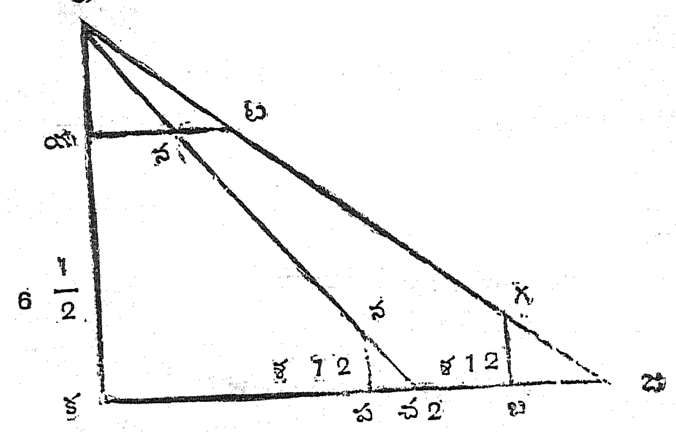
ఈయుదాహరణమునందు రెండుశకువులకును అంతరము 2 హస్తములు నగా $2 \times 24 = 48$ అంగుళములు. కావున ఛాయాగ్రములయంతరము 52 అంగుళములు. మొదటిఛాయ 8 అం. రెండవఛాయ 12 అం. ఇపుడు పై పద్ధతి

ప్రకారము మొదటిఛాయ 8ను ఛాయాగ్రాంతరము 52చే గుణింప 416 దీనిని ఛాయల అంతరము $12 - 8 = 4$చే భాగింప 104 ఇది భూమి. దీపమూలము నుండి ప్రథమఛాయాగ్రమువరకునైన దూరము అగుచున్నది.

ఇట్లు రెండవఛాయ 12ను ఛాయాగ్రాంతరము 52చే గుణింప 624 ఛాయాంతరము 4చే భాగింప 156 ఇది దీపమూలమునుండి ద్వితీయఛాయాగ్రము వరకునైన దూరము.

మొదటిభూమి 104ను శంకుచే గుణింప 1248 మొదటిఛాయ 8చే భాగింప 156 దీపౌన్నత్యము.

ఇట్లు రెండవభూమి 156ను శంకుచే గుణించి రెండవఛాయచే భాగించినను 156 దీపౌన్నత్య మగుచున్నది.



ఉపపత్తి: అక=దీపౌచ్చ్యము, పచ = మొదటిఛాయ8, బజ = రెండవ ఛాయ 12, పబ = శంక్వంతరము = 2 హస్తములు, కచ =ప్రథమభూమి, కజ =ద్వితీయభూమి చజ = ఛాయాగ్రాంతరము =52 అంగుళములు. ఇందు అక రేఖయందు అ బిందువునుండి ఒకఅంగుళముదూరమున య బిందువు చేయబడినది. పిమ్మట కజభూమితో సమానాంతరమగునట్లు 'యవట' సరల రేఖ య బిందువునుండి చేయబడినది.

ఇపుడు 'అకచ' జాత్యమునందు 'అయవ' 'నపచ' జాత్యములుఅంతర్గతములు.

ఇట్లు అకజ జాత్యమునందు 'అయట' 'గబజ' జాత్యములు అంతర్గతములు.

అట్లు అచజ క్షేత్రమునందు అవట లఘుక్షేత్రమంతర్గతమై సజాతీయమగుచున్నది.

మరియు అయ = 1 పన = 12 గబ = 12 కావున అనుపాతముచే

$\frac{\text{పచ} \times 1}{12} = \text{యవ}$ ఇట్లు $\frac{\text{బజ} \times 1}{12} = \text{యట}$.

$\therefore \text{యట} - \text{యవ} = \frac{\text{బజ} - \text{పచ}}{12} = \text{వట}$ వచ్చుచున్నది.

ఇందు 'అవట' త్రిభుజమునందు యవ, యట ఆబాధలగుచున్నవి.

అచజ త్రిభుజమునందు కచ, కజ ఆబాధలగుచున్నవి.

'వట' భూమియందు యవ ఆబాధయగుచో 'చజ' భూమియందు కచ ఆబాధ.

కావున $\text{కచ} = \frac{\text{యవ} \times \text{చజ}}{\text{వట}} = \frac{\text{పచ} \times 12 \times \text{చజ}}{12 \times (\text{బజ} - \text{పచ})} = \frac{\text{ప్రిఛా} \times \text{ఛాయాగ్రాంతర}}{\text{ఛాయాంతర}}$

ఇట్లు $\text{కజ} = \frac{\text{యట} \times \text{చజ}}{\text{వట}} = \frac{\text{బజ} \times 12 \times \text{చజ}}{12 \times (\text{బజ} - \text{పచ})} = \frac{\text{ద్విఛా} \times \text{ఛాయాగ్రాంతర}}{\text{ఛాయాంతర}}$

ఇట్లు భూమ్యానయనము ఉపపన్నమగుచున్నది.

ఛాయాభుజమందు శంకువు కోటియగుచో భూభుజమం దెంత కోటి ?

ఈ త్రైరాశికముచే దీపౌచ్యము తెలియబడుచున్నది. ఎట్లనగా:—

$\frac{\text{కచ} \times 12}{\text{పచ}} = \frac{\text{కజ} \times 12}{\text{బజ}} = \text{అక}$ అగుచున్నది.

తుదనుసిద్ధములగు ఈఅనుపాతములనే ఆచార్యులవారు వాసనాభాష్యమందు సూచించియున్నారు.

ఏవమితి:—యథాత్ర ఛాయావ్యవహారే త్రైరాశికకల్పనయా ఆనయనమ్. తద్యథా:—ప్రథమఛాయాతో ద్వితీయఛాయా యావతాధికా తావతా ఛాయాన్తరేణ యది ఛాయాగ్రాంతరతుల్యా భూ ర్లభ్యతే తదా ఛాయయా కిమితి? ఏవం పృథక్పృథక్ ఛాయాగ్రదీపతలాంతరప్రమాణం లభ్యతే. తతో ద్వితీయం త్రైరాశికం. యది ఛాయాతుల్యే భుజే శంకుః కోటి స్తదా భూతుల్యే భుజే కిమితి? లబ్ధం దీపౌచ్య ముభయతోపి తుల్యమేవ ఏవం పంచరాశికాదిక మఖిలం ద్వితాృదిత్రైరాశిక కల్పనయైవ సిద్ధమ్.

యథా భక్తజనమనఃక్లేశాపహారిణా హరిణా నిఖిలజగజ్జననైకబీజేన సకల భువన భవన వన గిరి సరి దసుర సుర నగ రాదిభి స్స్వభేదై రిదం జగ ద్వ్యాప్తం తథైన మఖిలం గణితజాతం త్రైరాశికేన వ్యాప్తం.

తా ॥ పైసూత్రశ్లోకమునందలి (128 శ్లో) ఉత్తరార్ధమునకు ఆచార్యులవారివివరణము. అందు ఇట్లు గణితమంతయు త్రైరాశికముచే నిండియున్నదియని చెప్పబడినది. ఎట్లనగా:—ఈఛాయావ్యవహారమునందు త్రైరాశికకల్పనముచే గణితము చేయబడినది. అదెట్లనిన:—ప్రథమఛాయకంటె ద్వితీయఛాయ ఎంతయధికమో అట్టి ఛాయాంతరముచే ఛాయాగ్రాంతరతుల్యభూమి లభించుచో ఛాయచే నెంత? ఇట్లు వేర్వేర దీపతలమునుండి ఛాయాగ్రమువరకునైన భూప్రమాణములు లభించుచున్నవి. ఇట్లు ఛాయాతుల్యభుజమందు శంకు, కోటియగుచో భూతుల్యభుజయం దెంతకోటి? ఈ త్రైరాశికముచే దీపౌచ్యమగుచున్నది. ఇట్లు పంచరాశికాదికములు2,3 మొదలగు త్రైరాశికములచే నగుచున్నవి.

సర్వప్రపంచములకు మూలకారణమై భక్తమనఃక్లేశములబాపు శ్రీహరి పర్వతములు వనములు నదులు సురాసురులు మనుష్యులు ఇత్యాదినానాభేదములచే ఈప్రపంచమును వ్యాపించియున్నట్లు త్రైరాశికము సర్వగణితమును వ్యాపించియున్నది అని ఆచార్యులు చెప్పుచున్నారు.

యద్వ్యేవం తద్బహుభి ర్బహు కిమర్థ ముక్త మిత్యాశంక్యాహ

యత్కించి ద్గుణభాగహారవిధినా బీజేత్ర వా గణ్యతే।

త త్త్రైరాశికమేవ నిర్మలధియా మేవావగమ్యం విదాం॥

ఏత ద్య ద్బహుధాస్మదాది జడధీధీవృద్ధిబుద్ధ్యా బుధై।

స్తద్భేదా న్బహుధా విధాయ రచితం ప్రాజ్ఞైః ప్రకీర్ణాదికం॥ ౧౨౯॥

ఇతి లీలావత్యాం ఛాయా వ్యవహారః.

తా॥ ఈవ్యక్తగణితమందుగాని బీజగణితమందుగాని (ఎచటనైనను) గుణనభజనములచే ఎద్దియైనను గణింపబడినచో అది త్రైరాశికమే యగును. ఇది సుబుద్ధులగు వేత్తలకే స్పష్టము, ఐనను ప్రాజ్ఞులగు పూర్వగణకులు మనవంటి మందబుద్ధుల బుద్ధివృద్ధికై ఆత్రైరాశిక భేదములను బహువిధముల విస్తరింపజేసి గణితశాస్త్రమును రచించిరి. అని ఆచార్యులవారు చెప్పుచున్నారు

ఇది ఛాయావ్యవహారము 20 ప్రకరణము.

కుట్టకవ్యవహారము.

21వ ప్రకరణము

201. ప్రి. నిర్వచనము.

ఉద్దిష్టభాజ్యమును ఒకానొకగుణకముచే గుణించి అందు (ధనముగాని ఋణముగానియగు) ఉద్దిష్టక్షేపమును సంస్కరించి ఉద్దిష్టహారముచే భాగింప నిశ్శేషమగును. ఆ ఒకానొక గుణక మెద్ది? అనుప్రశ్నమునందలి గుణకము కుట్టకము. అట్టిగుణకమునుగూర్చిన గణితమున్ను కుట్టకము (సామాన్యముగ కుట్టనము గుణన పర్యాయ మగుటచే కుట్టకశబ్దమున్ను గుణకవాచకమైనను ఇట్టిప్రశ్నము లందలి గుణకమునే కుట్టకమని పూర్వాచార్యులు వ్యవహరించిరి.

భాజ్యోహారః క్షేపకశ్చాపవర్త్యాః కేనాప్యాదౌ సంభవే కుట్టకార్థం।
యేనచ్ఛిన్నౌ భాజ్యహారౌ నతేన క్షేపశ్చేత్ తద్దుష్టముద్దిష్టమేవ॥ ౧౩౦॥

టీ॥ కుట్టకార్థం = కుట్టకనిమిత్తము, ఆదౌ = మొదట, సంభవే = సంభవము(వీలు) గలయెడ, కేనాపి = ఏదేనిఒకానొకసంఖ్యచే, భాజ్యః హారః క్షేపకశ్చ = భాజ్యము హారము క్షేపము (కలుపదగినదిగాని తీసివేయదగినదిగాని) న్ను, అపవర్త్యాః = అపవర్తింపదగినవి. యేన = ఏసంఖ్యచే, భాజ్యహారౌ = భాజ్యహారములు, ఛిన్నౌ = అపవర్తింపబడినవో, తేన = ఆసంఖ్యచే క్షేపః న(ఛిన్నః) చేత్ = క్షేపమపవర్తింపబడనిచో తదుద్దిష్టం = ఆప్రశ్నము, దుష్టమేవ = దుష్టమైనదియ.

202. ప్ర. కుట్టకమునందు తొలుత ఒక మహత్తమాపవర్తనాంకముచే భాజ్యహారక్షేపముల నపవర్తింపుము. భాజ్యహారముల అపవర్తనాంకముచే క్షేప మపవర్తింపబడనిచో నాప్రశ్నము సరియైనది గాదు.

ఉపపత్తి: భాజ్య = భా, హార = హా, క్షేప = క్షే, గుణక = గు లబ్ధి = ల, చెప్పబోవు కుట్టకప్రశ్న ప్రకారము

$$\frac{గు \times భా \pm క్షే}{హా} = ల \quad \therefore \quad గు \times భా \pm క్షే = ల \times హా$$

అపవర్తనాంకము = ఇష్టాంకము = ఇ అనుకొనుచో

$$\frac{గు \times భా}{ఇ} \pm \frac{క్షే}{ఇ} = \frac{ల \times హా}{ఇ}$$ అగుచున్నది.

దీనింబట్టి భాజ్యహారక్షేపములు 3డును అపవర్తింపబడవలయుననియు అట్లు హారభాజ్యము లపవర్తింపబడి క్షేప మపవర్తితము కానిచో పక్షద్వయమునకును సామ్యము సంభవింపదనియు స్పష్ట మగుచున్నది.

అపవర్తనసూత్రమ్.

పరస్పరం భాజితయో ర్యయో ర్యశ్శేష స్తయోస్స్యాదపవర్తనంసః।
తేనాపవర్తేనవిభాజితౌ యౌ తౌ భాజ్యహారౌ దృఢసంజ్ఞికౌస్తః॥ ౧౩౧॥

టీ యయోః = ఏరెండురాసులు, పరస్పరంభాజితయోః = అన్యోన్యము భాగింపబడినవగుచుండ, యః = ఏ, శేషః = శేషము(అగునో) తయోః = ఆ రెండురాసులకు, సః = ఆశేషరాశి. అపవర్తనం స్యాత్ = అపవర్తనమగును. తేన అపవర్తేన = ఆఅపవర్తనాంకముచే, యౌ భాజ్యహారౌ = ఏభాజ్యహారములు విభాజితౌ = భాగింపబడినవో, తౌ = ఆభాజ్యహారములు, దృఢసంజ్ఞకౌ స్తః = దృఢభాజ్యహారములను సంజ్ఞగలవి యగుచున్నవి.

203. ప్రి. (1) రెండురాసుల నన్యోన్యము భాగించుటచే తుదనగు శేషము అపవర్తనము (54 ప్రి. చూ)

(2) ఆఅపవర్తనముచే నపవర్తింపబడిన భాజ్యహారములుదృఢభాజ్యహారము లగును. (52 ప్రి. 2 చూ. 54 ప్రి. చూ).

(అట్టి అపవర్తనముచే భాజ్యహారక్షేపములను అపవర్తింపవలయును.)

మిథోభజేత్తౌదృఢభాజ్యహారౌ యావద్విభాజ్యేభవతీహరూపం।
ఫలాన్యథోధస్తదధోనివేశ్యః క్షేప స్తథాంతేఖముపాంతిమేన॥ ౧౩౨॥
స్వోర్ధ్వేహతేంత్యేనయుతేతదంత్యంత్యజేన్ముహుస్స్యాదితిరాశియుగ్మం
ఊర్ధ్వోవిభాజ్యేనదృఢేనతష్టఃఫలం గుణస్స్యాదధరోహరేణ॥ ౧౩౩॥
ఏవంతదైవాత్రయదాసమాస్తా స్స్యుర్లబ్ధయశ్చేద్విషమాస్తదానీం।
యథాగతౌలబ్ధిగుణౌవిశోధ్యౌ స్వతక్షణాచ్ఛేషమితౌతుతౌస్తః॥ ౧౩౪

టీ॥ ఇహ = ఈపరస్పరభజనమునందు, యావత్ విభాజ్యే రూపం భవతి = ఎప్పుడు భాజ్యస్థానమున ఒకటి యగునో, తావత్ = అంతవరకును, తౌ దృఢ భాజ్యహారౌ = ఆదృఢభాజ్యహారములను, మిథః భజేత్ = పరస్పరము భాగింప వలయును. ఫలాని = (ఆపరస్పరభజనము వలననైన) లబ్ధములు, అధోధః = ఒక దానికిందనొకటిగ వ్రాయదగినది. తదధః = వాటికిందుగ, క్షేపః నివేశ్యః = క్షేపమువ్రాయదగినది. అంతే ఖం తథా = తుదను శూన్యము అట్లు వ్రాయదగినది,

ఉపాంతిమేన = తుదియంకెకుపైనున్న యంకెచే. స్వోర్ధ్వే హతే = ఉపాంతిమమునకు పైనున్న యంకెగుణింపబడి, అంత్యేన యుతే = తుదియంకెతో కలుపబడినదగుచుండ, తదంత్యం త్యజేత్ = ఆతుదియంకెను విడువవలయును. ఇతి = ఇట్లు, ముహుః = తిరుగ తిరుగ చేయగా, రాశియుగ్మం స్యాత్ = రెండురాసులగును.

దృఢేన విభాజ్యేన = దృఢభాజ్యముచే, ఊర్ధ్వః ¶ తష్టః = పైరాశి శేషింపచేయబడినదై, ఫలం = లబ్ధమగును. అపరః = క్రిందిరాశి, హారేణ తష్టః = దృఢభాజకముచే శేషింపచేయబడినదై, గుణః = గుణకము, స్యాత్ = అగును.

యదా అత్ర తౌ లబ్ధయః సమాః స్యుః = ఎప్పుడు దృఢభాజ్యభాజకముల పరస్పరభజనమందు ఆలబ్ధములు సరిసంఖ్యగలవి యగునో, తదైవ ఏవం = అపుడే ఇట్లు (గుణలబ్ధులగును) విషమాశ్చేత్ = బేసిసంఖ్యగలవి యగుచో, తదానీం = అపుడు, యథాగతౌ లబ్ధిగుణౌ = యథాప్రకారముగ వచ్చిన లబ్ధిగుణకములు స్వతక్షణాత్ విశోధ్యౌ = తమతమ (తక్షణముల) భాజకములవలన వ్యవకలింపదగినవి. తౌ తు శేషమితౌ స్తః = ఆలబ్ధగుణకములు శేషములతో సమములై యగుచున్నవి.

204. ప్ర. లబ్ధగుణకముల గనుగొను పద్ధతి.

(1) దృఢహారముచే దృఢభాజ్యమును భాగించి ఆశేషముచే పూర్వహార

¶ లబ్ధములతో బనిలేక శేషముతోడనే ప్రయోజనముగల భాగహారము తక్షణము. అట్లు శేషముకొరకు భాగింపబడినరాశి తష్టము. (తష్టింపబడినది) అట్లుభాగించుసంఖ్యయు, తక్షణము. తక్షణమనగా చెక్కుట. కావున శేషములు మిగులుచుటకును ఈపదము వాడబడియుండును.

మును భాగింపుచు ఇట్లు (83 ప్ర. ఉదాహరణమునందువలె) తుదను 1టి శేషమగువరకును భాగించి ఆలబ్ధములను నిలువుగ నొకపంక్తిగ వ్రాయుము.

(2) ఆలబ్ధములకు క్రిందుగ క్షేపము, ఆక్షేపమునకు క్రిందుగ సున్నను వ్రాయుము ఈనిలువు పంక్తి వల్లియని చెప్పబడుచున్నది.

(3) ఆవల్లియందు ఉపాంతిమాంకము (తుదియంకెకు పైయంకె)చే దానికి పైనున్న యంకెను గుణించి అందు అంత్యాంకమును కలుపుము. పిమ్మట అంత్యాంకమును విడువుము. ఇపుడు ఆగుణించి కలుపగానగు సంఖ్య అంత్యాంక మగును.

(4) ఇట్లు క్రిందినుండి వల్లియందు పైయంకెవరకును చేయగా రెండురాసు లగును.

(5) ఆరాసులలో పైరాశిని దృఢభాజ్యముచే తష్టింప (భాగింప)నగు శేషము లబ్ధము. క్రిందిరాశిని దృఢహారముచే తష్టింపనగు శేషము గుణకము. (ఇట్లు తష్టించుటలో రెండురాసులవలనను లబ్ధము ఒకసంఖ్యయే గ్రహింపవలయును)

(6) వల్లినిమిత్తము దృఢభాజ్యహారముల పరస్పరభజనమునందు వచ్చిన లబ్ధములసంఖ్య (ఎన్నిలబ్ధములో ఆసంఖ్య)సరిసంఖ్యయగుచో పైప్రకారము లబ్ధగుణకములగును. బేసిసంఖ్యయగుచో పూర్వప్రకారమువచ్చిన లబ్ధగుణకములను తమతమతక్షణములవలన వ్యవకలింపుము. ఆశేషములు లబ్ధగుణకము లగును.

ఉపపత్తి: 209 ప్ర. చూడుము.

ఉదాహరణమ్.

ఏకవింశతియుతంశతద్వయం యద్గుణంగణకపంచషష్టియుక్।
పంచవర్జితశతద్వయోద్ధృతం శుద్ధిమేతిగుణకంవదాశుతమ్॥ ౧౧౮॥

తా॥ గణకుడా ! 221 ఈసంఖ్యను ఏగుణకముచే గుణించి 65ను కలిపి 195చే భాగింప నిశ్శేషమగునో ఆగుణకమును చెప్పుము.

న్యాసః. భాజ్యః ౨౨౧ హారః ౧౯౫ క్షేపః ౬౫

అత్ర పరస్పరభాజితయోర్భాజ్య ౨౨౧ భాజకయోర్౧౯౫ శ్శేషః౧౩ అనేన భాజ్యహారక్షేపా అపవర్తితా జాతాః భాజ్యః ౧౭

హారః౧౫ క్షేపః౫ అనయో ర్దృఢభాజ్యహారయోః పరస్పరభక్తయో ర్లబ్ధా స్యథోథ స్తదధః క్షేపః తదధ శ్శూన్యం నివేశ్య మితి న్యస్తే జాతా వల్లీ.

౧	ఉపాంతిమేన స్వోర్ధ్వేహత ఇత్యాదికరణేన జాతం రాశిద్వయం ౪౦, ౩౫ ఏతౌ దృఢభాజ్యహారాభ్యాం తష్టౌ జాతౌ లబ్ధి
౭	గుణౌ ౬, ౫ ఏతయో స్స్వతక్షణ మిష్టగుణం క్షేపఇత్యథవా
౫	లబ్ధిగుణౌ ౨౩, ౨౦ వా ౪౦, ౩౫ ఇత్యాది.
౦	

ఉదా: $\dfrac{221 \times \text{యా} + 65}{195} = \text{కా}$ యా = గుణకము ? కా = లబ్ధము ?

శేషములేకుండు గుణకలబ్ధములెవ్వి ? అని ప్రశ్నము.

పైపద్ధతిప్రకారము భాజ్యము 221 భాజకము 196 వీటియపవర్తనము 13 దీనిచే పైభాజ్యభాజకముల నపవర్తింప దృఢభాజ్యము15 దృఢహారము15 క్షేపము నపవర్తింప 5 అపవర్తితక్షేపము. దృఢభాజ్య భాజకముల పరస్పరము భాగింప లబ్ధములు 1, 7 ఇట్లు రెండులబ్ధములు వచ్చినవి. తుదను 1టి శేషము మిగిలినది. భాగహారము సమాప్తి చేయబడినది. ఈలబ్ధములు వాటికిౕంద అపవర్తిత క్షేపము. దానికిౕందశూన్యము. ఇట్లు నిలువుపంక్తిగ వ్రాయగా వల్లి యగుచున్నది.

```
15) 17 (1
    15
    --
     2) 15 (7
        14
        --
         1
```

| 1 |
| 7 |
| 5 |
| 0 |

ఈవల్లియందు ఉపాంతిమము 5చే దానిపైయంకె 7ను గుణించి అందు అంత్యాంకమగు శూన్యమును కలుప 35 ఇపుడు శూన్యమును విడువగా వల్లియందు 1, 35, 5 ఇవిమాత్రము కలవు. ఇందుపాంతిమము 25చే దానికిపైనున్న అంకె 1టిని గుణింప 35 ఇందు అంత్యాంకము 5ను కలుప 40 ఇది ఊర్ధ్వరాశి. 35 ఇది కిౕందిరాశి. ఈరెండుసంఖ్యలే వల్లియందు కలవు. ఇందు పైసంఖ్య 40ను దృఢభాజ్యము 17చే భాగింప 2 లబ్ధము 6 శేషము. కిౕందిసంఖ్య 35ను దృఢహారము 15చే తష్టింప 2లబ్ధము 5శేషము. కావున వల్లినిమిత్తమగు లబ్ధములు సరిసంఖ్య గలవి యగుటచే ఈతష్టింపగానగు శేషములే 6, 5 లబ్ధగుణకము లగుచున్నవి.

మరియు "ఇష్టాహతస్వస్వహరేణ యుక్తే" ఇత్యాది ముందుసూత్రముచే (209 ప్ర. చూ) ఇష్టాంకముచే తమతమతక్షణములగు దృఢభాజ్యహారముల గుణించి అం దీలబ్ధగుణకముల కలిపినను లబ్ధిగుణకము లగును కావున

1టి ఇష్టమగుచో $(1 \times 17 + 6) = 23 =$ లబ్ధము. $(1 \times 15 + 5) = 20 =$ గుణకము.

ఇష్టమగుచో $(2 \times 17 + 6) = 40 =$ ల . $(2 \times 15 + 5) = 35 =$ గు.

ఇట్లు బహువిధములుగ నగును. ఇట్లింతటను గ్రహింపవలయును.

రుజువు: $\dfrac{221 \times \text{యా} + 65}{195} = \text{కా}$ యా = 5, కా = 6 కావున

$$\frac{221 \times 5 + 65}{195} = \frac{1105 + 65}{195} = \frac{1170}{195} = 6$$ శేషములేదు.

ఇట్లు గుణకలబ్ధముల రుజువును చూచుకొనవలయును.

కుట్టకాంతరే కరణసూత్రం.

భవతికుట్టవిధేర్యుతిభాజ్యయో స్సమపవర్తితయోరపివాగుణః।
భవతియోయుతిభాజకయోః పునస్సచభవేదపవర్తనసంగుణః॥ ౧౩౫॥

టీ॥ వా = లేక, యుతిభాజ్యయో స్సమపవర్తితయోరపి = క్షేపభాజ్యములు అపవర్తింపబడినను, కుట్టవిధేః = కుట్టకపద్ధతివలన, గుణః = గుణకము, భవతి = అగుచున్నది. యుతిభాజకయోః (సమపవర్తితయోః) పునః = క్షేపభాజకములపవర్తింపబడినవగుచో, యః గుణః భవతి = ఏగుణక మగుచున్నదో సచ = అదియును. అపవర్తనసంగుణః = అపవర్తనాంకముచే గుణింపబడినదై, గుణః భవతి = గుణకమగుచున్నది.

205. ప్ర. (1) భాజ్యహారక్షేపములు 3డును నపవర్తింపబడక భాజ్యక్షేపములుగాని భాజకక్షేపములుగాని అపవర్తింపబడినచో నైనను కుట్టకపద్ధతివలన వాటివలన గుణకలబ్ధముల సాధింపుము.

(2) భాజ్యక్షేపములను మాత్రమే అపవర్తించినపుడు అగు గుణకలబ్ధములలో గుణకము సరియైనది యగును. లబ్ధమును ఆఅపవర్తనాంకముచే గుణింప సరియగు లబ్ధమగును.

(3) భాజకక్షేపములనుమాత్రమే అపవర్తించినచో నగు గుణకలబ్ధులలో లబ్ధము సరియైనది యగును. గుణకమును ఆఅపవర్తనాంకముచే గుణింప సరియగు గుణకమగును.

ఉపపత్తి: (209 ప్రి) తరువాత చూడుము.

ఉదాహరణమ్

శతంహతంయేనయుతంనవత్యా వివర్జితంవా విహృతంత్రిషష్ట్యా।
నిరగ్రకంస్యాద్వదమేగుణంతం స్పష్టంపటీయాన్యదికుట్టకేసి॥ ౧౧౧॥

తా॥ 100ను ఏసంఖ్యచే గుణించి 90ని కలిపిగాని తీసివేసిగాని 63చే భాగింప నిశ్శేషమగునో ఆగుణకమును నీవు కుట్టకమునందు సమర్థుడవగుచో స్పష్టముగ చెప్పుము.

న్యాసః. భాజ్యః౧౦౦ హారః౬౩ క్షేపః౯౦ జాతౌ పూర్వవల్లబ్ధిగుణౌ ౩౦,౧౮ అథవా భాజ్యక్షేపౌ దశభిరపవర్త్య భాజ్యః ౧౦ క్షేపః౯ పరస్పరభజనాల్లబ్ధాని క్షేపం ఖం చాధోధో నివేశ్య

౦
౬
౩
౯
౦

జాతా వల్లీ పూర్వవల్లబ్ధో గుణః౪౫ లబ్ధిర్నగ్రాహ్యా. అత్ర లబ్ధయో విషమాజాతాః. అతో గుణః౪౫ స్వతక్షణాదస్మాత్౬౩ ద్విశోధితో జాతో గుణ స్స ఏవ ౧౮ గుణఘ్నభాజ్యే క్షేప ౯౦ యుతే హార ౬౩ భక్తే లబ్ధిశ్చ॥ ౩౦

అథవా హారక్షేపౌ నవభిరపవర్తితౌ భా౧౦౦ క్షేప౧౦ హా౭ అత్ర లబ్ధిక్షేపాణాం వల్లీ.

౧౪
౩
౧౦
౦

లబ్ధో గుణః ౨ క్షేపాపవర్తనేన౯ గుణితో జాత స్స ఏవ గుణః౧౮

౧
౨
౧
౦

అథవా భాజ్యక్షేపౌ పునర్హారక్షేపౌ చాపవర్తితౌ జాతౌ భా౧౦ క్షే౧ హా౭ అతః పూర్వవద్వల్లీ జాతా. గుణశ్చ ౨ హారక్షేపాపవర్తనేన౯ గుణితో జాత స్స ఏవ గుణః౧౮ గుణనభజనాభ్యాం లబ్ధిశ్చ౩౦ గుణలబ్ధ్యోః స్వహారా

విష్టగుణౌ క్షేపా విత్యథవా గుణలబ్ధీ ౮౧, ౧౩౦ అథవా ౧౪౪, ౨౩౦ ఇత్యాది.

ఉదా: భాజ్యము100 హారము63 క్షేపము90

ఇచట అపవర్తనము చేయకయే హారభాజ్యముల నన్యోన్యము భాగించుట వలన నైన లబ్ధములు 1, 1, 1, 2, 2, 1 ఇట్లు 6 లబ్ధములు వచ్చినవి. వీటిని నిలువుగ పంక్తిగ వ్రాసి క్రింద క్షేపమును దానిక్రిందుగ శూన్యమును ఇట్లు వల్లిని వ్రాసి ఉపాంతిమముచే దానిపైరాశిని గుణించి అంతిమమును కలుపుచు చేయగా నైన ఆ యా వల్లీస్వరూపములును రాశియుగ్మమును చూపబడుచున్నవి.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	
1	1	1	1	1	1	2430	రాశి
1	1	1	1	1	1530	1530	యుగ్మం
1	1	1	1	900	90		
2	2	2	630	630			
2	2	270	270				
1	90	90					
90	90						
0							

పైరాశి 2430ని భాజ్యము 100చే భాగింపనగు శేషము 30 లబ్ధము క్రిందిరాశి 1530ని హారము 63చే భాగింపనగు శేషము 18 గుణకము.

ఇవి 90 ధనక్షేపమునందు గుణకలబ్ధము లగుచున్నవి. ఋణక్షేపమగుచో పద్ధతి ముందు (206 ప్రి, చూ) చెప్పబడుచున్నది.

లేక పైపద్ధతిచే భాజ్య100 క్షేపము90లను 10చే నపవర్తింప భాజ్యము10 క్షేపము9 హారము63 ఈహారభాజ్యముల పరస్పరభాగహారమువలన లబ్ధములు 0, 6, 3 ఇట్లు బేసి లబ్ధము లైనవి వీటిచే 27, 171 ఇందు పైరాశి 27ను భాజ్యము 10చే తక్షింప శేషము7 క్రిందిరాశి 171ని హారము 63చే తక్షింప 45 శేషము. ఇచట పరస్పరభజనమువలననైన లబ్ధములు బేసిసంఖ్యగలవి యగుటచే (204 ప్రి 6 చూ) తమతమ భాజకములవలన వ్యవకలింప $10 - 7 = 3$ ఇట్లు $63 - 45 = 18$ మొదటి శేషము 3ను అపవర్తనాంకము 10చే గుణింప 30లబ్ధము 18 గుణకము.

0
5
3
9
0

లేక హారం63 క్షేపము 90లను 9చే నపవర్తింప హారము7 క్షేపము10 భాజ్యము100 ఇపుడును పూర్వప్రకారమువల్లి.

14
3
10
0

పైప్రకారముగనైన రాశియుగ్మము 430, 30 పైరాశి 430ని భాజ్యముచే తప్పింప శేషము 30లబ్ధము క్రిందిరాశి 30ని హారము 9చే తప్పింప శేషము 2, దీనిని అపవర్తనాంకము 9చే గుణింప 18 గుణక మగుచున్నది.

లేక తొలుత భాజ్యక్షేపములను 10చే నపవర్తింప 10, 9 భాజ్యక్షేపములు ఈక్షేపము 9నున్న హారము 63నున్న తిరుగ 9చే నపవర్తింప 1. 7 క్షేపహారములు. ఇపుడు భాజ్యము 10 హారము7 క్షేపము1 వీటివలనపైప్రకారము వల్లి:—

1
2
1
0

ఈవల్లివలన పైప్రకారము రాశియుగ్మము 3. 2 ఇందు పై రాశి 3ని దృఢభాజ్యము 10చే తప్పింప శేషము 3 లబ్ధముగ వచ్చినది. క్రిందిరాశి 2ని దృఢహారము 7చే తప్పింప శేషము 2 గుణకముగవచ్చినది. ఈరానులలో లబ్ధముగావచ్చిన 3ను భాజ్యక్షేపముల అపవర్తనము 10చే గుణింప 30 సరియగు లబ్ధ మగుచున్నది. గుణకముగవచ్చిన 2ను హారక్షేపముల అపవర్తనము 9చే గుణింప 18 సరియగు గుణక మగుచున్నది.

(209 ప్ర. చే) 1టి ఇష్టాంకమగుచో గుణకము81, లబ్ధము 130

2 ఇష్టాంకమగుచో గుణకము114, లబ్ధము 130

కుట్టకాంతరే కరణసూత్రం వృత్తార్ధమ్.

క్షేపజే తక్షణాచ్ఛుద్ధే గుణాప్తీ స్తో వియోగజే॥ ౧౩౫

టీ॥ క్షేపజే = ధనక్షేపమువలననైన గుణలబ్ధములు, తక్షణాచ్ఛుద్ధే = తమ తమభాజకములవలన వ్యవకలింపబడినవై, వియోగజే గుణాప్తీ స్తః = ఋణక్షేపమందైన గుణకలబ్ధము లగును.

206. ప్ర. ధనక్షేపమునందైన గుణకలబ్ధములను (204 ప్ర. 6 వలె) తమ తమ తక్షణము (భాజకము)లవలన వ్యవకలించినచో నగు శేషములు ఋణక్షేపమునందైన గుణకలబ్ధము లగును. (209 ప్ర. ఉపపత్తి చూ)

అత్ర పూర్వోదాహరణే నవతిక్షేపే యౌ లబ్ధిగుణౌ జాతౌ ౩౦, ౧౮ ఏతౌ స్వతక్షణాభ్యాం ౧౦౦, ౬౩ శోధితౌ యే శేషే తన్మితౌ లబ్ధిగుణౌ నవతిశోధనే జ్ఞాతవ్యౌ ౭౦, ౪౫ ఏతయోరపి స్వతక్షణం క్షేప ఇత్యథవా ౧౭౦, ౧౦౮ అథవా ౨౭౦, ౧౭౧

పైయుదాహరణమునందు 90ధనక్షేపమగునపుడైన గుణకము 18,లబ్ధము30 వీటిని తమతమభాజకములవలన వ్యవకలింపగా 63 — 18 = 45 ఋణక్షేపమగునపుడు గుణకము. 100 — 30 = 70 ఋణక్షేపమగునపుడు లబ్ధము అగుచున్నవి. ఇవియును (209 ప్ర. చే) ఇష్టాంకమునుబట్టి బహువిధము లగును.

1టి ఇష్టమగుచో $1 \times 63 + 45 = 108 =$ గు, $1 \times 100 + 70 = 170 =$ ల

2 ఇష్టమగుచో $2 \times 63 + 45 = 171 =$ గు, $2 \times 100 + 70 = 270 =$ ల

ద్వితీయోదాహరణమ్

యద్గుణా గణకషష్టి రన్వితా వర్జితాచ దశభి ష్షడుత్తరైః। [౧౧౨
స్యాత్త్రయోదశహృతానిరగ్రకాతంగుణంకథయమేపృథక్పృథక్॥

తా॥ గణకుడా ! 60ని ఏసంఖ్యచేగుణించి 16ను కలుపగాగాని వ్యవకలింపగాగాని యగుసంఖ్యను 13చే భాగింప నిశ్శేషమగునో ఆగుణకసంఖ్యను నాకు వేర్వేరుగ చెప్పుము.

న్యాసః. భా౬౦ హా౧౩ క్షే౧౬ ప్రాగ్వజ్జాతే గుణాప్తీ ౨,౮ అత్రలబ్ధయో విషమా అతఏతేగుణాప్తీ స్వతక్షణాభ్యాం ౧౩, ౬౦ శోధితే జాతే ౧౧, ౫౨ ఏవం షోడశక్షేపే; ఏతే ఏవ స్వహారాభ్యాం ౧౩, ౬౦ శోధితే జాతే షోడశవిశుద్ధా ౨, ౮

ఉదా: భా60 హా13 ధనక్షేపము16

వీటివలననైన వల్లి :—

4
1
1
1
1
16
0

వల్లివలన పూర్వప్రకారము రాశియుగ్మము 368, 80 పైరాశి 368ని భాజ్యము 60 చేతను క్రిందిరాశి 80ని హారము 13చేతను తప్పింప శేషములు 8 లబ్ధము, 2గుణకము. వల్లికొరకైన లబ్ధములు విషమము లగుటచే తమతమహారములవలన వ్యవకలింప 60 — 8 = 52 లబ్ధము 13 — 2 = 11 గుణకము, ఇవి క్షేపము

ధనమగుచో నైన లబ్ధగుణకములు వీటిని తిరుగా తమతమహారములగు భాజ్యహార ములవలన వ్యవకలింప 8, 2 లబ్ధగుణకములు ఋణ క్షేపమం దగుచున్నవి.

కుట్టకాంతరే కరణసూత్రం సార్ధవృత్తం

గుణలబ్ధ్యో స్సమం గ్రాహ్యం ధీమతా తక్షణేఫలం॥ ౧౩౬॥
హారతష్టే ధనక్షేపే గుణలబ్ధీతు పూర్వవత్।
క్షేపతక్షణలాభాఢ్యా లబ్ధి శ్శుద్ధౌ తు వర్జితా॥ ౧౩౭॥

టీ॥ తక్షణే = తష్టింపచేయుట (భాగించుట)యందు, ధీమత = బుద్ధి మంతునిచే, గుణలబ్ధ్యోః = గుణకలబ్ధములవిషయమై, సమం ఫలం 'గ్రాహ్యం = సమమగు లబ్ధము గ్రహింపదగినది.

ధనక్షేపే = ధనక్షేపము, హారతష్టే = హారముచే తష్టింపచేయబడినపుడును పూర్వవత్ = పైప్రకారము, గుణలబ్ధీ = గుణకలబ్ధములు (సాధింపదగినవి) తు = కాని, లబ్ధిః = లబ్ధము, క్షేపతక్షణలాభాఢ్యా = క్షేపమును హారముచే భాగింపనగు లబ్ధముతో కూర్పదగినది.

శుద్ధౌతు = ఋణక్షేపమునందుమాత్రము, వర్జితా = వ్యవకలింపదగినది.

207. ప్రి. (1) గుణకలబ్ధములకొరకు వల్లివలననగు రెండురాసులలో క్రింది రాశిని హారముచేతను పైరాశిని భాజ్యముచేతను తష్టింపచేయునపుడు లబ్ధమొకవిధముగనే గ్రహింపవలయును. ఒకరాశివలన పెద్దసంఖ్యయు మరియొకరాశివలన చిన్నసంఖ్యయు లబ్ధములు లభించుచున్నను పెద్దసంఖ్యను గ్రహింపక చిన్నసంఖ్యతో సమమగు లబ్ధమునే గ్రహింపవలయును.

(2) ధనక్షేపము హారముకంటె పెద్దదియగుచో హారముచే ధనక్షేపమును భాగింపగానగు శేషమును క్షేపముగ భావించి గుణలబ్ధములను పైప్రకారము సాధింపుము. ఈలబ్ధమును, క్షేపమును హారముచే భాగింపగానగు లబ్ధముతో గలుపుము. అపుడు సరియగు లబ్ధమగును.

(3) ఋణక్షేపమైనపుడును పైప్రకారము గుణకలబ్ధముల సాధించి తమ తమహారములవలన, వ్యకలింపగా నగు గుణకలబ్ధములలో లబ్ధమువలన, హారముచే క్షేపమును భాగింపగానగు లబ్ధమును వ్యవకలింప సరియగు లబ్ధ మగును-

ఉపపత్తి 209 ప్రి. చూ.

ఉదాహరణమ్.

యేన సంగుణితాః పంచ త్రయోవింశతిసంయుతాః।
వర్జితావా త్రిభి ర్భక్తా నిరగ్రా స్స్యు స్స కో గుణః॥౧౧౩॥

తా॥ ఏసంఖ్యచే 5ను గుణించి 24ను కలిపిగాని వ్యవకలించిగాని 3చే భాగింప నిశ్శేషమగునో ఆగుణకసంఖ్య యెద్ది ?

న్యాసః. భాజ్యః౫ హారః౩ క్షేపః౨౩ అత్రవల్లీ పూర్వవ జ్జాతం రాశిద్వయం ౪౬, ౨౩ ఏతౌ భాజ్యహారాభ్యాం తష్టౌ. అత్రాధోరాశౌ ౨౩ త్రిభిస్తష్టే సప్త లభ్యంతే. ఊర్ధ్వరాశౌ ౪౬ పంచభిస్తష్టే నవ లభ్యంతే.	౧ ౧ ౨౩ ౦

తేత్ర నగ్రాహ్యః "గుణలబ్ధ్యో స్సమం గ్రాహ్యం ధీమతా తక్షణే ఫల"మితి. అత స్సప్తైవ గ్రాహ్యాః. ఏవంజాతే గుణాప్తీ ౨, ౧౧ క్షేపజే తక్షణాచ్ఛుద్ధే విశుద్ధౌ జాతే ౧, ౬ "ఇష్టాహతస్వస్వహారేణ యుక్తే" ఇతి ద్విగుణితౌ స్వహారాక్షేపౌ యథా ధనలబ్ధిస్స్యాదితి జాతే ౭, ౪ ఏవంసర్వత్ర.

అథవా హారతష్టే ధనక్షేపే ఇతి న్యాసః. భాజ్యః౫ హారః౩ క్షేపః౨ పూర్వవజ్జాతే గుణాప్తీ ౨, ౪ ఏతే స్వహారాభ్యాం శోధితే విశుద్ధిజే జాతే ౧, ౧ "క్షేపతక్షణలాభాఢ్యాలబ్ధి"రితి జాతేక్షేపజే ౨,౧౧ "శుద్ధౌతువర్జితే" ౧,౬ ధనలబ్ధ్యర్థం ద్విగుణేస్వహారే క్షేపే క్షిప్తే సతి జాతే ౭, ౪

ఉదా: భా5 హా3 క్షే23 వీటిచే వల్లి:—

(1) పైప్రకారము రాసులు 46, 23 ఇందు క్రిందిరాశి 23ని హారము 3చే తష్టింప 7 లబ్ధము 2 శేషము. పైరాశి 46ని భాజ్యము5 చే తష్టింప 9లబ్ధము వచ్చుచున్నది. కాని 9ని గ్రహింపకూడదు. 7ను మాత్రమే గ్రహింపవలయును. అట్లు గ్రహింప	1 1 23 0

శేషము11 కావున గుణకలబ్ధములు 2, 11 అగుచున్నవి ఇవి ధనక్షేపమందు.

ఋణక్షేపమునందు అగుణకలబ్ధములను తమతమహారము 3, 5 ల వలన వ్యవకలింప గుణకము1, లబ్ధము 5 — 11 = — 6 ఇట్లు ఋణలబ్ధమగుచున్నది. ధనలబ్ధము అగుటకై (209 ప్ర) ముందుపద్ధతిచే ఇష్టాంకము2 కల్పించి దీనిచే తమతమహారముల గుణించి కలుపగా

$2 \times 3 + 1 = 7$ గుణకము, $2 \times 5 + (-6) = 4$ లబ్ధము.

(2) లేక పైపద్ధతి (2)చే హారము 3చే క్షేపము 23ను భాగింప లబ్ధము7 శేషము2 దీనిని క్షేపముగ భావించి చేయు రాశియుగ్మము 4, 2 వీటిని భాజ్యహారములచే తక్షింప లబ్ధములు (0) కావున నివియే శేషములు. ఇందు లబ్ధము 4తో, హారముచే క్షేపమును భాగింపనగులబ్ధము 7ను కలుప 11లబ్ధమగుచున్నది. ఇట్లు ధనక్షేపమున గుణకలబ్ధములు 2, 11 అగుచున్నవి.

(3) ఋణక్షేపమునందు పైగుణకలబ్ధముల 2, 4 ను తమతమహారముల 3, 5 వలన వ్యవకలింపగా 1, 1 ఇందలిలబ్ధము 1టివలన. క్షేపమును భాగింపగానగు లబ్ధము 7ను వ్యవకలింపగా 1 — 7 = — 6 అగుచున్నది. ఇట్లు పైప్రకారముగనే గుణకలబ్ధములు 1, — 6ను వచ్చినవి. ఇష్టాంకము 2ను కల్పించి 209 ప్ర. చే సాధింప గుణకము7, లబ్ధము4

(ఇచట ధనర్ణ సంకలన వ్యవకలనముల స్మరింపుము 94 ప్ర. 2 క్రింద చూ)

కుట్టకాంతరే కరణసూత్రం

క్షేపాభావోథవా యత్ర క్షేప శ్శుద్ధో హరోద్ధృతః।
జ్ఞేయ శ్శూన్యం గుణ స్తత్ర క్షేపో హారహృతః ఫలం॥ ౧౩౭॥

టీ॥ యత్ర క్షేపాభావః = ఏకుట్టకప్రశ్నయందు క్షేపముయొక్క లేక పోవుటయో అథవా = లేక, హరోద్ధృతః క్షేపః శుద్ధః = హారముచే భాగింపబడిన క్షేపము నిశ్శేషమగునో, తత్ర = అచట, శూన్యం = సున్న, గుణః = గుణకమై, జ్ఞేయః = తెలియతగినది. క్షేపః = క్షేపము, హారహృతః = హారముచే భాగింపబడినదై ఫలం = లబ్ధమగును.

208. ప్ర. కుట్టకప్రశ్నమునందు క్షేపము సున్నయైనను (లేకపోయినను) క్షేపమును హారముచేభాగింప నిశ్శేషమగుచున్నను అచట గుణకమునున్న యగును. క్షేపమును హారముచే భాగింపనగులబ్ధము లబ్ధమగును.

ఉపపత్తి:—క్షేపము శూన్యమగునపుడు 204 ప్ర. ప్రకారము భాజ్యహారములను పరస్పరము భాగింపగానగు లబ్ధములను వాటిక్రిందుగ క్షేపమగు శూన్యమును దానిక్రిందశూన్యమును వల్లిగా వ్రాయగా అందు ఉపాంతిమము క్షేపమగుటచే నదిశూన్యమే యగుచున్నది. కావున ఉపాంతిమముచే దాని పైరాశిని గుణించి అంతిమమును గలుపుచురాగా శూన్యగుణనపద్ధతి (95ప్ర.చూ) చే గుణలబ్ధులు శూన్యములగును,

క్షేపము హారముచేభాగింప నిశ్శేషమగుచున్నను "హారతష్టే ధనక్షేపే" అనుసూత్రము (207 ప్ర. 2 విధి)చే క్షేపమును హారముచే భాగింపగానగు శేషము సున్నయే క్షేపముగా కల్పింపబడుచుండుటచే గుణకము సున్నయే యగును. అప్రకారము లబ్ధమున్ను సున్నయే యగుచున్నది. కాని ఆలబ్ధమునందు ఆసూత్రముచే హారముచే క్షేపమును భాగింపనగు లబ్ధము కలుపదగియున్నది. కావున హారముచే క్షేపమును భాగింపనగు లబ్ధమే క్షేపమగుచున్నది.

ఇందును (209 ప్ర. చే) ఇష్టాంకకల్పనముచే గుణక లబ్ధములు మారుచున్నవి.

ఉదాహరణమ్

యేన పంచగుణితాః ఖసంయుతాః పంచషష్టిసహితాశ్చ తేథవా।
స్యుస్త్రయోదశహృతానిరగ్రకాస్తంగుణంగణక కీర్తయాశు మే॥౧౧౮

తా॥ గణకుడా! ఏసంఖ్యచే 5ను గుణించి సున్న(0)ను కలిపినను లేక 65ను కలిపినను 13చే భాగింప నిశ్శేషమగునో ఆగుణకమును నాకు శీఘ్రముగ చెప్పుము.

న్యాసః. భాజ్యః౫ హారః౧౩ క్షేపః ౦

క్షేపాభావే గుణాప్తీ ౦, ౦ వా ౧౩, ౫ వా ౨౬, ౧౦

న్యాసః. భాజ్యః౫ హారః౧౩ క్షేపః౬౫ "క్షేపశ్శుద్ధో హరోద్ధృతః। జ్ఞేయ శ్శూన్యం గుణ స్తత్ర క్షేపో హారహృతః ఫల"మితి జాతే గుణాప్తీ ౦, ౫ వా ౧౩, ౧౦ ఇత్యాది.

(1) ఉదా:—భాజ్యము5 హారము13 క్షేపము0 పైపద్ధతిప్రకారము గుణకము0 లబ్ధము0 లేక ముందుపద్ధతి (209 ప్రి.)చే 1టి ఇష్టమగుచో గుణకము13 లబ్ధము5 లేక 2 ఇష్టమగుచో 26గుణకము 10లబ్ధము.

(2) ఉదా:—భాజ్యము5 హారము13 క్షేపము65 ఇచట క్షేపము 65ను హారముచే భాగింప 5లబ్ధము. ఇదియే లబ్ధమగుచున్నది. గుణకము శూన్యము.

ఇందును ముందుపద్ధతి (209 ప్రి.)చే 1టి ఇష్టాంకమనుకొనుచో గుణకము13 లబ్ధము10, ఇట్లు 2ఇష్టమగుచో 26గుణకము 15లబ్ధము.

అత్ర కుట్టకే గుణలబ్ధ్యో రనేకత్వార్థం సూత్రం
ఇష్టాహతస్వస్వహరేణయుక్తే తే వా భవేతాం బహుధా గుణాప్తీ॥

టీ॥ వా = లేక, తే = పైపద్ధతులవలన లభించినగుణకలబ్ధములు, ఇష్టాహతస్వస్వహరేణ = ఇష్టాంకముచేగుణింపబడిన తమతమహారములతో, యుక్తే = కలుపబడినవియై, బహుధా = బహువిధములుగ, గుణాప్తీ = గుణలబ్ధములై, భవేతాం = అగుచున్నవి.

209. ప్రి. దృఢభాజ్యహారముల పరస్పరభజనముచేనైన లబ్ధములు, క్షేపము, తుదనుశూన్యము, ఇట్లుగ వ్రాయబడిన వల్లియందు ఉపాంతిమముచే దానికి పైసంఖ్యను గుణించుట, అందు అంతిమమును కలుపుట, ఇట్లు చేయుటవలన నైనరాశియుగ్మమునందు పైరాశికి దృఢభాజ్యము హారము; క్రిందురాశికి దృఢహారము హారము; అట్టి రెండు రాశులను ఆయాటిహారములచే వేర్వేరతష్టింపనగు శేషములు. లబ్ధము గుణకము అగుచున్నవి. అట్లుగుణకలబ్ధములు స్వహారములచే తష్టించుటవలన గలిగినవో అహారములు ఆగుణకలబ్ధముల సంబంధమైనవి యని వ్యవహరింపబడుచున్నవి.

ఏదేని ఒకసంఖ్యను ఇష్టాంకముగకల్పించి దానిచే గుణకసంబంధమగుహారమును గుణించి అందుగుణకమును కలుపుము. అది గుణకమగును. అట్లు లబ్ధసంబంధ మగు హారమును గుణించి అందు లబ్ధమును కలుప లబ్ధమగుచున్నది ఇట్లు ఇష్టాంకము మారినకొలదియు గుణకలబ్ధములు మారుచుండును.

భా॥ అస్య వ్యాప్తిః పూర్వ మేవ దర్శితా॥

తా॥ ఈసూత్రముయొక్క ప్రవృత్తి పూర్వమే చూపబడినది. ఆయా ఉదాహరణములందు ఈపద్ధతిచే గుణకలబ్ధములు చూపబడినవి.

ఉపపత్తి:—బీజగణితము అనేకవర్ణసమీకరణముచే

$\text{భాజ్య} = 100,\ \text{హార} = 63,\ \text{క్షేప} = 90,\ \text{గుణక} = \text{యా}\dagger\ \text{లబ్ధి} = \text{కా}$

$$\therefore \text{కా} = \frac{100 \times \text{యా} + \text{క్షే}}{63} = \text{యా} + \frac{37 \times \text{యా} + \text{క్షే}}{63}$$ ఇచట

$\frac{37 \times \text{యా} + \text{క్షే}}{63} = \text{నీ}$ అనుకొనుచో $\text{కా} = \text{యా} + \text{నీ}$ అగుచున్నది

ఇట్లు కల్పనలచేనగు ఆ యా సమీకరణములు చూపబడుచున్నవి.

(1) (2) (3)

$$\text{కా} = \frac{100 \times \text{యా} + \text{క్షే}}{63} = \text{యా} + \frac{37 \times \text{యా} + \text{క్షే}}{63} = \text{యా} + \text{నీ}$$

$$\text{యా} = \frac{63\ \text{నీ} - \text{క్షే}}{37} = \text{నీ} + \frac{26\ \text{నీ} - \text{క్షే}}{37} = \text{నీ} + \text{పీ}$$

$$\text{నీ} = \frac{37\ \text{పీ} + \text{క్షే}}{26} = \text{పీ} + \frac{11\ \text{పీ} + \text{క్షే}}{26} = \text{పీ} + \text{లో}$$

$$\text{పీ} = \frac{26\text{లో} - \text{క్షే}}{11} = 2\text{లో} + \frac{4\text{లో} - \text{క్షే}}{11} = 2\text{లో} + \text{హ}$$

$$\text{లో} = \frac{11\text{హ} + \text{క్షే}}{4} = 2\text{హ} + \frac{3\text{హ} + \text{క్షే}}{4} = 2\text{హ} + \text{శ్వే}$$

$$\text{హ} = \frac{4\ \text{శ్వే} - \text{క్షే}}{3} = \text{శ్వే} + \frac{\text{శ్వే} - \text{క్షే}}{3} = \text{శ్వే} + \text{చి}$$

ఇచట $\frac{\text{శ్వే} - \text{క్షే}}{3} = \text{చి} = 0$ అని కల్పించినచో

$\text{శ్వే} = 3\text{చి} + \text{క్షే} = \text{క్షే}$ అగుచున్నది.

† యా = యావక, కా = కాలక, నీ = నీలక, పీ = పీతక, హ = హరితక, శ్వే = శ్వేతక, లో = లోహితక, చి = చిత్రిక. ఇట్లు ఎరుపు,

(1) పైసమీకరణములలో రెండవసమీకరణస్వరూపములను, అందును హారితకవర్ణముయొక్క రెండవసమీకరణమునున్ను విమర్శింపగా "భాజ్యహారముల పరస్పరభజనమువలన నెపుడు 1టి శేషించునో అప్పుడ ఆవర్ణముయొక్క పరిమాణము అభిన్నముగ కల్పింపదగియుండును" అని తెలియుచున్నది. దీనిచే తుదకు 1టి శేషమగునందకును (54 పరి 3 అను చూ) పరస్పరము భాగహరింపదగినది యనుట (204 పరి 1విధి) ఉపపన్నమగుచున్నది.

(2) పైసమీకరణములందు భాజ్యహారముల పరస్పరభజనమువలన హా = క్షేప ఇట్లు అభిన్నమగు హారితకమానము తెలియబడినది. దానిచే విలోమముగ యా, కా, వర్ణముల పరిమాణముల నెఱుంగవచ్చును. యా = గుణక అనియు కా = లబ్ధి అనియు ఇదివరలో కల్పించుకొంటిమి. కావున గుణకలబ్ధములు తెలియుచున్నవి. అట్లు హా = క్షేప, శ్వే = క్షేప, చి = 0 ఇట్లు కల్పించి తృతీయస్వరూపముల నుత్థాపన చేయుటవలన యా = 17 క్షేప, కా = 27 క్షేప ఇట్లు గుణలబ్ధిపరిమాణము లగుచున్నవి. దీనిచే రాశియుగ్మ మగుననువరకును పద్ధతి (204 పరి 2,3,4 లు) ఉపపన్నమగుచున్నది.

(3) యా × భా + క్షే = కా × హా అగుచున్నది యని పైపరిదర్శనమువలన స్పష్టము. ఇందు ఇష్టాంకముచే గుణింపబడిన భాజ్యహారముల గుణనమును పక్షద్వయమునందును కలిపినను సామ్యము గలుగును కావున (7 పరి 2సి చూ)

$$\text{యా} \times \text{భా} + \text{క్షే} + \text{ఇ}.\text{భా}.\text{హా} = \text{కా} \times \text{హా} + \text{ఇ}.\text{భా}.\text{హా}$$

$$= \text{భా}(\text{యా} + \text{ఇ}.\ \text{హా}) + \text{క్షే} = \text{హా}\ (\text{కా} + \text{ఇ}.\ \text{భా})$$ అగుచున్నది.

మరియు మొదటచూపబడిన సమీకరణమునుబట్టి భాజ్యముయొక్క గుణకము గుణకమనియు హారముయొక్క గుణకము లబ్ధమనియు తెలియుచున్నది. కావున ఆపకారమే ఈపైసమీకరణమునందును చూచినచో

నలుపు, నీలము, పసుపు మొదలగురంగులను చెప్పు యావకాదిశబ్దముల మొదటి యక్షరములను ప్రాచీనులు బీజగణితమునందు ఉపయోగించియున్నారు. ఈ సంప్రదాయమునను సరించియే యావర్ణమునకుమారుగ Y అను అక్షరమును కావర్ణమునకు మారుగ X అక్షరమును పాశ్చాత్యులు ఉపయోగించుచున్నారు. అని చెప్పదగియున్నది.

(యా + ఇ.హా) = గుణక మనియు (కా + ఇ.భా) = లబ్ధ మనియు స్పష్టమగుచున్నది. అందు ఇ = 1 అనుకొనుచో గు = యా + హా అనియు ల = కా + భా అనియు సిద్ధించుచున్నది. ఇదివరలో యా = గు అనియు కా = ల అనియును 'కా' ఊర్ధ్వరాశియనియును 'యా' క్రిందిరాశియనియును నిరూపింపబడినది. కావున పైరాశిని భాజ్యము చేతను, క్రిందిరాశిని హారము చేతను

$$\frac{\text{కా} + \text{భా}}{\text{భా}}.\ \text{శేషము కా, ఇట్లు}\ \frac{\text{యా} + \text{హా}}{\text{హా}},\ \text{శేషము యా,}$$

ఇట్లు తప్పింప లబ్ధగుణకము లగు ననుట (204 పరి 5వి) ఉపపన్నమగుచున్నది

(4) ఇదివరలో
$$\left.\begin{array}{l}\text{యా} + \text{ఇ హా} = \text{గుణక}\\ \text{కా} + \text{ఇ}.\text{భా} = \text{లబ్ధి}\end{array}\right\}$$ అని చూపబడెను:

తొలుత యా = గుణక, కా = లబ్ధి అనియు చూపబడెను. దానింబట్టి

ఇష్టగుణితహారమును గుణకముతో చేర్ప గుణకమున్ను

ఇష్టగుణితభాజ్యమును లబ్ధముతో చేర్ప లబ్ధమున్ను

అగునని స్పష్టమగుటచే ఇష్టసంఖ్య ఏది కల్పించినను ఇష్టాంకమునుబట్టి గుణకలబ్ధములు మారుననుట (209 పరి) ఉపపన్నమగుచున్నది.

(5) మరియు $\frac{\text{యా} + \text{ఇ}.\text{హా}}{\text{హా}}$ ఇట్లు $\frac{\text{కా} + \text{ఇ}.\text{భా}}{\text{భా}}$

ఇట్లు తప్పించుటవలన క్రమముగా యా, కా, శేషము లగుచున్నవి. లబ్ధము 'ఇ' అగుచున్నది. ఈ'ఇ' వర్ణము రెండుభాగహారములందును సమానమై యున్నదగుటచే గుణకలబ్ధములవిషయమై తప్పించునపుడు లబ్ధమొకసంఖ్యయే కావలయు ననుట (207 పరి 1 వి)యు నుపపన్నమగుచున్నది.

(6) ఇదివరలో మొదటచూపబడిన సమీకరణములలో రెండవస్వరూపములను చూడగా తుదనున్న హారితకసమీకరణమునందు క్షేపము ఋణముగను, దానికిపైనున్న లోహితకమానమునందు క్షేపము ధనముగను, ఇట్లు క్రిందినుండి బేసివర్ణములందు క్షేపము ఋణముగను, సరివర్ణములందు క్షేపము ధనముగను, గను పట్టుచున్నది. కావున ఎచట లబ్ధములు సరిసంఖ్యగలవియో అచట ధనక్షేపము

దలిగుణలబ్ధములగుననియు, ఎచట బేసిసంఖ్యగల లబ్ధములో అచట ఋణక్షేప మందలి గుణలబ్ధములగుననియు, చెప్పదగియున్నది.

(7) ధనక్షేపమందలి గుణలబ్ధులను ఋణక్షేపగుణలబ్ధులనుగా మార్పవలసినచో కుట్టకపద్ధతిచే

భా × యా + క్షే = హా × కా అగుచున్నది.

రెండుపక్షములను భాజ్యహారగుణనము = భా.హా వలన వ్యవకలింప

భా.హా — భా.యా — క్షే = భా.హా — హా.కా (7ప్రి 2సి. చూ)

∴ భా (హా — యా) — క్షే = హా (భా — కా)

ఇందు ఋణక్షేపమగునపుడు హారమువలన గుణకమును వ్యవకలింపనగు శేషము గుణకగునమనియు భాజ్యమువలన లబ్ధమును వ్యవకలింపనగు శేషము లబ్ధముగుననియు స్పష్టముగ గనుపట్టుచున్నది. దానిచే ధనక్షేపమునందలి గుణలబ్ధములను తమతమహారములవలన వ్యవకలింప ఋణక్షేపమునందలి గుణలబ్ధములగుననుట (206 ప్రి) ఉపపన్నమగుచున్నది.

ఈకారణముచేతనే బేసిసంఖ్యగల లబ్ధములగుచో (ఋణక్షేపలబ్ధిగుణకములు వచ్చునుగావున ధనక్షేపలబ్ధిగుణకములుగ మార్చుటకై) తమతమహారముల వలన వ్యవకలింపనగు శేషములు లబ్ధిగుణకములగుననుటయు (204 ప్రి 6)ఉపపన్నమగుచున్నది.

(8) క్షేపము హారముకంటె పెద్దదియగుచో

క్షేపమును హారముచే భాగింపనగులబ్ధము 'ఇ' అనుకొందము.

అపుడు శే = క్షే — హా.ఇ అగుచున్నది.

శేషమును క్షేపముగ గల్పించుచో భా × యా + క్షే = హా × ల

ఈపక్షద్వయమునందును 'హా.ఇ' దీనిని వ్యవకలింప

భా.యా + క్షే — హా.ఇ = హా.ల — హా.ఇ

భా.యా + శే = హా (ల — ఇ) అగుచున్నది.

దీనింబట్టి అట్టిభాజ్యహార క్షేపములచే గుణకలబ్ధముల సాధింప గుణకము మారదనియు లబ్ధమే మారుచున్నదనియు అట్టిమారినలబ్ధమునందు హారముచే క్షేపమును భాగింపనగులబ్ధమును గూర్ప సరియగులబ్ధమగుననియును తెలియుచున్నది.

ఇట్లు ఋణక్షేపమునందు భా × యా — క్షే = హా × ల

ఇందు రెండుపక్షములందును 'హా.ఇ' దీనిని కలుప

భా × యా — క్షే + హా.ఇ = హా × ల + హా × ఇ

భా × యా — (క్షే — హా.ఇ) = హా × (ల + ఇ)

దీనింబట్టి క్షే — హా.ఇ = క్షేపమని కల్పించి భాజ్యహారక్షేపములచే గుణకలబ్ధముల సాధింప గుణకమునందుమార్పులేక లబ్ధమునందు, క్షేపమును హారముచేభాగింపనగులబ్ధము కలుపబడియుండుననియు కావున కుట్టకమువలనవచ్చిన లబ్ధమువలన, క్షేపమును హారముచే భాగింపనగుసంఖ్యను వ్యవకలింప సరియగులబ్ధమగుననియు తెలియుచున్నది. దీనిచే హారతష్టక్షేపమునందలి పద్ధతి (207ప్రి 2,3) ఉపపన్నమగుచున్నది.

(9) స్పష్టముగ తెలియుటకై గుణలబ్ధ్యానయనోపపత్తి వ్యక్తప్రక్రియచే తనున్న చెప్పబడుచున్నది. (జీవనాథమిశ్రులచే చెప్పబడినది)

భాజ్య173 హా71 క్షేప3 ఈభాజ్యహారములు పరస్పరము దృఢములైయున్నవి. ఈభాజ్యహారముల పరస్పరము భాగింప 4భాగహారములైనవి. ప్రతి భాగహారమునందును ఆయాభాజ్యహారములు వేరుగనున్నవి. అందు నాల్గవభాగహారమునందు భాజ్యము9 దీనిని ఏసంఖ్యచేగుణించి క్షేపము3 నెట్లు సంస్కరింప ఆహారము 4చే నిశ్శేషమగునదియు విచారింతము. భాజ్యమును హారముచే నిశ్శేషముగ భాగింపబడు 8 సంఖ్య ఒకఖండముగను శేషము1టి రెండవఖండముగను రెండుఖండములుగ విభజింతము. మొదటిఖండమును ఏసంఖ్యచే గుణించినను ఆహారముచే నిశ్శేషమగును.

```
71 ) 173 ( 2
     142
     ---
      31 ) 71 ( 2
           62
           --
            9 ) 31 ( 3
                27
                --
                 4 ) 9 ( 2
                     8
                     -
                     1
```

(53 ప్రి. 1సి. చూ) రెండవఖండము (1టి)ను క్షేపముచేగుణించి అందు క్షేపమునుఋణముగ సంస్కరింప శూన్యమగుచుండుటచే నది హారముచే తప్పక నిశ్శే

షమగు నని స్పష్టముగ తెలియుచున్నది. కావున నట్లు చేయ లబ్ధము

$$\frac{9\times3-3}{4}=\frac{(8+1)3-3}{4}=\frac{8\times3}{4}+\frac{3-3}{4}=2\times3+0$$ అగుచున్నది.

దీనిచే క్షేపముచే తుదిలబ్ధమునుగుణించి అందు శూన్యమును చేర్ప తుది భాజ్యమునకు క్షేపతుల్యగుణకము ఋణక్షేపము నైనచోనగు లబ్ధముగుచున్నది యనియు, ఇది, లబ్ధములు, వాటిక్రింద క్షేపము, దానిక్రింద శూన్యము, ఇట్లు వల్లిగా వ్రాసి ఉపాంతిమముచే దాని పైరాశిని గుణించి అంతిమమును కలుపుటయే యగుచున్నది యనియు స్పష్టమగుచున్నది,

2	2
2	2
3	3
2	6
3	3
0	

ఇట్లు ఆక్షేపమునందే 3వ భాగహారమును విచారింప భాజ్యము31 హారము9 ఈభాజ్యమునందును హారముచే నిశ్శేషమగునదియు శేషతుల్యము నను రెండుఖండములను చేయ 31 = 27 + 4 అగుచున్నది. ఇందును మొదటిఖండమును ఏసంఖ్యచేగుణించినను హారము 9 చే నిశ్శేషమగును. కావున రెండవఖండమును గూర్చియే ఆలోచింపవలయును. ఈరెండవఖండమును హారముచే భాగింప $\frac{4}{9}$ ఇందు నాలవభాగహారమునందలి భాజ్యహారము $\frac{9}{4}$లకు తలక్రిందుగ భాజ్యహారములగుచున్నవి. కావున దానికి తలక్రిందుగ గుణకలబ్ధములు.

$$\frac{(9\times3)-3}{4}=6$$ కావున $$\frac{(4\times6)+3}{9}=3$$ అగుచున్నది.

$$\therefore\frac{(31\times6)+3}{9}=\frac{(27+4)6+3}{9}=\frac{27\times6}{9}+\frac{4\times6+3}{9}=3\times6+3$$

ఇందు మూడవలబ్ధమును నాలవలబ్ధముయొక్కయు క్షేపముయొక్కయు గుణనముచే గుణించి అందు క్షేపమునుగలుపగా:— తృతీయభాజ్యహారములందు, చతుర్థ క్షేపములగుణనము గుణకము, ధనమగుక్షేపము, నైనచోనగు లబ్ధమగు నని స్పష్టము. మరియు నిచట అంత్యమగుశూన్యమునకు ప్రయోజనము గనుపట్టదు. ఉపాంతిమగు క్షేపము ఇందంత్యముగా భావింపబడినచో పైపద్ధతిగనే గానవచ్చుచున్నది. ఇట్లుచేయగా నున్న వల్లీస్వరూపము.

2
2
21
6

ఇట్లు శేషించిన వల్లియందలి క్రిందిరెండుసంఖ్యలును 3వ భాగహారమునందలి భాజ్యహారములందు ధనక్షేపము అగునపుడైన గుణకలబ్ధములు అగుచున్నవి యనియు నాల్గవ భాగహారమునందలి

గుణకలబ్ధములలో లబ్ధమిచట గుణకమగుచున్నదియనియును స్పష్టమగుచున్నది.

ఇట్లు ఆ క్షేపమునందే రెండవభాగహారమును విమర్శింప భాజ్యము71, హారము31 ఇందును భాజ్యమును పైప్రకారము ఖండద్వయముగా విభజింప రెండవఖండమునందలి భాజ్యహారములు మూడవభాగహారమునందలి భాజ్యహారములకు తలక్రిందుగనున్నవి గావున దానికి వ్యత్యయముగ గుణకలబ్ధములు

$$\frac{31\times6+3}{9}=21\ \therefore\ \frac{9\times21-3}{31}=6$$

$$\therefore\frac{71\times21-3}{31}=\frac{62\times21}{31}+\frac{9\times21-3}{31}=2\times21+6$$

పైనచూపిన శేషించినవల్లియందు ఉపాంతిమము 21చే దానిపైయంకె2 (రెండవలబ్ధము)ను గుణించి అందలి అంత్యాంకము 6ను కలుపుటయేయైనది. ఈసంఖ్య48 రెండవభాగహారమునందలి భాజ్యహారములకు గుణకము21, క్షేపము3 ఋణము నైనచోనగు లబ్ధము, ఇట్లుచేయగా శేషించినవల్లి. ఇందలి తుదిసంఖ్యలు రెండును ఋణక్షేపమునందు రెండవభాజ్యహారముల గుణలబ్ధులు.

2
48
21

ఇట్లు ప్రథమభాగహారమునందును భాజ్యము 173ను ఖండద్వయముగ విభజింప రెండవఖండమునందలి భాజ్యహారములు ద్వితీయభాగహార భాజ్యహారములకు వ్యత్యయముగ నున్నవి కావున దానికి వ్యత్యయముగ గుణకలబ్ధములు:

$$\frac{71\times21-3}{31}=48\ \therefore\ \frac{31\times48+3}{71}=21.$$

$$\therefore\frac{173\times48+3}{71}=\frac{142\times48}{71}+\frac{31\times48+3}{71}=2\times48+21=117$$

2
48
21

ఇట్లు శేషించినవల్లియందు ఉపాంతిమము 48చే ప్రథమలబ్ధమగు పైయంకె 2ను గుణించి దానిక్రిందిసంఖ్యను కలుపుటయైనది. దానివలన 48గుణకమగుచో క్షేపము ధనమగుచో ప్రథమభాజ్యహారములవలన 117లబ్ధము వచ్చునని స్పష్టమగుచున్నది. ఇందు 117లబ్ధము పైరాశిగను గుణకమగు 48 క్రిందిరాశిగను వచ్చినవి.

దీనిచే రాశియుగ్మానయనము చక్కగ ఉపపన్నమగుచున్నది.

తుదను రూపము (1టి) మిగిలినదిగాని క్షేపతుల్యగుణకము ఋణక్షేపము వీటిచే తుదిభాగహారమునందలి భాజ్యము నిశ్శేషమగుననుట సంభవముగాదనియు తెలియుచున్నది. కావుననే 1టి శేషించుటకై భాజ్యహారముల కపవర్తనమున్ను 1టి మిగులువరకు పరస్పరము భాగింపవలయుననియు చెప్పబడినది.

మరియు నీప్రకారము ప్రతికుట్టకమునందును పరస్పరము భాగింపనగు భాగహారములలో క్రిందినుండి 1, 3 మొదలగు బేసిభాగహారములందలి భాజ్యహారములకు ఋణక్షేపమునందును, 2, 4 మొదలగు సరిభాగహారములందలి భాజ్యహారములకు ధనక్షేపమునందును, గుణకలబ్ధము లగుట తెలియుచున్నది. కావున పరస్పరభజనము చేసిన లబ్ధములు బేసిసంఖ్యగలవియగుచో ఋణక్షేపమందును, సరిసంఖ్యగలవియగుచో ధనక్షేపమందును గుణలబ్ధు లగునని సంస్కారము చెప్పబడినది.

ఇట్లు భాజ్యమును హారముచే గుణించి హారముచే భాగింప భాజ్యము లబ్ధమగుచున్నది. ఎట్లనగా $\frac{\text{భా} \times \text{హా}}{\text{హా}} = \text{భా}$, కావున గుణకమునందు హారము చేర్పబడినచో లబ్ధమునందు భాజ్యము చేర్పబడినది యగుచున్నది కావున ఇష్టగుణితహారమును గుణకమున చేర్చుచో ఇష్టగుణితభాజ్యమును లబ్ధమున చేర్పవలయునని "ఇష్టాహతస్వస్వహారేణ" ఇత్యాదిసూత్రము (209 ప్ర)చే చెప్పబడినది. ఆప్రకారముగనే దానికివ్యతిరేకముగ గుణకమునందు హారమును ఎన్నిసార్లు వ్యవకలించిన నన్నిసార్లు లబ్ధమువలన భాజ్యము వ్యవకలింపబడినది యగుచున్నది. కావున పైరాశి(లబ్ధము)ని భాజ్యముచేతను క్రిందిరాశి(గుణకము)ని హారముచేతను తష్టింపవలయుననియు తష్టింపనగులబ్ధము సమానముగనుండవలయుననియు చెప్పబడినది.

(10) "భవతికుట్టవిధే" రిత్యాదిసూత్రము (205 ప్ర)నకు ఉపపత్తి.—

కుట్టకపద్ధతిచే $\text{భా} \times \text{గు} \pm \text{క్షే} = \text{హా} \times \text{ల}$

ఈరెండుపక్షములను ఇష్టాంకము $= \text{ఇ}$, దీనిచే నపవర్తింప

$$\frac{\text{భా} \times \text{గు}}{\text{ఇ}} \pm \frac{\text{క్షే}}{\text{ఇ}} = \frac{\text{హా} \times \text{ల}}{\text{ఇ}}$$

ఇందు భాజ్యక్షేపము లపవర్తింపబడి హార మపవర్తింపబడనిచో లబ్ధ మపవర్తింపబడియుండవలయును. లేనిచో సామ్యము అసంభవ మగుచున్నది.

అనగా $\frac{\text{భా}' \times \text{గు}}{\text{ఇ}} \pm \frac{\text{క్షే}'}{\text{ఇ}} = \frac{\text{హా} \times \text{ల}'}{\text{ఇ}}$ అగుచున్నది.

అపవర్తింపబడినదానికి గుర్తు ఉంచబడినది.

హారక్షేపము లపవర్తింపబడి భాజ్య మపవర్తింపబడనిచో గుణక మపవర్తింపబడియుండును. లేనిచో సమీకరణము అసంభవము.

అనగా $\frac{\text{భా} \times \text{గు}'}{\text{ఇ}} \pm \frac{\text{క్షే}'}{\text{ఇ}} = \frac{\text{హా}' \times \text{ల}}{\text{ఇ}}$ అగుచున్నది.

కావున భాజ్యక్షేపములుమాత్ర మపవర్తింపబడినయెడల నగు లబ్ధమునున్ను హారక్షేపములుమాత్ర మపవర్తింపబడినయెడలనగు గుణకమునున్ను ఆ అపవర్తనాంకముచే గుణింపవలయుననుట ఉపపన్నము.

అథ స్థిర కుట్టకః

క్షేపేతురూపే యదివావిశుద్ధే స్యాతాం క్రమాద్యే గుణకారలబ్ధీ॥౧౩౯॥
అభీప్సితక్షేపవిశుద్ధినిఘ్న్యౌ స్వహారతష్టే భవత స్తయో స్తే॥

టీ॥ తు = విశేషమేమనగా, రూపే = ఒకటి, క్షేపే యది = ధనక్షేపమైనను, వా = లేక, విశుద్ధే యది = ఋణక్షేపమైనను, క్రమాత్ = క్రమముగ, యే గుణకారలబ్ధీ స్యాతాం = ఏగుణకలబ్ధములగునో, తే = ఆగుణకలబ్ధములు, అభీప్సితక్షేపవిశుద్ధినిఘ్న్యౌ = అభీష్టమగు ధనక్షేపముచేగాని ఋణక్షేపముచేగాని గుణింపబడినవియై, స్వహారతష్టే = తమతమహారములచే తష్టింపబడినవియై, తయోః = ఆధనక్షేపఋణక్షేపములందు (గుణలబ్ధములై) భవతః = అగుచున్నవి.

210. ప్ర. (1) వల్లియందు దృఢభాజ్యహారముల పరస్పరభజనమువలననగు లబ్ధమును వాటిక్రింద క్షేపమునకుమారుగ 1టిని వ్రాయుము. దానిక్రింద శూన్యమును వ్రాయుము. ఆవల్లివలన క్రమముగ పూర్వప్రకారము గుణకలబ్ధముల గనుగొనుము.

(2) ఆ 1టిని క్షేపముధనమైనచో ధనముగను ఋణమైనచో ఋణముగను భావించి ఆ ధనర్ణక్షేపములందలి విశేషవిధుల నవలంబింపుము. (204 ప్ర. 206 ప్ర. చూ)

(3) అట్లుచేయగా సిద్ధించిన ఆయాగుణకలబ్ధములను ఆయాఇష్టక్షేపముచే గుణించి అనగా ధనక్షేపమందలి గుణలబ్ధులను ధనక్షేపము చేతను ఋణక్షేపమందలి గుణలబ్ధులను ఋణక్షేపము చేతను గుణించి తమతమహారములచే తష్టింప ఇష్టక్షేపమునందలి గుణకలబ్ధము లగును.

ఉపపత్తి:—(1) 209 ప్రక్రియమునందు బీజగణితము చేనైన గుణలబ్ధ్యానయనోపపత్తియందు గు = యా, అనియు ల = కా, అనియు కల్పించి సమీకరణములచే గుణలబ్ధిప్రమాణములగు యా, కా వర్ణముల మానములు తేబడినవి. అందు యా = 17. క్షేప, కా = 27. క్షేప, అని సిద్ధించినవి గదా! దానింబట్టి ఆ భాజ్య100 హార63ము లందు ఈగుణలబ్ధములవలనచే క్షేపమానము నెట్లుకల్పించిన నట్లు గుణలబ్ధము(రాశియుగ్మము)లగుననుట స్పష్టము. ఎట్లనగా క్షేప = 90 అనుకొనుచో

యా = 17 × 90 = 1530 కా = 27 × 90 = 2430 అగుచున్నది. క్షేపము = 1టి యనుకొనుచో యా = 17, కా = 27 అగుచున్నది. అనగా వల్లియందు తుదను క్షేపమువ్రాయబడునదియగుటచే క్షేపమును 1టిగ తొలుత కల్పించి సాధించిన రాశియుగ్మమును ఇష్టక్షేపముచే గుణించినను ఇష్టమగురాశియుగ్మమగు ననుట స్పష్టముగా తెలియుచున్నది:

(2) లేక కుట్టకపద్ధతిచే భా × గు ± క్షే = హా × ల అగును గదా! ఈ పక్షములు రెండిటిని 'క్షే' దినిచే భాగించినను సామ్యము చెడదు (7ప్రశిచూ)

$$\therefore \frac{\text{భా} \times \text{గు} \pm \text{క్షే}}{\text{క్షే}} = \frac{\text{హా} \times \text{ల}}{\text{క్షే}} = \frac{\text{భా} \times \text{గు}}{\text{క్షే}} \pm 1 = \frac{\text{హా} \times \text{ల}}{\text{క్షే}}$$

$$= \text{భా} \times \frac{\text{గు}}{\text{క్షే}} \pm 1 = \text{హా} \times \frac{\text{ల}}{\text{క్షే}}$$ అగుచున్నది.

ఇందు క్షేపమును క్షేపముచే భాగించినచో, గుణకలబ్ధములును క్షేపముచే భాగింపబడినవియని స్పష్టముగ గన్పట్టుచున్నది. (వల్లివలన సాధింపబడిన రాశియుగ్మము గుణకలబ్ధములైనను చిన్నసంఖ్యలగుటకొరకే తష్టించుటయనుట ఉపపత్తియందు సూచింపబడినది) కావున వల్లివలన సాధింపబడిన గుణకలబ్ధులను క్షేపముచే గుణింప సరియగు గుణకలబ్ధము లగును అనుట ఉపపన్న మగుచున్నది.

ప్రథమోదాహరణే దృఢభాజ్యహారయోః రూపక్షేపయోర్న్యాసః భాజ్యః౧౭ హారః౧౫ క్షేపః౧ అత్ర గుణాప్తీ ౭,౮ ఏతే ఇష్టక్షేపేణ పంచకేన గుణితే స్వహారతష్టే జాతే ౫, ౬ అథరూపశుద్ధౌ గుణాప్తీ ౮, ౯ ఏతే పంచగుణే స్వహారతష్టేచ జాతే౧౦,౧౧ ఏవంసర్వత్ర.

ఉదా:— ఈకుట్టకప్రకరణారంభమునందు భాజ్య221 హార195 క్షే65 ఇట్లుదాహరణ మివ్వబడినది. ఆభాజ్యహారక్షేపములను 13చే నపవర్తింప దృఢభాజ్యహారక్షేపములు భా17 హా15 క్షే5 అగుచున్నవి. ఈక్షేపము 5నకు మారుగ 1టి క్షేపముగ భావించి ఈదృఢభాజ్యహారములచే రూపక్షేపము చేతను గుణలబ్ధులను సాధింప వల్లి

1
7
1
0

దానిచే రాశియుగ్మము 8, 7 అగుచున్నది. వీటిని తమతమహారములచే తష్టింప నివియ యైనవి. ఇవి రూపక్షేపమందలి లబ్ధిగుణకములు. వీటిని క్షేపముచే గుణింప 40, 35 వీటిని తమతమ హారములచే తష్టింప 6, 5 లబ్ధిగుణకము లగుచున్నవి.

ఋణక్షేపమగుచో పైప్రకారముగ సాధించిన రాశియుగ్మము 8, 7 వీటిని తమతమహారములగు భాజ్య17 హార15 ములవలన వ్యవకలింప 9, 8 వీటిని క్షేపము 5చే గుణించి తష్టింప 11, 10 లబ్ధగుణకములు.

అస్య గ్రహగణితే మహానుపయోగః అథ తదర్థం కించిదుచ్యతే।
కల్ప్యాథశుద్ధిర్వికలావశేషం షష్టిశ్చభాజ్యః కుదినానిహారః॥ ౧౪౦॥
తజ్జంఫలంస్యుర్వికలా గుణస్తులిప్తాగ్ర మస్మాచ్చకలాలవాగ్రమ్।
ఏవంతదూర్ధ్వంచ తథాధిమాసావమాగ్రకాభ్యాం దివసారవీంద్వోః॥

వా॥ భా॥ గ్రహస్య వికలావశేషా ద్గ్రహాహర్గణయో రానయనం తద్యథా॥ తత్రషష్టి ర్భాజ్యః, కుదినాని హారః, వికలావశేషం శుద్ధి, రితిప్రకల్ప్యసాధ్యే గుణాప్తీ।తత్రలబ్ధి ర్వికలా స్స్యుః, గుణస్తు కలాశేషమ్॥ ఏవం కలావశేషా ల్లబ్ధిః కలాః। గుణో భాగశేషమ్॥ తద్భాగశేషంశుద్ధిః, కుదినాని హారః త్రింశ ద్భాజ్యః, తత్ర లబ్ధి ర్భాగాః, గుణో రాశిశేషమ్॥ ద్వాదశ భాజ్యః, కుదినాని హారః,

రాశిశేషం శుద్ధిః, తత్రిఫలం రాశయః, గుణో భగణశేషమ్॥ భగణాభాజ్యాః, కుదినాని, హారః భగణశేషం శుద్ధిః ఫలం గతభగణాః. గుణోఽహర్గణ స్స్యాదితి॥

అస్యోదాహరణాని మహాప్రశ్నాధ్యాయే

ఏవం కల్పాధిమాసాః భాజ్యాః, రవిదినాని హారః. అధిమాసశేషం శుద్ధిః, లబ్ధిర్గతాధిమాసాః, గుణో గతరవిదివసాః.

ఏవం కల్పావమాని భాజ్యాః, చాంద్రిదివసా హారః, అవమశేషం శుద్ధిః, ఫలం గతావమాని, గుణో గతచాంద్రిదివసా ఇతి.

టీ॥ అథ వికలావశేషం శుద్ధిః కల్ప్యా = పిమ్మట, వికలావశేషము ఋణక్షేపముగ కల్పింపదగినది. షష్టిశ్చ భాజ్యః = 60 భాజ్యము. కుదినాని హారః = సౌరసావనదినములు హారము. తజ్జం ఫలం వికలా స్స్యుః = ఆకుట్టకమువలననైన లబ్ధము వికలలగును. గుణస్తు లిప్తాగ్రం = గుణకము కలావశేషమగును. అస్మాచ్చ = ఈకలావశేషమువలననున్న, కలాః లవాగ్రం = లిప్తలు భాగశేషము (అగును) ఏవం తదూర్ధ్వంచ = ఇట్లు ఆభాగశేషమువలన ముందుగణితమున్ను చేయదగినది.

తథా = ఆప్రకారము, అధిమాసావమాగ్రకాభ్యాం = అధిమాసశేష అవమశేషములవలన రవీంద్వోః దివసాః = సూర్యచంద్రులదినములు (అగును)

211. ప్ర. (1) ఈ స్థిరకుట్టకమునకు గ్రహగణితమునందు విశేషోపయోగము గలదు. అది కొంచెమిచట సూచింపబడినది. గ్రహగణితమును సంబంధించిన కుట్టకప్రశ్నములను సిద్ధాంతశిరోమణియందు మహాప్రశ్నాధికారమను అధ్యాయమున ఆచార్యులవారు చూపిరి. ఈపాటీగణితమునందు గ్రహగణితోపయోగమును వివరించుట అప్రసక్తము కావచ్చును. కావున సంగ్రహముగ చెప్పబడుచున్నది.

(2) ప్రతిదినమును సూర్యుడు ఏవృత్తమందు తిరుగుచున్నట్లు కనుపించుచుండెనో (భూమి తిరుగుటచే సూర్యుడు తిరుగుచున్నట్లు కనుపించుచున్నదిగావున శీఘ్రముగ తెలియుటకై ఇట్లు చెప్పబడినది) ఆవృత్తమునకు క్రాంతివృత్తమని

పేరు. ఆక్రాంతివృత్తమునందు అశ్విని, భరణి మొదలగు 27 నక్షత్రములు సంబంధించియున్నవి. ఆవృత్తము సమానముగ అశ్విన్యారంభమునుండి 360 భాగములుగ చేయబడినది. ఈభాగములు భాగలు లేక అంశములు అని చెప్పబడుచున్నవి (149 ప్ర. 5 ప చూ) ఒక్కొకభాగయు 60విభాగములు చేయబడినవి. ఈవిభాగములు లిప్తలు లేక కలలు. ఆవృత్తమునే 27సమవిభాగములుగ చేసిరి. అవి నక్షత్రములు. దానిచే ఆమాన మిట్లగుచున్నది.

60 విలిప్తలు 1 లిప్త	200 లిప్తలు 1 నక్షత్రపాదము
60 లిప్తలు 1 భాగ	4 పాదములు (800 లిప్తలు) 1నక్షత్రము
30 భాగలు 1 రాశి	$2\frac{1}{4}$ నక్షత్రములు (9పాదములు) 1రాశి
12 రాసులు 1 భగణము	27 నక్షత్రములు 1 భగణము

(3) ఏగ్రహమైనను ఒకభగణమును సంచరించుకాలము ఆగ్రహముయొక్క భగణకాలము. అట్టి సూర్యభగణకాలము, ఒకసౌరసంవత్సరమగుచున్నది. ఆసంవత్సరములు 4320000 ఒకమహాయుగము. వేయి మహాయుగములు అనగా 432కోట్లసంవత్సరములు ఒకకల్పము. ఆకల్పకాలమునందు ఆయాగ్రహములు ఎన్నిపర్యాయములు భగణసంచారమును చేయుదురో ఆపర్యాయసంఖ్య ఆయాగ్రహముయొక్క భగణములు. అట్లు ఆయాగ్రహాదులయొక్క కల్పభగణములు ప్రాచీనులు తమసిద్ధాంతములందు తమతమపరిశీలన ననుసరించి చెప్పియున్నారు.

(4) సూర్యుడు ఒకరాశియందు సంచరించుకాలము సౌరమాసము.

శుక్లప్రతిపత్ప్రారంభమునుండి అమాంతముదరకునగు కాలము చాంద్రమాసము.

సౌరమాసములో 30వవంతు సౌరదినము. చాంద్రమాసములో 30వవంతు చాంద్రదినము (తిథి). 2 సూర్యోదయముల మధ్యనగు కాలము అర్కసావనదినము లేక కువాసరము. ఈకువాసరములు 30 యగుచో సావనమాసము. ఇట్లు ఆయాఘటికాదులు సంవత్సరములును అగును. ఒకనక్షత్రముదయించి రెండవమారుదయించునప్పటికగు కాలము నాక్షత్రదినము.

	ది	ఘ	వి	ప	విప
సిద్ధాంతశిరోమణియందు సౌరమాస ప్రమాణము.	30	26	17	31	$51\frac{1}{2}$
,, చాంద్రమాస ప్రమాణము.	29	31	50		

ఇవి సౌరసావనమానముచే గణింపబడినవి. వీటిపరిమాణములు పూర్వ సిద్ధాంతములందు భిన్నప్రకారముగ నున్నవి. పరిష్కృతపరిమాణములు వాటికంటె భిన్నముగ నున్నవి.

పైపరిమాణముల చూడగా చాంద్రమాసముకంటె సౌరమాసము పెద్దది యగుటచే 12చాంద్రమాసము లగునప్పటికి సౌరమాసములు 12ను కావని తెలియుచున్నది. అనగా సౌరమాసములు సుమారు $32\frac{1}{2}$ అగుసరికి చాంద్రమాసములు $33\frac{1}{2}$ అగుచున్నవి. సౌరమాసములకంటె చాంద్రమాసములలో 1టి పెరుగుటచే నిదియ అధికమాసమని చెప్పబడుచున్నది. ఇట్టి అధికమాసములు కల్పమున కెన్ని యగునదియును సిద్ధాంతములందు గలవు. అవి కల్పాధిమాసములు.

ఇట్లు ఒకమాసమునందు శుక్లపాడ్యమి సూర్యోదయమునుండి యారంభించినది యనుకొందము. తుదకు ఆమాసమునందు 30సావనదినములు పూర్తికాకుండగనే ఆచాంద్రమాసము (30 తిథులును) పూర్తియగును అనగా (ఇంచుమించుగ) 63 సౌరసావనదినములగునప్పటికి 64తిథు లగుచున్నవి. ఇట్లు చాంద్రతిథులకంటె సావనదినములలో తగ్గిన 1టి అవమదినము లేక క్షయదినము అనిచెప్పబడును. ఇట్లు ఒకకల్పమున కగు క్షయదినములు కల్పక్షయదినములు

(5) ఒకకల్పమునందునగు సావనదినములు, కల్పసావనదినములు (కల్పకువాసరములు). కల్పాదినుండి ఇష్టదినమువరకు నైన దినగణము (సమూహము) కల్పాదిద్యుగణ మనియు కల్పాద్యహర్గణమనియు చెప్పబడును.

(6) కల్పసావనదినములకును కల్పభగణము లగుచో కల్పాదిద్యుగణమున కెన్ని? ఈత్రైరాశికముచే అభీష్టదినమునకు ‡ మధ్యగ్రహ మగుచున్నది. ఇట్లు అనుపాతముచే ఇష్టకాలమునకు అధిమాసములను అవమదినములను సాధింపవచ్చును. అట్లు ఇష్టకాలమునకు ఒకగ్రహమును సాధింపుచో

$$\text{త్రైరాశికముచే}\ \frac{\text{కల్పభగణ} \times \text{కల్పాదిద్యుగణ}}{\text{కల్పకువాసర}}\ \text{అగుచున్నది.}$$

‡ త్రైరాశికముచే సాధింపబడునది మధ్యగ్రహము. స్పష్టగ్రహమును సాధించుటకు మధ్యగ్రహమునందు చేయదగిన సంస్కారములు గలవు.

ఇందు లబ్ధము భగణము లగును. ఆశేషమును 12చే గుణించి హారముచే భాగింప రాసులు లబ్ధము. తిరుగ శేషమును 30చే గుణించి హారముచే భాగింప భాగలు లబ్ధము. తిరుగి శేషమును 60చే గుణించి హారముచే భాగింప లబ్ధము లిప్తలు. ఆశేషమును 60చే గుణించి హారముచే భాగింప లబ్ధము విలిప్తలు. ఆ శేషము వికలావశేషము.

అట్టి వికలావశేషమునుబట్టి తాత్కాలికగ్రహమును అహర్గణమును ఈకుట్టకముచే తెలియుపద్ధతి ఇచట చెప్పబడినది.

(7) వికలావశేషము ఋణక్షేపము. కల్పకుదినములు హారము. 60భాజ్యము ఈకుట్టకముచేనగు లబ్ధి వికలలు. గుణకము కలావశేషము అగుచున్నది.

తిరుగ కలావశేషము ఋణక్షేపము. కల్పకుదినములుహారము. 60భాజ్యము ఈకుట్టకముచే లబ్ధి కలలు. గుణకము భాగశేషము.

భాగశేషము ఋణక్షేపము. కల్పకుదినములు హారము. 30భాజ్యము దీనిచే లబ్ధి భాగలు. గుణకము రాశిశేషము.

రాశిశేషము ఋణక్షేపము. కల్పకుదినములు హారము. 12భాజ్యము దీనిచే లబ్ధి రాసులగును. గుణకము భగణశేషము.

భగణశేషము ఋణక్షేపము. కల్పకుదినములు హారము. భగణములు భాజ్యము. దీనిచే లబ్ధము గతభగణములు. గుణకము అహర్గణము, అగుచున్నది. ఇట్లు క్రమముగా కుట్టకములచే భగణాదిగ్రహమున్ను అహర్గణమున్ను తెలియబడుచున్నవి.

ఉపపత్తి: కల్పభగణ = కభ. కల్పకుదిన = కకు, కల్పాద్యహర్గణ = అహ, గతభగణ = గభ, భగణశేష = భశే, రాశిశేష = రాశే ఇట్లు భాశే, కశే, వికశే........

పైనచూపిన అనుపాతముచే వికలావశేషము ఇట్లు లభించుచున్నది.

$$\frac{\text{కశే} \times 60}{\text{కకు}}\ \text{దీనివలన లబ్ధ} = \text{వికలలు.}\quad \text{శేష} = \text{వికశే.}$$

$$\therefore\ \text{యా} = \text{కశే అగుచో}\ \frac{\text{యా} \times 60 - \text{వికశే}}{\text{కకు}} = \text{వికలలు}$$

ఇట్లు యా = భా శే అగుచో $$\frac{\text{యా} \times 60 - \text{క శే}}{\text{కకు}} = \text{కలలు.}$$

ఇట్లు యా = రా శే అగుచో $$\frac{\text{యా} \times 30 - \text{భా శే}}{\text{కకు}} = \text{భాగలు.}$$

ఇట్లు యా = భ శే అగుచో $$\frac{\text{యా} \times 12 - \text{రా శే}}{\text{కకు}} = \text{రాసులు.}$$

ఇట్లు యా = అహ అగుచో $$\frac{\text{యా} \times \text{కభ} - \text{భ శే}}{\text{కకు}} = \text{గభ}$$

తుదికుట్టకమునందు గుణక మహర్గణ మగుచున్నది. ఇట్లు గుణక లబ్ధములను తెలిసికొనుటచే క్రిందినుండి గతభగణములు, రాసులు, భాగలు, లిప్తలు, విలిప్తలు, వికలావశేషము, తెలియబడుచున్నవి. ఇదియే గ్రహ మగుచున్నది.

(8) $$\frac{\text{కల్పాధిమాస} \times \text{గతసౌరదిన}}{\text{కల్పసౌరదిన}} = \text{లబ్ధము గతాధిమాసములు.}$$

శేషము అధిమాసశేషము. కావున యా = గతసౌరదిన అగుచో

$$\frac{\text{యా} \times \text{కల్పాధిమాస} - \text{అధిమాసశేష}}{\text{కల్పసౌరదిన}} = \text{గతాధిమాస}$$

ఈ కుట్టకముచే గతాధిమాసములును గతసౌరదినములును తెలియును.

ఇట్లు $$\frac{\text{కల్పావమ} \times \text{గతచాంద్రదిన}}{\text{కల్పచాంద్రదిన}} = \text{లబ్ధము గతావమదినములు}$$

శేషము అవమశేషము. కావున యా = గతచాంద్రదిన అగుచో

$$\frac{\text{యా} \times \text{కల్పావమ} - \text{అవమశేష}}{\text{కల్పచాంద్రదిన}} = \text{గతావమదిన}$$

ఇట్లు కుట్టకముచే గుణ లబ్ధము లగు గతచాంద్రదిన గతావమదినములు తెలియుచున్నవి. ఇట్టిపద్ధతి అంతయును ఉపపన్న మగుచున్నది.

పై స్వరూపములు యా = గుణక ఇట్లుకల్పించి చూపబడినది.

(9) ఇట్లు కుట్టకము చేయుటలో శుద్ధిగా (ఋణక్షేపముగ)కల్పింపబడిన వికలావశేషము అధిశేషము మొదలగువాటిసంఖ్య చాలస్థానములు గలిగియుండును.

కావున 1టి క్షేపముగా గల్పించి చేయుటవలననైన గుణలబ్ధములను క్షేపముచే గుణించి తమతమహారములచే తక్షింపనగుశేషములు గుణ లబ్ధము లగునని సులభ పద్ధతి చెప్పబడినది. ఇదియు దీనికి గ్రహగణితమున నుపయోగను.

(10) విశేషము:—(మ. మ. పం. బాపుదేవ శాస్త్రిగారు.)

పైపద్ధతిగ వికలావశేషమునుబట్టి కుట్టకమును చేయుటలో భాజ్యహార క్షేపములు దృఢములైనవి యగుటచే నపవర్తింపబడనిచో యథాప్రకారముగ వచ్చిన గుణకలబ్ధములు సరియైనవియే యగుచున్నవి. (209 ప్ర. చే) ఇష్టాంకమునుబట్టి గుణకలబ్ధముల మార్పుచేయుచో లబ్ధమగు వికలలు 60కంటె అధికములగును. గుణకమగు కలావశేషము కల్పకువాసరములకంటె నధిక మగును. కావున తొలుత తమతమహారములకంటె చిన్నవియగు ఏలబ్ధిగుణకములు వచ్చినవో అవియే సరియగు గుణకలబ్ధము లని గ్రహింపవలెను.

ఎచట భాజ్యహారక్షేపము లపవర్తింపబడినవో అచట 60కంటె తక్కువ సంఖ్యగల లబ్ధములు (209 ప్ర. చే) అనేకవిధములు అగుచున్నవి. అందు ఎద్ది సరియగులబ్ధియో దానినే గ్రహింపవలయును. సరియైన దైనదియు కానిదియును ముందుగణితమునుబట్టి తెలియును. ఎట్లనగా: తిరుగతిరుగ కుట్టకమును చేయునపుడు పూర్వము తెలియబడిన గుణలబ్ధములు సరియైనవికానిచో ఆగుణకమును ఋణక్షేపముగ గల్పించి చేయు కుట్టకమునందు భాజ్యహారము లపవర్తింపబడి క్షేప మపవర్తింపబడక యుండును. దానిచే ఆకుట్టకము ఖిల మగుచున్నది. ఇట్లు ఏగుణలబ్ధముల గ్రహించినయెడల ముందుకుట్టకములు ఖిలములు గాకయుండునో ఆగుణకలబ్ధములు సరియైనవియని గ్రహింపవలయును. ఇట్లు తెలిసికొనుట చాల శ్రమకరము. కావున కల్పకుదినములు భాజ్యము, వికలావశేషము ధనక్షేపము చక్రవికలలు (ఒకభగణమునకైనవిలిప్తలు 1296000) హారము. ఇట్లు కల్పించి కుట్టకమును చేసినచో లబ్ధము భగణశేషము. గుణకము వికలాత్మకగ్రహము అగును. ఆ భగణ శేషము ఋణక్షేపము, కల్పగ్రహభగణములు భాజ్యము, కల్పకుదినములు హారము, ఈకుట్టకముచే లభించినగుణకము అహర్గణము. లబ్ధము గతభగణములు అగుచున్నవి. ఇట్లు ఉపాయాంతరముచే సాధింపవలయును.

ఇందులకు యుక్తి: $\frac{\text{కభ} \times \text{అహ}}{\text{కకు}}$ = లబ్ధము గతభగణములు. శేషము భగణశేషం

$\frac{\text{భశే} \times \text{చవి}}{\text{కకు}}$ = లబ్ధము వికలాత్మకగ్రహము. శేషము వికలాశేషము.

కావున $\text{భశే} \times \text{చవి} = \text{వికగ్ర} \times \text{కకు} + \text{వికశే}$

$\therefore \text{భశే} = \frac{\text{వికగ్ర} \times \text{కకు} + \text{వికశే}}{\text{చవి}}$ అగుచున్నది.

దానిచే $\frac{\text{కభ} \times \text{అహ} - \text{భశే}}{\text{కకు}}$ = లబ్ధము గతభగణములు.

ఇందు భగణశేషమును తెలియుటకు చేయు కుట్టకమునందు వికలాత్మక గ్రహము గుణకమనియు, (వికశే) ధనక్షేపమనియును భగణశేషమునుబట్టి గతభగణముల తెలయుటకై చేయుకుట్టకమునందు అహర్గణము గుణకమనియు, ఋణక్షేపమనియు, స్పష్టముగ తెలియుచున్నది. ఇట్లుపాయాంతరముచే తెలిసికొనవలయును.

(11) లేక కల్పభగణములను కల్పకుదినములను అపవర్తింపగా నగు దృఢకుదినములు హారము 60భాజ్యము ఇవి దృఢములని భావించి చేయవలయునని మ. మ. పం. సుధాకరద్వివేదిగారు వ్రాసియున్నారు

దీనింబట్టి భాస్కరాచార్యోక్తపద్ధతిచే భాజ్యహారక్షేపములు దృఢములగునపుడే సులభముగ గ్రహము తెలియబడునని స్పష్టమగుచున్నది.

ఈవిషయమంతయు సిద్ధాంతవిషయమగుటచేతను గ్రంథవిస్తరభీతిచేతను ఉదాహరణములు చూపబడలేదు.

సంశ్లిష్టకుట్టకే కరణసూత్రం

ఏకోహారశ్చేద్గుణకౌవిభిన్నౌ తదాగుణైక్యంపరికల్ప్యభాజ్యమ్।
అగ్రైక్యమగ్రంకృతఉక్తవద్యః స్సంశ్లిష్టసంజ్ఞస్స్ఫుటకుట్టకోసౌ॥ ౫౭ ॥

టీ। హారః ఏకః = హారమొకటియై, గుణకౌ విభిన్నౌచేత్ = గుణకములు (రెండును) పరస్పరభిన్నములగుచో, తదా = అపుడు, గుణైక్యం = గుణ

కములయోగమును, భాజ్యం = భాజ్యముగను, అగ్రైక్యం = శేషములయోగమును, అగ్రం = శేషముగను, పరికల్ప్య = కల్పించి, ఉక్తవత్ = చెప్పబడిన ప్రకారముగ, యః = ఏ, స్ఫుటకుట్టకః = స్పష్టమగుకుట్టకము చేయబడునో అసౌ = ఇది, సంశ్లిష్టసంజ్ఞః = సంశ్లిష్టమను పేరుగలది.

212 ప్ర. (1) ఒకేభాజ్యమును వేరు వేరు గుణకములచే గుణించి ఒకే హారముచే భాగించినచో వేరువేరు శేషములు వచ్చునపుడు ఆభాజ్యమున్ను లబ్ధమున్ను తెలియక గుణకములున్ను హారమున్ను శేషములున్ను తెలిసినచో ఆభాజ్యలబ్ధముల నెరుంగుపద్ధతి.

(2) పైప్రకారముగల ప్రశ్నమునందు గుణకములయోగమును భాజ్యముగను శేషములయోగమును ఋణక్షేపముగను హారమును హారముగను కల్పించి పూర్వప్రకారము కుట్టకమును చేయగానగు గుణకమే భాజ్యరాశి యగుచున్నది.

ఉపపత్తి:—గుణ్యగుణకములలో నెద్ది గుణ్యమనినను ఫలభేదములేదు. (13 ప్ర. 1 సి) కావున గుణకయోగమే గుణ్యయోగముగకల్పింపబడినది. గుణ్యరాశి గుణకముగ కల్పింపబడినది. (ఈకల్పింపబడినగుణకము, గుణకములకు గుణ్యమగుచున్నది. హారమునకు భాజ్యము అగుచున్నది. కావుననే ఇది భాజ్యరాశిగ వ్యవహరింపబడినది అను విషయమును స్మరింపవలెను.)

ప్రశ్న ప్రకారము $\frac{\text{యా} \times \text{ప్రగు} - \text{ప్రశే}}{\text{హా}}$ = ప్రల, ఇట్లు $\frac{\text{యా} \times \text{ద్విగు} - \text{ద్విశే}}{\text{హా}}$ = ద్విల

$$\therefore \text{ప్రల} + \text{ద్విల} = \frac{\text{యా} \times \text{ప్రగు} - \text{ప్రశే}}{\text{హా}} + \frac{\text{యా} \times \text{ద్విగు} - \text{ద్విశే}}{\text{హా}} =$$

$\frac{\text{యా}(\text{ప్రగు} + \text{ద్విగు}) - (\text{ప్రశే} + \text{ద్విశే})}{\text{హా}}$ అగుచున్నది. ఇందు ప్రగు = ప్రథము గుణకము. ప్రశే = ప్రథమశేషము. ఇట్లు ప్రల, ద్విల, ద్విగు, ద్విశే, గ్రహింపదగినవి. ఇందలి తుదిస్వరూపముచే నీసూత్రోపపత్తి స్పష్టమగుచున్నది. ఇట్లు రెండుగుణకములకలిపి గుణకముగను, రెండు శేషముల కలిపి శేషముగను, కల్పించి చేయుపద్ధతి గావున నిది సంశ్లిష్ట (కలుపబడిన)కుట్టకమని చెప్పబడుచున్నది.

ఉదాహరణమ్

కః పంచనిఘ్నో విహృత స్త్రిషష్ట్యా సప్తావశేషోథ సఏవ రాశిః।
దశాహతస్స్యాద్విహృతస్త్రిషష్ట్యా చతుర్దశాగ్రో వద రాశిమేనం॥౧౧౫

న్యాసః. అత్ర గుణైక్యం భాజ్యః౧౫ హారః౬౩ అగ్రైక్యం
శుద్ధి క్షేపః౨౧ పూర్వవజ్జాత శ్శుద్ధౌగుణః౧౪ సఏవ రాశిః.

ఇతి లీలావత్యాం కుట్టకవ్యవహారః.

తా॥ ఒకరాశిని 5చే గుణించి 63చే భాగింప 7శేషము అగుచున్నది. ఆరాశినే 10చే గుణించి 63చే భాగింప 14శేషము అగుచున్నది. ఆరాశిని చెప్పుము.

ఇచట గుణకములయోగము 10 + 5 = 15భాజ్యము.

శేషములయోగము 14 + 7 = 21 ఋణక్షేపము.

హారము63 వీటిచే కుట్టకము చేయుటకై భాజ్యహారక్షేపములను 3చే నపవర్తింప దృఢభాజ్యము5 హారము21 క్షేపము7 వీటిచే వల్లి. వల్లివలన సాధింపబడిన రాశియుగ్మము 7, 28 తమతమహారములచే తప్పింప 2, 7 ఋణక్షేపమగుటచే తమతమహారములవలన వ్యవకలింప, గుణకము14, లబ్ధము3 అగుచున్నది.

లేక దృఢభాజ్యహారక్షేపములు భా5 హా21 క్షే7 ఇందు హారక్షేపములను 7చే నపవర్తించి చేయ నగు రాశియుగ్మము2, 1 తప్పింప నివియే శేషము లగుచున్నవి. వీటిని తమతమహారములవలన వ్యవకలింప 3, 2 ఇందు గుణకమగు 2ను హారక్షేపాపవర్తనమగు 7చే గుణింప గుణకము14 లబ్ధము3 అగుచున్నది.

ఋజువు. $\frac{15 \times 14 - 21}{63} = \frac{210 - 21}{63} = \frac{189}{63} = 3$ లబ్ధము.

మరియు $14 \times 5 \div 63$ ఇందు శేషము7 లబ్ధము1

$14 \times 10 \div 63$ ఇందు శేషము14 అగుచున్నది లబ్ధము2

ఈ రెండులబ్ధముల యోగము కుట్టకముచే లబ్ధముగ వచ్చినది.

213. ప్ర. (1) సంశ్లిష్టకుట్టకమునందలి విశేషము.

పై ఉపపత్తియందలి సమీకరణముల బట్టి

$$\text{ప్రల} = \frac{\text{యా} \times \text{ప్రగు} - \text{ప్రశే}}{\text{హా}} \quad \therefore \text{యా} = \frac{\text{హా} \times \text{ప్రల} + \text{ప్రశే}}{\text{ప్రగు}}$$

$$\text{ద్విల} = \frac{\text{యా} \times \text{ద్విగు} - \text{ద్విశే}}{\text{హా}} \quad \therefore \text{యా} = \frac{\text{హా} \times \text{ద్విల} + \text{ద్విశే}}{\text{ద్విగు}}$$

$$\therefore \frac{\text{హా} \times \text{ప్రల} + \text{ప్రశే}}{\text{ప్రగు}} = \frac{\text{హా} \times \text{ద్విల} + \text{ద్విశే}}{\text{ద్విగు}}$$

సమచ్ఛేదములుగ చేసి ఛేదములను విడువగా

$$\text{హా.ప్రల.ద్విగు} + \text{ప్రశే.ద్విగు} = \text{హా.ద్విల.ప్రగు} + \text{ద్విశే.ప్రగు}$$

$$\therefore \frac{\text{ప్రశే.ద్విగు} \backsim \text{ద్విశే.ప్రగు}}{\text{హా}} = \text{ద్విల.ప్రగు} \backsim \text{ప్రల.ద్విగు}$$

దీనింబట్టి ప్రథమశేషమును ద్వితీయగుణకముచే గుణించి, ద్వితీయశేషమును ప్రథమగుణకముచే గుణించి, రెండిటియొక్కయు అంతరమును హారముచే భాగింప నగు లబ్ధము ద్వితీయలబ్ధప్రథమగుణకముల గుణనముయొక్కయు, ప్రథమలబ్ధద్వితీయగుణకముల గుణనముయొక్కయు, అంతరముతో సమము గావలెననియు దానివలన అట్లు హారముచే భాగింప శేషము మిగులగూడదనియును శేషము మిగులుచో నాప్రశ్నము సరియైనది గాదనియును గ్రహింపదగియున్నది

ఇందులకు మ. మ. పం. బాపుదేవశాస్త్రిగారి శ్లోకము.

అన్యోన్యాగ్రాహతయో ర్గుణయో స్సంశ్లిష్టకుట్టకేయత్ర।
వియుతి ర్హారేణ భక్తా న నిరగ్రా స్యాత్ఖిలం తదుద్దిష్టమ్॥

తా॥ పరస్పరశేషములచే గుణింపబడిన పరస్పరగుణకములయొక్క అంతరమును హారముచే భాగింప నిశ్శేషముగానిచో నాప్రశ్నము ఖిలము.

(2) గుణకయోగమును భాజ్యముగను శేషయోగమును క్షేపముగను కల్పించి ఆ భాజ్యహారక్షేపముల నొకానొకసంఖ్యచే అపవర్తించి కుట్టకవిధిప్రకారము సాధించిన గుణకలబ్ధములను ఇష్టాహతేత్యాదిసూత్రము (209 ప్ర) చే అనేకవిధములుగ మార్చుచో అందు కొన్నిమాత్రమే సరిపడును. కొన్ని సరిపడవు కావున ఆలోచించి సరిపడువాటిని గ్రహింపవలయును.

ఆ భాజ్యహారక్షేపముల కపవర్తనము లేనిచో గుణకలబ్ధములు ఎన్నివిధములుగనైనను సరిపడగలవు. (మ. మ. పం. బాపుదేవశాస్త్రిగారు)

ఇది కుట్టక వ్యవహారము 21వ ప్రకరణము.

అంకపాశవ్యవహారము.

22-వ ప్రకరణము.

214. ప్ర. ఉద్దిష్టములగు నంకెలను గాని పదార్థములను గాని ఒక్కొక క్రమము ననుసరించి ఉద్దిష్టస్థానములందు విన్యసింపుచో (స్థాపింపుచో) ఎన్నివిధములుగ విన్యసింపవచ్చును? ఇట్టిప్రశ్నములందు వినిమయముగ నుంచుట చేనగు ప్రస్తార (విన్యాస)భేదముల సముదాయము అంకపాశము. సూత్రములచే నిర్మింపబడిన పాశమునందు సూత్రములువలె నిందు అంకములు మొదలగునవి వినిమయము గలిగియుండును కావున అంకములచేనైన పాశమువంటిది యగుటచే అంకపాశమని సంజ్ఞ గలిగినది దీనిని సంబంధించిన గణితమున్ను అంకపాశమని చెప్పబడుచున్నది. ఇందు ఆయాపదార్థములనుగాని అంకెలనుగాని ప్రస్తరించుటలో స్థానవ్యత్యయము చేనగు భేదములు అన్నియు గ్రహింపబడును. ఇదియ వ్యక్తిభేదగణితమునకును, అంకపాశమునకును, గల భేదము. (134 ప్ర. చూ) (ఉదాహరణములందు స్పష్టమగును.)

నిర్దిష్టాంకై స్సంఖ్యాయా విభేదే కరణసూత్రం వృత్తం.

స్థానాంతమేకాదిచయాంకఘాత స్సంఖ్యావిభేదానియతైస్స్యురంకైః।
భక్తోంకమిత్యాంకసమాసనిఘ్నః స్థానేషుయుక్తోమితిసంయుతిస్స్యాత్॥

టీ॥ స్థానాంతమ్=ఉద్దిష్టస్థానసంఖ్యఅవధియగు ఏకాదిచయాంక ఘాతః = ఒకటిమొదలు ఒకటివృద్ధిగానైన యంకెలయొక్క గుణనము, నియతైఃఅంకైః = నియతముగ నిర్దేశింపబడిన అంకెలచేనగు, సంఖ్యావిభేదాః స్యుః = సంఖ్యాభేదము లగును.

(సః = ఆ ఒకటిమొదలు ఉద్దిష్టస్థానసంఖ్యవరకునైన గుణనము) అంకమిత్యా భక్తః = అంకెల (స్థానముల)యొక్క పరిమితిచే భాగింపబడినదై, అంకసమాసనిఘ్నః = నిర్దిష్టాంకములయోగముచే గుణింపబడినదై, స్థానేషు యుక్తః = ఉద్దిష్టస్థానములందు (స్థానవ్యత్యాసముగ) వ్రాయబడి కలుపబడినదై, మితిసంయుతిః = సంఖ్యాభేదములయోగము. స్యాత్ = అగును.

215. ప్ర. కొన్ని వేరువేరుఅంకెలనిచ్చి ఆఅంకెలెన్నియో అన్నిస్థానములందును వాటిని స్థానవినిమయముగా ప్రస్తరించుచో నగు సంఖ్యాభేదములను

తెలియుటకును ఆ సంఖ్యాభేదము లన్నిటియొక్కయు యోగము నెరుగుటకును పద్ధతి:—

(1) ఎన్నిస్థానములుగలవో ఆసంఖ్యవరకును ఒకటిమొదలుగ నన్నియంకెలను క్రమముగ వ్రాయుము. వాటి అన్నిటియొక్కయు గుణనఫలము ప్రస్తారభేదముల సంఖ్య యగుచున్నది. (ఇదియ ఏకాదిచయాంకఘాతము లేక ఏకాది గుణనము)

(2) ఆ ప్రస్తారభేదసంఖ్యను ఉద్దిష్టములగు అంకెల యోగముచే గుణించి అంకెలెన్నియో ఆ(అంకపరిమితి) సంఖ్యచే భాగింపనగు లబ్ధమును ఉద్దిష్టస్థానములందు స్థానవినిమయముగ వ్రాయుము. వీటి యోగము ప్రస్తారభేదములయోగము.

ఉదాహరణమ్

ద్వికాష్టకాభ్యాం త్రినవాష్టకై ర్వా నిరంతరం వ్యాదినవావసానైః।
సంఖ్యావిభేదాః కతి సంభవంతి తత్సంఖ్యకైక్యాని పృథగ్వదాశు॥

న్యాసః. ౨, ౮ అత్రస్థానే ౨ స్థానాంతమేకాదిచయాంకా ౧, ౨ ఘాతః ౨ ఏవంజాతౌ సంఖ్యాభేదౌ ౨ అథ సఏవ ఘాతోంకసమాస౧౦ నిఘ్నః ౨౦ అంకమిత్యానయా ౨ భక్తః౧౦ స్థానద్వయే యుక్తో జాతం సంఖ్యైక్యం ౧౧౦.

ద్వితీయోదాహరణే న్యాసః. ౩, ౯, ౮ అత్రైకాదిచయాంకాః ౧, ౨, ౩ ఘాతః౬ ఏతావంత స్సంఖ్యాభేదాః. ఘాతః౬ అంకసమాస౨౦ హతః౧౨౦, అంకమిత్యా౩ భక్తః౪౦ స్థానత్రయే యుక్తో జాతం సంఖ్యైక్యం ౪౪౪౦

తృతీయోదాహరణే న్యాసః ౨, ౩, ౪, ౫, ౬, ౭, ౮, ౯ ఏవమత్ర సంఖ్యాభేదా శ్చత్వారింశత్సహస్రాణి శతత్రయం వింశతిశ్చ ౪౦౩౨౦, సంఖ్యైక్యంచ చతుర్వింశతినిఖర్వాణి త్రిషష్టిపద్మాని నవనవతికోటయః నవనవతిలక్షాణి పంచసప్తతిసహస్రాణి శతత్రయం షష్టిశ్చ ౨౪౬౩౯౯౯౯౭౫౩౬౦

తా॥ 2, 8 ఈఅంకములచేగాని 3, 9, 8 ఈఅంకెలచేగాని 2 మొదలు 9వరకునైన అంకెలచేగాని ప్రస్తరించుటవలన ఎన్ని సంఖ్యాభేదములగును? ఆసంఖ్యాభేదముల యోగము లెన్ని? వేర్వేరుగ శీఘ్రముగ చెప్పుము.

(1) ఉదా. 2, 8 ఈఅంకెలు ఉద్దిష్టములైనవి. వీటిస్థానములు2 ఒకటి మొదలు స్థానసంఖ్యవరకునైన అంకెల గుణనము $1 \times 2 = 2$. ఇవి సంఖ్యాభేదములు. అనగా ప్రస్తారభేదము లగుచున్నవి. ఈ భేదసంఖ్య2ను ఉద్దిష్టాంకముల $2 + 8 = 10$ యోగముచే గుణింప $2 \times 10 = 20$ దీనిని ఉద్దిష్టాంకములు 2 గావున ఈపరిమితిసంఖ్య 2చే భాగింప $20 \div 2 = 10$ లబ్ధము. దీనిని ఉద్దిష్టస్థానములు 2 గావున 2స్థానములందు స్థానభేదముగ వ్రాసి కలుపగా 110 ప్రస్తారభేదయోగ మగుచున్నది.

$$\begin{array}{r} 10 \\ 10 \\ \hline 110 \end{array}$$

రుజువు: 2, 8 వీటిని ప్రస్తరింప రెండుభేదములే యైనవి. వాటిని కలుపగా 110యోగ మగుచున్నది.

$$\begin{array}{r} 28 \\ 82 \\ \hline 110 \end{array}$$

(2) ఉదా: 3, 9, 8 ఉద్దిష్టసంఖ్యలు. వీటిస్థానములు 3 కావున ఈస్థానసంఖ్యవరకు ఏకాదిగుణనము $1 \times 2 \times 3 = 6$ ఇది ప్రస్తారభేదసంఖ్య. ఈ భేదసంఖ్య 6ను ఉద్దిష్టాంకములయోగము $3 + 9 + 8 = 20$చే గుణించి అంకెలపరిమితి 3చే భాగింప $\frac{6 \times 20}{3} = 40$ ఈలబ్ధమును ఉద్దిష్టస్థానములు 3కావున 3స్థానములందు స్థానభేదముగ వ్రాసి కలుపగా సంఖ్యాభేదముల యోగ మగుచున్నది.

$$\begin{array}{r} 40 \\ 40 \\ 40 \\ \hline 4440 \end{array}$$

రుజువు : ప్రస్తారము 6భేదము లగుచున్నది. అన్నిటిని వరుసగా వ్రాసి ఆసంఖ్యల నన్నిటిని కలుపగా 4440 సంఖ్యాభేదముల యోగ మగుచున్నది. ఇట్లు అంతటను గ్రహించునది.

$$\begin{array}{r} 398 \\ 389 \\ 893 \\ 983 \\ 938 \\ 839 \\ \hline 4440 \end{array}$$

(3) ఉదా:—ఉద్దిష్టాంకములు 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 స్థాన సంఖ్య8 కావున ఏకాదిగుణనము $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 = 40320$ ఇది

ప్రస్తారభేదములసంఖ్య యగుచున్నది. దీనిని ఉద్దిష్టాంకముల యోగము $2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 44$చే గుణించి ఉద్దిష్టాంకపరిమితి 8చే భాగింప $\frac{40320 \times 44}{8} = \frac{40320 \times 11}{2} = 20160 \times 11$ $= 221760$ లబ్ధము.

దీనిని 8స్థానములందును స్థానభేదముగ వ్రాసి కలుపగా

2463999975360 ప్రస్తారముచేనైన సంఖ్యాభేదముల యోగ మగుచున్నది.

ఉపపత్తి:—'అ' ఇట్టి ఒకవర్ణమును మాత్రమే ప్రస్తరింపుచో ఒకేభేద మగుచున్నది. ఇట్లు అ.క ఈరెండువర్ణములను ప్రస్తరింపుచో అక అనియు కఅ అనియు రెండుభేదము లగుచున్నవి. ఈ రెండుభేదములందును 3వ స్థానమున గ వర్ణమునుకూర్చి ప్రస్తరింపుచో గఅక, అగక, అకగ అనియు గకఅ, కగఅ, కఅగ అనియు ఒక్కొకటి 3భేదములుచొప్పున 6భేదము లగుచున్నవి. ఇట్లు 3స్థానములందును వర్ణములచేనైన 6భేదములలోను ఒక్కొకభేదమునందు మొదటను తుదను మధ్యలందును వేర్వేర నాల్గవవర్ణమును నాల్గుస్థానములందును వర్ణము లుండునట్లు చేర్చినచో ఒక్కొకభేదము 4విధము లగుచున్నది. అట్లు మొత్తము నాలుగుస్థానములందును వేరువేరు వర్ణములను ప్రస్తరించుటచేనగు భేదములు 24 అగుచున్నవి. ఇట్లు చూడగా ఒకవర్ణముచేనైన భేదసంఖ్య 1టియే యైనది, రెండువర్ణములచేనైన భేదసంఖ్యను విచారింపగా ఈస్థానసంఖ్య 2ను పూర్వభేదసంఖ్య 1టిచే గుణింపగానగు సంఖ్యతో సమమగుచున్నది. ఇట్లు 3స్థానములందును 3వర్ణములచేనైన భేదసంఖ్యయు ఈస్థానసంఖ్య 3ను పూర్వభేదసంఖ్యచే గుణింపనగు సంఖ్య $3 \times 2 = 6$ తో సమమగుచున్నది. ఇట్లు నాలుగుస్థానములందును 4వర్ణములను ప్రస్తరింపనగు భేదసంఖ్య పూర్వభేదసంఖ్య 6చే స్థానసంఖ్య 4ను గుణింపగానగు సంఖ్య అగుచున్నది. ఇట్లు చూడగా ఆయాభేదసంఖ్యలు ఒకటిమొదలు స్థానసంఖ్యవరకును ఏకోత్తరవృద్ధిగా వ్రాయబడిన అంకముల గుణనఫలములతో సమము లగుచున్నవి. ఇట్లు అంతటను గ్రహింపనగినది. దీనిచే ప్రస్తారభేదానయన ముపపన్న మగుచున్నది

భేదములయొక్క యోగమును విచారించినచో భేదములెన్నిగలవో అన్ని పంక్తులనుట స్పష్టముగదా! ఈభేదములలో ఏకస్థానాంకములను విచారింతము. అపుడు ఉద్దిష్టవర్ణముల ప్రస్తరించుటచే భేదములైనవి గావున ఆ ఉద్దిష్టములకు వర్ణములే తిరుగతిరుగ ఆవర్తింపబడియున్నవనియును మనము చూడగలము. దానిచే భేదసంఖ్యను ఉద్దిష్టవర్ణములపరిమితి (అంకమితి)చే భాగింప నెంతయగునో ఆ సంఖ్యచేనైన పర్యాయములు ఒక్కొకవర్ణము ఆవృత్తిగ ఆఏకస్థానమునగలవనియు స్పష్టమగుచున్నది. ఉద్దిష్టవర్ణములను అన్నిటిని కలుపగానగు(అంకసమాస)సంఖ్యను అంకమితిచే భేదసంఖ్యను భాగింపగానగు లబ్ధముచే,గుణింప ఏకస్థానాంకముల యోగమగుననియు తెలియుచున్నది. ఇందు ఉద్దిష్టవర్ణములే వినిమయముగ ప్రస్తరింపబడినవగుటచే నిలువుగనైన ప్రతిపంక్తియొక్కయు యోగము సమమే యగుచున్నది. కావున ఈయోగసంఖ్యను ఒక్కొకస్థానము వ్యత్యయముగ (గుణకారమునందు ఏకాదిస్థానాంకములచే గుణించిన గుణనఫలములవలె) నుండునట్లు వ్రాసి, కలుప ప్రస్తారభేదముల యోగ మగుననుట స్పష్టము. ఇట్లు ప్రస్తారభేద యోగానయనమున్ను ఉపపన్న మగుచున్నది.

అన్యదుదాహరణమ్

పాశాంకుశాహి డమరూక కపాల శూలైః ఖట్వాంగ శక్తి
శరచాపయుతై ర్భవన్తి। అన్యోన్యహస్త కలితైః కతి మూర్తి భేదాః
శ్శంభో ర్హరే రివ గదారిసరోజశంఖైః॥ ౧౧౨॥

న్యాసః. స్థానాని౧౦ ఏవమత్రజాతా మూర్తిభేదాః ౩౬౨౮౮౦౦
ఏవం హరేశ్చ ౨౪

తా॥ (1) విష్ణుమూర్తి నాలుగుహస్తములందును గద, చక్రము, పద్మము, శంఖము, వీటిని ధరించియుండును. ఈనాలుగువస్తువులను నాలుగుహస్తములందును తారుమారుచేసి ధరించుచో ఎన్నిప్రకారములుగ మార్పుచేయవచ్చును? అనగా ఒక్కొకప్రకారమగు ఆయుధధారణము ఒక్కొకమూర్తి యగుచో మూర్తిభేదము లెన్నియగును ?

(2) అట్లుసాంబమూర్తి 10హస్తములందును పాశము, అంకుశము, సర్పము, డమరుగము (వాద్యవిశేషము), కపాలము, శూలము, ఖట్వాంగము(మంచపుకోడు) శక్తి, బాణము, ధనుస్సు, వీటిని ధరించును. ఈ 10ఆయుధములను 10హస్తము లందును తారుమారుచేసి ధరించుచో మూర్తిభేదము లెన్నియగును?

(1) ఉదాహరణమునందు స్థానములు4 కావున ఒకటిమొదలు 4వరకునైన అంకముల గుణనము $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ మూర్తిభేదము లగును.

అనగా శ్రీహరికి కుడివైపున 2ను ఎడమువైపున 2ను ఇట్లు 4హస్తములు. ఇందు కుడివైపున ఒకటి ఊర్ధ్వముగను మరియొకటి క్రిందుగను ఇట్లుగనే ఎడమ వైపునను ఉన్నవి యనుకొనుము. అందు కుడివైపు పైహస్తమున చక్రము,క్రింది హస్తమున గద, ఎడమవైపున పైహస్తమునందు శంఖము, క్రిందిహస్తమునపద్మము ఇది యొకస్వరూపము. ఇట్లు కుడివైపు పైహస్తమున శంఖము, క్రిందిహస్తమున గద, ఎడమవైపున పైహస్తమున చక్రము, క్రిందిహస్తమున పద్మము, ఇదియొక స్వరూపము. ఇట్టిస్వరూపములు శ్రీహరికి 24 అగుచున్నవి. ఈస్వరూపభేదము లనే కేశవాదినామములచే పురాణములందు చెప్పియున్నారు.

(2) ఇట్లు శివస్వరూపభేదములందు ఆయుధస్థానములు 10.

కావున 10వరకును ఏకాద్యంకగుణనము

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 = 3628800$$ అగుచున్నది.

ఇన్నిమూర్తిభేదములు శివునకు అగుచున్నవి

ఇది అంకప్రస్తారముగాక వస్తుప్రస్తారమగుటచే ప్రస్తారభేదసంఖ్యలకు యోగము చూపబడలేదు. శంఖచక్రాదులకు తీసుకొనుసంఖ్య యెద్ది? కావున ప్రస్తారభేదసంఖ్యాయోగమును చేయబూనుట యుక్తియుక్తముగ గనుపట్టుట లేదు. ఆచార్యులవారును మూర్తిభేదములసంఖ్యనే యిచ్చియున్నారు

విశేషే కరణసూత్రం వృత్తమ్

యావత్స్థానేషు తుల్యాంకా స్తద్భేదై స్తు పృథక్కృతైః।
ప్రాగ్భేదా విహృతా భేదా స్తత్సంఖ్యైక్యం చ పూర్వవత్॥౧౪౪

టీ॥ యావత్స్థానేషు = ఎన్ని స్థానములందు, తుల్యాంకాః = సమములగు నంకెలుగలవో, పృథక్కృతైః = వేరుగసాధింపబడిన, తద్భేదైః = ఆస్థానముల సంబంధమగు భేదములచే, ప్రాగ్భేదాః = పూర్వప్రకారము సాధింపబడిన భేదములు, విహృతాః = భాగింపబడినవియై, భేదాః = భేదములగును. తత్సంఖ్యైక్యంచ = ఆ సంఖ్యాభేదముల యోగమున్ను, పూర్వవత్ = పూర్వప్రకారము అగుచున్నది.

216. ప్ర. నిర్దిష్టాంకములలో కొన్ని (ఒకవిధమైనవి) భేదములేనివి యగుచో పద్ధతి.

(1) ఎన్నిస్థానములందు భేదములేని యంకెలునిర్దేశింపబడినవో ఆస్థానముల సంఖ్యచే పూర్వసూత్ర (215 ప్ర) ప్రకారము వేర్వేరుగ భేదముల సాధింపుము

(2) నిర్దిష్టాంకముల యొక్క స్థానముల సంఖ్యవలన పూర్వసూత్ర (215 ప్ర) ప్రకారము సాధించిన భేదసంఖ్యను పై భేదసంఖ్యలచే భాగింపుము. ఈలబ్ధము సరియగు భేదసంఖ్య గాగలదు.

(3) ఈసంఖ్యనుబట్టి పూర్వసూత్ర (215 ప్ర 2) ముచే సంఖ్యైక్యమును సాధింపుము. అది సంఖ్యైక్య మగును.

ఉపపత్తి: మూడుస్థానములందును ఒకవిధము గానట్టి వర్ణములవలన 6 భేదము లగుచున్నవి. నాలవస్థానమున వేరువర్ణమును చేర్చుచో 24 భేదములగును. అందు మూడుస్థానములందును ఒకేవర్ణమగుచో 4 భేదములే యగును.

ఎట్లనగా : 'అఅఅ' ఇదిమూడుస్థానములందును ఒకేవర్ణముగల భేదస్వరూపము. ఇందు 'క' అను అక్షరమును చేర్చుచో మొదటను, తుదను, 2 మధ్యభాగములందున్ను. ఇట్లు 4 పర్యాయములు చేర్చవచ్చును. కఅఅఅ, అఅఅక, అకఅఅ, అఅకఅ, కావున 4 భేదములే యగుచున్నవి. అనగా మూడుస్థానములందును వేరువేరు వర్ణము లున్నచో 6 భేదములును మరియొకవర్ణమును చేర్చుటచే ఒక్కొకటి 4 భేదములైనవి. మూడుస్థానములందును ఒకేవర్ణమగుచో 1 భేదమే అయి అది 4 భేదములైనది. కావున పూర్వ భేదములు 6 అగుచో ఇప్పటి భేదములు 24 అగుచున్నవి పూర్వ భేదసంఖ్య 1టి యగుచో నెన్నియగును? ఈ త్రైరాశికముచే మొత్తము

భేదసంఖ్య 24ను ఒకేవిధములగువర్ణములసంఖ్యచేనగు భేదసంఖ్యచే భాగింపవలయునని తెలియుచున్నది. దీనిచే పైపద్ధతి ఉపపన్న మగుచున్నది.

ఉదాహరణమ్.

ద్విద్వ్యేకభూపరిమితైః కతి సంఖ్యకాస్స్యు స్తాసాం యుతించ గణక కథయ మమ ప్రచక్ష్వ। అంభోధి కుంభి శర భూత శరై స్తథాంకైశ్చే దంకపాశ మితి యుక్తి విశారదోసి॥ ౧౧౮॥

తా॥ గణకుడా ! నీవు అంకపాశపరిమితులయొక్కయు వాటియోగము యొక్కయు తెలిసికొనుటయందు నేర్పరివగుచో 2, 2, 1, 1 ఈఅంకములచే సంఖ్యాభేదము లెన్నియగును ? ఆభేదసంఖ్యనున్ను వాటియోగమున్ను నాకు శీఘ్రముగ చెప్పుము. అట్లు 4, 8, 5, 5, 5 ఈఅంకములచేనగు భేదసంఖ్యను ఆభేదములయోగమునున్ను చెప్పుము.

న్యాసః. ౨, ౨, ౧, ౧ అత్ర ప్రాగ్వద్భేదాః ౨౪ "యావత్స్థానేషు" తుల్యాంకా ఇత్యత్ర ప్రథమం తావత్స్థానద్వయే తుల్యౌ ప్రాగ్వత్స్థానద్వయాజ్జాతౌ భేదౌ ౨, పునరన్యత్రాపి స్థానద్వయే తుల్యౌ ప్రాగ్వత్తత్రాప్యేవం భేదౌ ౨. భేదాభ్యాం ప్రాగ్భేదాః ౨౪ భక్తా జాతాస్సంఖ్యాభేదాః ౬ తద్యథా ౨౨౧౧।౨౧౨౧।౨౧౧౨।౧౨౨౧। ౧౨౧౨।౧౧౨౨। పూర్వవత్సంఖ్యైక్యంచ ౯౯౯౯

న్యాసః ౪౮౫౫౫ అత్రాపి పూర్వవద్భేదాః ౧౨౦ స్థానత్రయోత్థభేదైః ౬ భక్తా జాతా భేదాః ౨౦। సంఖ్యైక్యంచ ౧౧౯౯౯౮౮

(1) ఉదా: 2, 2, 1, 1 ఈఅంకెలప్రస్తారముచే భేదములెన్నియగును? ఆసంఖ్యాభేదముల యోగ మెంతయగును?

ఇందు 4స్థానములందు అంకెలున్నవి గావున (215ప్ర. చే) ఆభేదములు24 మరియు మొదట 2, 2 ఇవిరెండును సమానములై యున్నవి. కావున వీటి సంఖ్యచేనగు భేదములు2 దీనిచే పైసంఖ్య 24ను భాగింప $24 \div 2 = 12$.

ఇట్లు 1, 1 ఈరెండును సమము లైయున్నవి. కావున వీటిసంఖ్యచేనగు భేదములసంఖ్య 2చే వైలబ్ధము 12ను భాగింప $12 \div 2 = 6$ ఇవి వాస్తవ భేదములు.

ఇట్లు వచ్చినభేదసంఖ్యచే భేదయోగమును గనుగొనవలయును. ఎట్లనగా: ఈభేదసంఖ్య6ను అంకయోగము$(2+2+1+1=6)$చే గుణించి అంకపరిమితిచే భాగింప $\frac{6}{4} \times 6 = 9$ దీనిని 4స్థానములందు స్థానవ్యత్యయముచే వ్రాయగా 9 9 9 9 అగుచున్నది. ఇట్లు భాగింపగావచ్చిన 9 ఒకేస్థానముగలవి యగుటచే యోగముచేయుట తగ్గినది.

2 2 1 1
2 1 1 2
2 1 2 1
1 2 2 1
1 2 1 2
1 1 2 2
———
9 9 9 9

(2)ఉదా: 4, 8, 5, 5, 5 వీటిచేభేదములు? భేదయోగము? ఇందు 5స్థానములందు అంకెలున్నవి కావున (215 ప్రి.చే) ఆభేదములు 120 అందు మూడు స్థానములందు ఒకేయంకె గలదు కావున 3చేనగు భేదసంఖ్య 6చే భాగింప 20 భేదసంఖ్య వాస్తవమైనది యగుచున్నది ఎట్లనగా :

4 8 5 5 5, 5 5 5 4 8, 5 5 5 8 4, 5 5 8 5 4, 5 8 5 5 4
5 4 5 5 8, 5 5 4 8 5, 5 5 8 4 5, 5 8 5 4 5, 5 8 4 5 5
5 5 4 5 8, 5 4 8 5 5, 4 5 8 5 5, 4 5 5 8 5, 4 5 5 5 8
5 4 5 8 5, 8 4 5 5 5, 8 5 5 4 5, 8 5 4 5 5, 8 5 5 5 4

108
108
108
108
108
———
1199988

ఈభేదసంఖ్య20ను అంకయోగము$(4+8+5+5+5=27)$చే గుణించి అంకపరిమితి 5చే భాగింప $\frac{20}{5} \times 27 = 4 \times 27 = 108$ దీనిని 5స్థానములందును స్థానభేదముచే వ్రాసి కలుపగా ప్రస్తారముచేనగు సంఖ్యాభేదముల యోగము అగుచున్నది.

అనియతాంకై రతుల్యైశ్చ సంఖ్యావిభేదే కరణసూత్రం.
స్థానాంతమేకాపచితాంతిమాంకఘాతో౽సమాంకైశ్చమితిప్రభేదాః॥

టీ॥ స్థానాంతం=నిర్దిష్టస్థానములకు అంతమగునట్లు, ఏకాపచితాంతిమాంకఘాతః=ఒక్కొకటిచే వ్యవకలింపబడిన(నిర్దిష్టాంకములలోని)తుదియంకెయొక్కయు

(అనగా తుదియంకెలో నొక్కొకటినివ్యవకలింపనగు అంకెలయొక్కయు) తుదియంకెయొక్కయు గుణనము, అసమాంకైః = వేరువేరగు నంకెలచేనగు, మితి ప్రభేదాః = సంఖ్యాభేదము లగుచున్నవి.

217. ప్ర. ఇదివరలో నిర్దిష్టాంకతుల్యస్థానములందు నిర్దిష్టాంకములను ప్రస్తరించుటచేనగు భేదములగూర్చి (1) అన్నిస్థానములందును వేరువేరగుఅంకెలుండుట. (2) కొన్నిస్థానములందు ఒకేవిధములగు నంకెలు ఉండుట. అను రెండుపద్ధతులును చెప్పబడినవి.

ఇపుడు వేరువేరగు నిర్దిష్టాంకములను అంతకుతక్కువయగు కొన్నిస్థానములందు ప్రస్తరింపుచో నగు భేదముల తెలియుటనుగూర్చి పద్ధతి చెప్పబడుచున్నది.

పద్ధతి:—నిర్దిష్టాంకములెన్నిగలవో ఆసంఖ్య మొదలిడి తలక్రిందుగ అంకెలను వ్రాయుము. ఆఅంకెలను స్థానములెన్ని నిర్దేశింపబడినవో అన్నిటినివ్రాయుము వాటిని పరస్పరము గుణింపనగు గుణనఫలము, వేరువేరు నిర్దిష్టాంకములను కొన్నిస్థానములందు ప్రస్తరింపనగు భేదముల సంఖ్య యగును.

ఉదాహరణమ్.

స్థానషట్కస్థితై రంకై రన్యైః ఖేన వర్జితైః।
కతి సంఖ్యావిభేదా స్స్యు ర్యది వేత్సి నిగద్యతాం॥౧౧౮॥

అత్రాంతిమాంకో నవ షట్స్థానేషు ఏకైకాపచితా న్యస్తాః ౯, ౮, ౭, ౬, ౫, ౪ ఏషాంఘాతే జాతా స్సంఖ్యాభేదాః౬౦౪౮౦

తా॥ ఏకవిధములుగానట్టియు సున్నచేవిడువబడినవియు, నగు అంకెలను 6స్థానములందుమాత్రమే ప్రస్తరింపుచో సంఖ్యాభేదము లెన్నియగును? తెలిసినచో చెప్పుము.

ఇచట సున్నగాక మిగిలినయంకెలు 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ఇవియే యగుచున్నవి. తక్కినసంఖ్యలన్నియు వీటివిన్యాసముచే బోధింపబడుచున్నవి. (3 ప్రి, 4 ప్ర. చూ) కావున నిర్దిష్టాంకములు 9, నిర్దిష్టస్థానములు6, అగుచున్నవి. పద్ధతిప్రకారము నిర్దిష్టాంకసంఖ్యనుండి తలక్రిందుగ 6అంకెలను వ్రాసి పరస్పరము గుణింపగా

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 60480$$ భేదసంఖ్య యగుచున్నది.

ఉపపత్తి:— (134 ప్ర. ఉపపత్తి 2చూ)

అ, క, గ, చ మొదలగు 'యా' పరిమితవర్ణములు గల వనుకొనుము.

వీటిని ఒక్కొకస్థానమునందు ఒక్కొకవర్ణమును ప్రస్తరింపుచో 'యా'పరిమితభేదములే యగుచున్నవి. రెండుస్థానములందు రెండురెండువర్ణములను ప్రస్తరింపుచో 'అ' ఈవర్ణముతో నితరవర్ణములను ముందుభాగమున చేర్పగా నగు భేదములు (యా—1) పరిమితము లగుచున్నవి. ఇట్లు క వర్ణముతో తదితరవర్ణములను చేర్ప నగు భేదములును (యా—1) పరిమితములగుచున్నవి. ఇట్లు ప్రతివర్ణముతోడను తదితరవర్ణములను చేర్పగా నగు భేదము లగుచున్నవి. కావున వర్ణసంఖ్య యగు 'యా' దీనిచే ప్రత్యేకభేదసంఖ్య (యా—1)ను గుణింప వర్ణద్వయముచేనైన భేదములు, యా × (యా—1) అగుచున్నవి.

ఇట్లు అక, ఈస్వరూపమునందు మూడవస్థానమున ముందుభాగమున నీ రెండిటికంటె నితరములగు నొక్కొకవర్ణమును చేర్చుచురాగా (యా—2) పరిమితభేదము లగుచున్నది. ఇట్లు పూర్వభేదములలో నొక్కొక్కటి (యా—2) పరిమితభేదము లగును. కావున పూర్వభేదసంఖ్యచే గుణింప వర్ణత్రయజనితభేదములు, యా × (యా—1) (యా—2)ఇట్లు వర్ణషట్కముచే

యా (యా—1) (యా—2) (యా—3) (యా—4) (యా—5)

ఇందు యా=నిర్దిష్టాంకసంఖ్య,కావున నిర్దిష్టాంకసంఖ్యనుండి తలక్రిందుగనైన స్థానసంఖ్యాపరిమితములగు అంకెలగుణనము భేదసంఖ్యయని స్పష్టముగ గన్పట్టుచున్నది. ఇట్లీపద్ధతి యుపపన్నము.

అన్యత్కరణ సూత్రం.

నిరేకమంకైక్యమిదంనిరేకస్థానాంత మేకాపచితంవిభక్తం॥ ౧౮౫॥
రూపాదిభిస్తన్నిహతేస్సమాస్స్యు స్సంఖ్యావిభేదానియతేంకయోగే॥
నవాన్వితస్థానకసంఖ్యకాయా ఊనేంకయోగేకథితంతువేద్యం॥ ౧౮౬॥
సంక్షిప్తముక్తంపృథుతాభయేన నాంతోస్తియస్మాద్గణితార్ణవస్య॥

టీ॥ అంకైక్యం = అంకయోగము, నిరేకం (కార్యం)=ఒకటిచే వ్యవకలింపదగినది. ఇదం = ఈ నిరేకమగు అంకయోగము, నిరేకస్థానాంతం = నిరేకమగుస్థానసంఖ్యవరకు, ఏకాపచితం = ఒకటిచే క్రమముగతగ్గింపబడినదియై, రూపాదిభిః = ఒకటిమొదలగు (నిరేకస్థానసంఖ్యవరకునైన) అంకెలచే విభక్తం కార్యం = భాగింపదగినది. తన్నిహతేః = ఆ(భాగింపనగు) సంఖ్యలయొక్క గుణనఫలమునకు, సమాః = సమములై, నియతే అంకయోగే = నియతమగు అంకయోగమందైన, సంఖ్యావిభేదాః స్యుః = సంఖ్యాభేదములగును.

తు = విశేషమేమనగా : కథితం = చెప్పబడినపద్ధతి, అంకయోగే నవాన్వితస్థానకసంఖ్యకాయా ఊనే వేద్యం = (నిర్దిష్టమగు) అంకయోగము 9తో కూర్పబడినస్థానసంఖ్యకంటె తక్కువ యగునపుడు తెలియదగినది.

యస్మాత్ గణితార్ణవస్య అంతః నాస్తి (తస్మాత్) పృథుతాభయేన సంక్షిప్తం ఉక్తం=ఏకారణమువలన గణితసముద్రమునకు అవధి లేదో ఆకారణమువలన విస్తరభయముచే సంగ్రహముగ చెప్పబడినది.

218. ప్ర. (1) నిర్దిష్టస్థానములందు ప్రస్తరింపగానగు ప్రతిప్రస్తారభేదముయొక్కయు అంకయోగము అభీష్టసంఖ్యతో సమము గావలయును. ఇట్లు అంకయోగము స్థానసంఖ్యయు నిర్దిష్టమగునపుడు ప్రస్తారభేదములను తెలియు పద్ధతి :—

(2) అంకయోగమువలన 1టిని వ్యవకలింపుము. ఆ నిరేకాంకయోగము నుండి తలక్రిందుగనగు అంకెలను (పూర్వపూర్వసంఖ్యవలన ఒక్కొకటిని వ్యవకలించి) వ్రాయుము. అట్లు స్థానసంఖ్యవలన 1టిని వ్యవకలింపనగు (నిరేకస్థాన) సంఖ్యతో సమమగునన్ని పర్యాయములు వ్యవకలించిన అంకెలను వ్రాయుము.

(3) ఆసంఖ్యలను క్రమముగ 1టి మొదలు నిరేకస్థానసంఖ్యవరకునైన యంకెలచే భాగించి వాటిని పరస్పరము గుణింపుము.

(4) అది నవాన్వితస్థానసంఖ్యకంటె అంకయోగము అల్పమగునపుడు ప్రస్తారభేదములసంఖ్య యగును.

(5) సముద్రమువంటి గణితశాస్త్రమునకు పారములేదు. కావున విస్తరభయముచే సంగ్రహముగ చెప్పబడినది. యని భాస్కరాచార్యులవారు చెప్పిరి.

ఉదాహరణమ్

పంచస్థానస్థితై రంకై ర్యద్యద్యోగ స్త్రయోదశ।
కతిభేదా భవేత్సంఖ్యా యది వేత్సి నిగద్యతాం॥౧౧౮॥

అత్రాంకైక్యం౧౩ నిరేకం౧౨ ఇదమేకోనస్థానాంత మేకాపచితం రూపాదిభిశ్చ భక్తం న్యస్తం $\frac{౧౨}{౧}, \frac{౧౧}{౨}, \frac{౧౦}{౩}, \frac{౯}{౪}$ ఏషాం ఘాతసమా జాతా స్సంఖ్యాభేదాః ౪౯౫

తా। ఏయేపరిస్తారమందలి అంకయోగము 13అగునో అట్టిపరిస్తారములు 4స్థానములం దంకెల పరిస్తరింపుచో నెన్ని యగును? తెలిసినచో చెప్పుము.

అంకయోగము13 స్థానసంఖ్య5 నిరేకాంకయోగము12 నిరేకస్థానసంఖ్య4 కావున 12నుండి 4అంకెలను తలక్రిందుగవ్రాసి 1టి మొదలగు నంకెలచేభాగించి పరస్పరము గుణింప $\frac{12}{1} \times \frac{11}{2} \times \frac{10}{3} \times \frac{9}{4} = 3 \times 11 \times 8 \times 3 = 495$ భేదములు. ఈపరిస్తారములలో ఒకవిధముగు అంకెలును ఉండును.

ఉపపత్తి:—అంకయోగము 2అగుచో స్థానద్వయపరిస్తారము (11) ఇట్లు ఒకవిధమే గాగలదు. అంకయోగము 3అగుచో 12, 21 ఇట్లు 2 అగును. అంకయోగము 4అగుచో 31, 13, 22 ఇట్లు 3 అగును. అంకయోగము 5అగునపుడు 41, 14, 32, 23 ఇట్లు 4భేదము లగును. దీనింబట్టి స్థానద్వయపరిస్తార భేదసంఖ్య నిరేకాంకయోగసమ మనిస్పష్టము.

ఇట్లు అంకయోగము 9యగునపుడు స్థానత్రయపరిస్తారభేదముల విచారించుదము.

	(7)	(6)	(5)	(4)	(3)	(2)	(1)
1 8	1 1 7	2 1 6	3 1 5	4 1 4	5 1 3	6 1 2	7 1 1
2 7	1 2 6	2 2 5	3 2 4	4 2 3	5 2 2	6 2 1	
3 6	1 3 5	2 3 4	3 3 3	4 3 2	5 3 1		
4 5	1 4 4	2 4 3	3 4 2	4 4 1			
5 4	1 5 3	2 5 2	3 5 1				
6 3	1 6 2	2 6 1					
7 2	1 7 1						
8 1							

పూర్వ ప్రదర్శనమునందు స్థానద్వయభేదములు=(యో —1)అని స్పష్టమగుచున్నది. ఇందు యో = అంకయోగ; అట్లు స్థానత్రయపరిస్తారములు 1టి మొదలు (యో —2) వరకునైన సంఖ్యల సంకలితముతో సమముగ నగుచున్నవి యనియు తెలియుచున్నది. కావున స్థానత్రయపరిస్తారభేదసంఖ్య (136 ప్రి1 చే) ఇందుపదము (యో—2) కావున

$$\frac{(\text{యో}-2+1)\times(\text{యో}-2)}{2} = \frac{(\text{యో}-1)}{1} \times \frac{(\text{యో}-2)}{2}$$ అగుచున్నది.

దీనింబట్టి స్థానద్వయపరిస్తారభేదముల సంఖ్య నిరేకాంకయోగముతో సమమనియు స్థానత్రయపరిస్తారభేదసంఖ్య అంకయోగమువలన 2ను తీసివేసి 2చే భాగింపనగు సంఖ్యను పూర్వభేదసంఖ్యచే గుణింపగానగు సంఖ్యతో సమమనియు స్పష్టము. ఇట్లు స్థానసంఖ్య హెచ్చినకొలదిని స్థానద్వయపరిస్తారములవలన స్థానత్రయపరిస్తారములు, స్థానత్రయపరిస్తారములవలన స్థానచతుష్టయపరిస్తారములు, ఇట్లు పూర్వపూర్వపరిస్తారసంఖ్యవలన ఉత్తరోత్తరపరిస్తారము లగును కావున అంకయోగమువలన ఆయానిరేకస్థానసంఖ్యను వ్యవకలించి ఆనిరేకస్థానసంఖ్యచే భాగింపగానగు సంఖ్యను పూర్వపరిస్తారభేదసంఖ్యచే గుణింప తదుత్తరపరిస్తారభేదసంఖ్య యగుననియు గ్రహింపదగియున్నది. దానిచే అభీష్టస్థానసంఖ్యవలన నగు పరిస్తారభేదములు.

$$\left(\frac{\text{యో}-1}{1}\right) \times \left(\frac{\text{యో}-2}{2}\right) \times \frac{\text{యో}-3}{3} \cdots\cdots \frac{\text{యో}-\text{నిరేకస్థానాంక}}{\text{నిరేకస్థానాంక}}$$

= సర్వభేద; అగుచున్నవి. ఇట్లీపద్ధతి యుపపన్నమగుచున్నది.

ఇందు అంకయోగము 11అగుచో స్థానద్వయభేదములలో 10, 1 అనియు 1, 10 అనియు భేదములు ఉండవలయును. లేనిచో 10భేదములుగాక 8మాత్రమే భేదము లగును. ఇట్లు 9కంటె అధికమగుసంఖ్యలు పరిస్తారములోనున్నచో అంకయోగమునందు సందేహము గలుగు నను కారణముచే నవాన్వితస్థానసంఖ్య (9తో స్థానసంఖ్యను చేర్పగానగుసంఖ్య)కంటె అల్పముగ అంకయోగము అగునపుడే ఈపద్ధతి; యని భాస్కరాచార్యులు చెప్పియున్నారు.

కాని, అట్లు 9కంటె అధికములగుసంఖ్యలులేని భేదములెన్నియగును? దానినిగూర్చి మ. మ. పం. బాపుదేవశాస్త్రిగారు పద్ధతిని చెప్పిరి. ఇట్టి పద్ధతులు

నిర్మింపదగియున్నను గ్రంథవిస్తరభీతిచే సంక్షేపింపబడినది కాని శ్రీభాస్కరాచార్యులవారు చెప్పియున్నారు.

అట్లు ఆచార్యులవారిపద్ధతులకు ఉపపత్తులును అనేకప్రకారములుగ చెప్పదగియున్నవి. ఆయాప్రకరణములందు విశేషాంశములును నాకు తెలిసినంతలో వ్రాయదగినవి కొన్నిగలవు. అట్టి విశేషాంశములను అతిరిక్తములగు ఉపపత్తిప్రకారములను చేర్చి అనుబంధము నొకదానిని ప్రకటింప దలచియున్నాను.

నగుణో నహారో నకృతి ర్నఘనః పృష్ట స్తథాపి దుష్టానాం।
గర్వితగణకవటూనాం స్యా త్పాతోఽవశ్య మంకపాశే స్మిన్॥ ౧౮౭॥
ఇతి లీలావత్యా మంకపాశః.

తా॥ గుణనము ప్రశ్నింపబడలేదు. భాగహారము ప్రశ్నింపబడలేదు వర్గము ప్రశ్నింపబడలేదు. ఘనము ప్రశ్నింపబడలేదు ఐనను దుష్టులై గర్వించిన గణకవటువులకు ఈఅంకపాశమునందు తప్పక పతనమగును. అనగా ఈఅంకపాశమునందు గుణన భజన వర్గ వర్గమూలాదికము లేకపోయినను ప్రస్తారభేదములవలన గుటలో తప్పక పొరపడెద రని తాత్పర్యము. ఇట్లు ఈఅంకపాశమునందలి క్లేశము చెప్పబడినది.

ఇది అంకపాశ వ్యవహారము, 22 ప్రకరణము.

యేషాం సుజాతి గుణ వర్గ విభూషితాంగీ
శుద్ధాఖిలవ్యవహృతిః ఖలు కంఠసక్తా।
లీలావ తీహ సరసోక్తి ముదాహరంతీ
తేషాం సదైవ సుఖసంప దుపైతి వృద్ధిం॥ ౧౮౮॥

ఇతి శ్రీభాస్కరీయే సిద్ధాంతశిరోమణౌ
లీలావతీసంజ్ఞః పాట్యధ్యాయ
స్సమాప్తః॥

తా॥ ఈశ్లోకమునకు లీలావతీగణితపరముగను లీలావతీవనితా పరముగను రెండుఅర్థములు.

(1) లీలావతీగణితపక్షము:— చక్కనిజాతి చతుష్టయము (భిన్నప్రకరణములోనిది) గుణనము వర్గము వీటిచే నలంకరింపబడినదియు పరిశుద్ధమగు మిశ్రవ్యవహారము మొదలుగాగల నిఖిలవ్యవహారప్రకరణములు గలదియు సరసమగు ఉదాహరణములుగలదియునగు లీలావతీగణితము ఎవ్వారికి కంఠపాఠముగనుండునో వారలకు ఎల్లపుడును సుఖసంపద వృద్ధినొందును. (గణితక్లేశములేకుండును)

(2) వనితాపక్షము:— చక్కనికులము సుగుణసముదాయము వీటిచే నలంకరింపబడిన శరీరము గలదియు, పరిశుద్ధమగు సర్వవ్యవహారము (నడవడి)గలదియు, సరసవాక్యముల వల్కునదియు, నగు లీలావతీకన్య ఎవ్వారి కంఠాశ్లేషము సేయునో వారలకు ఎల్లపుడు సుఖసంపద వృద్ధినొందును.

అనగా అట్టి వనితాకంఠాశ్లేషమువలె ఈగణితకంఠపఠనము ఆనందజనకమగునని తాత్పర్యము.

ఇది శ్రీమత్పిడప్రర్తివంశదుగ్ధార్ణవ రాకాసుధాకరుండును శ్రీకౌండిన్యస
గోత్రవిఖ్యాతుండును శేషాచల దైవవిద్ద్వితీయసుతుండునునగు
పూర్ణార్య దైవజ్ఞ బుధేంద్రునకు, తృతీయ తనూజుండును
కులక్రమాగత జ్యోతిశ్శాస్త్ర కృతపరిశ్రముండును నైన
శ్రీకృష్ణమూర్తిశాస్త్రినామధేయ సద్బుధవిధేయునిచే
ప్రణీతంబైన శ్రీభాస్కరాచార్యప్రణీత సిద్ధాంత
శిరోమణి పాట్యధ్యాయమగు లీలావతీగణితమునకు
ఆంధ్రవ్యాఖ్యానము సర్వంబును
సంపూర్ణము.

శ్రీ శ్రీ శ్రీ శ్రీ శ్రీ

రచయాంబభూవ పూర్ణార్యస్య సుతః కృష్ణమూర్తిశాస్త్రీమాం।
ఆంధ్ర వ్యాఖ్యాం లీలావత్యాః శ్రీ రఘుపతేః కృపయా॥

భాస్కరాచార్య—నివాసస్థలము.

"ఆసీ త్సహ్యకులాచలాశ్రితపురే త్రైవిద్యవిద్వజ్జనే।
నానాసజ్జనధామ్ని విజ్జడబిడే శాండిల్యగోత్రో ద్విజః॥",

ఇందు ఆచార్యులు తమనివాసము "విజ్జడబిడ"మని చెప్పికొని యున్నారు. దీనినే కొందరు "బిజ్జలబిడ"మని చెప్పుచున్నారు. వ బ వర్ణములకును డ ల వర్ణములకును ప్రాయికముగ సంస్కృతమున నభేదము గా వ్యవహరించుట గలదుగావున నిట్టి పాఠభేదము గలుగవచ్చును.

ఈ ఆచార్యనివాసముం గూర్చి నృసింహదైవజ్ఞు లిట్లు వ్రాసియున్నారు.

"సహ్యకులాచలో మహారాష్ట్రదేశే అస్తి. విదర్భాపరపర్యాయబహ్వాడదేశాదపి నికటఏవ వరీవర్తి. గోదావర్యా అపి నాతిదూరే ప్రదేశే. జడబిడగ్రామే అధునాపి బిడ మితి తన్నగరనామాస్తి. —వాసనావార్తికము.

మునీశ్వరదైవజ్ఞు లిట్లు వ్రాసియున్నారు.

"బిజ్జలబిడం, బిడమితి నామ్నైకదేశే ప్రసిద్ధం.........యస్మా త్పంచ క్రోశాంతరే 'గణేశాయ నమో నీలకమలామలకాంతయే' ఇతి—లీలావ త్యాగం భోక్త గణేశస్య ప్రతిమా ప్రసిద్ధాస్తి. సా తృతీయవర్ణా నామ కృష్ణవర్ణాస్తి"

—మరీచి భాష్యము.

పై వాక్యములందు జడబిడము బిడమైన దని నృసింహదైవజ్ఞులును, బిజ్జలబిడము బిడమైనదని మునీశ్వరులును, వ్రాసియుండిరి. ఆ బిడగ్రామము గోదావరీసమీపమున గణేశప్రతిమ గల గ్రామమునకు 5 క్రోసుల దూరమున నున్నదనియును చెప్పియున్నారు. సహ్యకులాచలమువద్ద నని శ్రీఆచార్యులే చెప్పికొనిరి.

ఆ బిడగ్రామము భాస్కరునికాలమున (క్రీ. శ. 1150 సం॥) జినమతీయుడగు బిజ్జలనృపతియొక్క రాష్ట్రములో చేరినదగుటచే బిజ్జలబిడమని భాస్కరాచార్యులు చెప్పిరని వేంకటేశదైవజ్ఞ కేతకర గారు వ్రాసియున్నారు.

పురాంతరం బిజ్జలరాజ్యమధ్యే తస్మాచ్చ తన్నామవిశేషపూర్వం।
శ్రీభాస్కరార్యైః స్వపురం యథార్థం సంకీర్తితం బిజ్జలబిడనామ్నా॥

కాని యెచటను శ్రీఆచార్యులు బిజ్జలరాజుతో సంబంధము గలయట్లు చెప్పికొనలేదు. కావున కాకతాళీయముగ కాలము సరిపడినను బిజ్జలుని బిడ మనుటకంటె నృసింహదైవజ్ఞ వ్యాఖ్య ననుసరించి జలబిడ గ్రామము బిడగ్రామముగ మారెనని చెప్పుట సమంజసమని తోచుచున్నది. ఈపక్షమునందు విత్, జలబిడే అని పదవిభాగము చేయవలయును. (ప్రస్తావనచూ)

ఈబిడగ్రామము ఉజ్జయినీ యామ్యోత్తర రేఖయందు 19 అక్షాంశములలో నున్నది. ప్రస్తుతము నిజాం రాజ్యమునకు చేరియున్నది. దీనికి సహ్యపర్వతము దగ్గర లేకపోయినను సహ్యకుల పర్వతము సంబంధించియున్నది. ఇది గోదావరీప్రాంతము. ఈ గ్రామమునకు సమీపమున లింబగ్రామమున కృష్ణవర్ణగణేశ ప్రతిమయు గలదట. కావున భాస్కర నృసింహ మునీశ్వరులచే పేర్కొనబడిన గ్రామ మిదియేయని స్పష్టముగ తెలియుచున్నది.

ప్రశ్నోత్తరములు.

పుటలు.

26. (1) 18. (2) 925 (3) 529. (4) 8682.

27. (1) 925. (2) 638. (3) 499. (4) 1088.

44. (1) 45. (2) రు 9-6-0. (3) 8740. (4) 703.

62. (1) ల 121 శే 76 (3) ల 659 శే 827 (5) ల 995 శే 24
(2) ల 7 శే314 (4) ల 100 శే 104 (6) ల3385 శే1159

62 (1) 14 కానులు (3) రూ $85\frac{5}{7}$ లు
(2) గం6 ని48 (4) రూ 0 అ$4\frac{1}{2}$ లు
(5) రూ 0-1-0

112. (1) 1892284800 16 (3) 549902500
(2) 8?459221458436 (4) 64015024881721

... (1) 256 గజములు (3) 911858809
(2) 169 పలకలు (4) 38365636

112. (1) 16 (2) 20 (3) 197 (4) 250

113. (1) 131872229 (3) 525655636402625
(2) 63378025803 (4) 125067512150729

113. (1) 3462కుం 3శేర్లు (2) 1080 రూపాయిలు
(1) 9అం (2) 25గ

120. (1) 8 (2) 1 అపవర్తనముగాఫున దృఢసంఖ్యలు.
(3) 4 (4) 12 (5) 13 (6) 11 (7) 13
(8) 153 (9) 9పర్యాయములు

124. (1) 1980 (2) 5544 (3) 6840
(4) 25280640 (5) 4620 (6) 6552

125. (1) 360 (2) 360 (3) 60గంటలకు మొదటివానికి 3, రెండవ వానికి 4, మూడవవానికి 5, ప్రదక్షిణములు (4) 363

పుటలు.

135. [1] $\frac{5}{15}$, $\frac{3}{15}$ [2] $\frac{65}{75}$, $\frac{69}{75}$ [3] $\frac{315}{1680}$, $\frac{800}{1680}$, $\frac{868}{1680}$
[4] $\frac{147}{252}$, $\frac{140}{252}$, $\frac{144}{252}$ [5] $\frac{84}{28}$, $\frac{140}{28}$, $\frac{116}{28}$, $\frac{784}{28}$
[6] $\frac{24}{36}$, $\frac{18}{36}$, $\frac{27}{36}$

138. [1] $\frac{3}{2}$, [2] $\frac{14}{183}$, [3] $\frac{1}{19}$, [4] $\frac{1}{64}$ [5] $\frac{1}{128}$ = 0-0-1

144. [1] $\frac{28}{45}$ [2] $\frac{25}{6}$ [3] $\frac{1208}{693}$ [4] $\frac{25}{27}$

147. [1] $\frac{248}{315}$ [2] $\frac{3877}{4620}$ [3] $\frac{55}{12}$ [4] $\frac{43}{60}$ [5] $\frac{83}{60}$
[6] $\frac{8}{15}$ [7] $\frac{25}{31\frac{1}{3}}$ [8] $\frac{9}{7}$

150. [1] $\frac{77}{108}$ [2] 3 [3] $\frac{5}{8}$ [4] $\frac{1}{3}$ [5] $\frac{9}{448}$ [6] $\frac{812}{3}$

151. [1] $\frac{7}{30}$ [2] $\frac{2}{1}$ [3] $\frac{604}{99}$ [4] $\frac{4}{1}$ [5] $\frac{5}{2}$ [6] $\frac{6}{5}$

236. [1] $5\frac{1}{3}$ [2] 4 [3] $13\frac{1}{2}$ [4] $7\frac{7}{8}$ [5] 24 [6] 50
[7] 176 [8] 44

237. [1] 3-8-$6\frac{3}{10}$
[2] రూ $6\frac{71}{80}$
[3] 19.522
[4] $518\frac{5}{13}$
[5] 385.7
[6] $62\frac{1}{2}$
[7] మ32 పీ5 తు$106\frac{1}{2}$
[8] 615_3^5
[9] 2003—12—$7\frac{1}{2}$
[10] రమారమి సం9 మా$11\frac{1}{2}$కు

పుటలు.

237. [11] 187-10-8 [12] 4-0-2 [13] 11-12-8$\frac{21}{42}$ [14] 2-5-6 [15] 57374-9-7$\frac{17}{21}$ [16] 378-12-2$\frac{22}{25}$ [17] రూ 53.352 [18] 840-1-5.13 [19] 25960.012 [20] 28 నిమిషములు

247. [1] 150 గజములు [2] 707$\frac{1}{7}$ [3] కు175$\frac{1}{2}$ [4] 1-3-6$\frac{18}{35}$ [5] 11-3-9$\frac{1}{27}$ [6] 15-13-8

256. [1] 18-13-4$\frac{4}{5}$ [2] 6-4-3$\frac{69}{125}$

261. [1] అసలు 71$\frac{1}{35}$, వడ్డీ 6$\frac{24}{35}$ [2] అసలు 323$\frac{371}{4423}$ వడ్డీ 73$\frac{3852}{4423}$

267. [2] 42$\frac{3}{100}$ [3] 8.019375 = (57.28125 × .14)

328. [1] 22$\frac{1}{3}$ [2] 50$\frac{1}{2}$

344. [1] 500 లిం [2] 600 [3] 1200 [4] 1000 [5] 565.7 [6] 80000 [7] 12.89 [8] .956305 కోటి [9] .292372భుజ

450. [1] ఎ5 సెం72 లిం365 [2] ఎ8 సెం32 లిం306
[3] 159$\frac{1}{11}$ చతురం 19886$\frac{4}{11}$
[4] 628$\frac{4}{7}$ చతురం 34285$\frac{5}{7}$
[5] వ్యా7954$\frac{6}{11}$, పృష్ఠఫలం198863636$\frac{4}{11}$, గోలఘనఫలం2636449724451$\frac{287}{363}$
[6] 15$\frac{21}{46}$ రమారమి [7] 1$\frac{31}{44}$
[8] ప్రథమవంశ90, ద్వితీయవంశ160, ప్రథమలంబ$\frac{378}{5}$, ద్వితీయలంబ$\frac{448}{5}$ సూచీలంబ$\frac{12096}{5}$, కర్ణయోగమునుండిలంబ$\frac{288}{5}$, ప్రథమలంబఖండ$\frac{128}{5}$,, ప్రథమకర్ణఖండ$\frac{160}{5}$, ద్వితీయలంబఖండ$\frac{198}{5}$, ద్వితీయకర్ణఖండ66, ఫలం$\frac{35337}{5}$

తప్పొప్పుల పట్టిక.

పుట.	పంక్తి.	తప్పు.	సవరణ.
ii	18 {పారిభాషిక పదములలో}	Root of a rational number	Integral part of the root of a non squared number.
27	6	4564	4574
31	5	ఉసంఖ్యయొక్క	ఆసంఖ్యయొక్క
38	6	∴ 5 =	∵ 5 =
39	22	9016	8716
39	23	10340832	10040832
40	3	5368 × 10	5368 × 40
41	9	(71 × 10)	(81 × 10)
62	19	ఘనవర్గమనియుపేరు	వర్గఘనమనియుపేరు
80	8	౧౦౦౧౦౦-౨౫	౧౦౦౧౦౦౦౨౫
112	21	రూ 38969 లు	రూ 38809 లు
120	6	4934,43677	4935,43675
127	6	ఇట్లుగనే $\frac{1}{8}$	ఇట్లుగనే $\frac{61}{8}$
140	20	$\frac{3}{5}$($\frac{3}{5}$లో $\frac{4}{7}$)	$\frac{3}{5}$ − ($\frac{3}{5}$లో $\frac{4}{7}$)
141	1	$\frac{3}{5}+(\frac{3\times5}{5\times7})$	$\frac{3}{5}+(\frac{3\times4}{5\times7})$
151	19	$\frac{6}{7}\div$	$\frac{6}{7}\div\frac{3}{7}$
155	12	1003	100,
156	4	2236	2236ను
166	10	$\frac{\frac{1}{\sqrt{8}+5}}{1}$	$\frac{\frac{1}{\sqrt{28}+5}}{1}$

పుట.	పంక్తి.	తప్పు.	సవరణ.
175	2	34556	34356
176	8	$155.5 \div 2.5$	$156.25 \div 2.5$
182	17	నని	నవి
187	15	హారః ౧	హారః ౦
188	4	నున్న చేగుణక	నున్న యేగుణక
,,	,,	నున్న గుణింప	నున్న చేగుణింప
193	20	$\frac{5}{1} \times \frac{2}{3}$	$\frac{15}{1} \times \frac{2}{3}$
194	9	అష్టాంకము	ఇష్టాంకము
296	19	స్మైపాచ్ఛేపాతపాస్య	స్నైపాచ్ఛేపాదపాస్య
198	11	దోలాయమాన్యో	దోలాయమానో
	12	మాతతీ	మాలతీ
200	9	$\times 20 \times 300$	$6 \times 20 \times 300$
204	3	-63	$=63$
207	4	$14^2 - 45 \times 4$	$14^2 - (45 \times 4)$
,,	28	త్రిభుక్తం	త్రిభక్తం
208	2	అవ	యక
,,	2	అక	యాక
,,	12	$(\text{య}_3 - \text{క}^3)$	$(\text{య}^3 - \text{క}^3)$
,,	18	$2^3 \div 3 \times 2$	$2^3 \div (3 \times 2)$
,,	19	$384 \div 6 \quad 64$	$384 \div 6 = 64$
209	6	$= 64$	$=64-$
213	5	$\frac{768}{64}$	$\frac{784}{64}$
,,	,,	$\frac{3964}{64}$	$\frac{3969}{64}$
,,	6	$\frac{768}{64}$	$\frac{784}{64}$

పుట.	పంక్తి.	తప్పు.	సవరణ.
213	17	$(\frac{1}{2}\text{క}^2 + 1)$	$(\frac{1}{2}\text{క}^2 + \text{క})^2$
216	8	$\sqrt{\text{య} \pm \text{క}^2 + 2\text{య}}$	$\sqrt{\text{య}^2 \pm \text{క}^2 2\text{య}}$
,,	,,	$\sqrt{\text{య} \pm 2\text{యర} + \text{ర}^2}$	$\sqrt{\text{య}^2 \pm 2\text{యర} + \text{ర}^2}$
	9	$=\text{ర} \times \text{ర} = \text{ర}^3$	$=\text{ర}^2 \times \text{ర} = \text{ర}^3$
	12	8ఇ^2	$8\ \text{ఇ}^3$
	23	గు,య	$\text{గు} \times \text{య}$
219	5	$\frac{\text{య}^2}{\text{హా}} =$	$= \frac{\text{య}^2}{\text{హా}}$
227	3	$\frac{15}{5} = 5$	$\frac{15}{3} = 5$
233	5	$\frac{\frac{9}{8} \times \frac{53}{8}}{2}$	$\frac{\frac{9}{8} \times \frac{35}{8}}{2}$
235	15	16 : 32 : : 20 : ఇఫ	16 కు 32 ,, 20కి ఇఫ
,,	17	2 : 4 : : 6 : ఇఫ	2 కు 4 ,, 6 కు ఇఫ
251	26	100	300
253	12	ప్రిమాణఫలము	ప్రిమాణఫలసజాతీయము
255	17	$\frac{0}{1}$	$\frac{30}{1}$
259	14	$\frac{(\text{ప్రికా} \times \text{ప్రిధ}) \times \text{మిధ}}{(\text{ప్రకా} \times \text{ప్రధ}) \times (\text{మికా} \times \text{ప్రఫ})}$	$\frac{(\text{ప్రికా} \times \text{ప్రిధ})\text{మిధ}}{(\text{ప్రకా} \times \text{ప్రధ}) + (\text{మికా} \times \text{ప్రఫ})}$
,,	15	$\frac{(\text{ప్రఫ} \times \text{మికా})\text{మిధ}}{(\text{ప్రకా} \times \text{ప్రిధ}) \times (\text{మికా} \times \text{ప్రఫ})}$	$\frac{(\text{ప్రిఫ} \times \text{మికా})\ \text{మిధ}}{(\text{ప్రకా} \times \text{ప్రధ}) + (\text{మికా} \times \text{ప్రఫ})}$
260	15	$\frac{\text{మిధ} \times \text{ప్రిధ} \times \text{ప్రికా}}{(\text{ప్రఫ} \times \text{మికా}) + (\text{ప్రధ} \times \text{ప్రకా})}$	$\frac{\text{మిధ} \times \text{ప్రిఫ} \times \text{మికా}}{(\text{ప్రఫ} \times \text{మికా}) + (\text{ప్రధ} \times \text{ప్రకా})}$
262	7	౨౪	౯౪
264	11	రూ 100 లు బదులు	రూ 100 లును నె 1టికి రూ 100 లకు రూ2లు వడ్డీచొ రూ 200 లును బదులు
269	24	ను. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$,	ను, పూరణకాలములు $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$,

పుట.	పంక్తి.	తప్పు.	సవరణ.
276	18	196 = 233	96 = 233
,,	19	196 = 233	96 = 233
281	13	$10 \times {}^{8} + {}^{8}11 \times 2$	$10 \times {}^{8} + {}^{11} \times 2$
283	3	$\frac{౧౦}{౧}$	$\frac{౧౦}{3}$
284	10	19వ నె	10వ నె
304	7	సం $\frac{3^2}{3}$	సం $= \frac{3^2}{3}$
,,	8	$\frac{4^2}{2} + \frac{4}{2} = 10 \ldots$	$\frac{4^2}{2} + \frac{4}{2} = 10$,,
306	15	2, 3, 2, 0	3, 2, 0
312	22	$(ప — 1)^6 \quad 4$	$(ప - 1)^5 + 4$
,,	,,	$(—1)^{చ} \quad ఆ$	$(ప — 1)^{చ} + ఆ$
332	12	సమానమగు	సమాగమమగు
369	5	నఖ	తిధి
,,	8	భుజ20	భుజ15
411	22	గుణింపుము	గుణింపుము రెండిటినికలుపుము
433	8	అరచాపమునకు అత	అతచాపమునకు అర
450	18	450	650
487	7	అంత్యాంక	ఉపాంతిమాంక
488	22	25చే	35చే
505	17	$\frac{31 \quad 48 + 3}{71}$	$\frac{31 \times 48 + 3}{71}$

శేషించిన తప్పొప్పులు.

పంక్తుల సవరణలు

పు పం

17 10 పంక్తి తరువాత (15) ౦ ఇది అనంత మనుటకు సంజ్ఞ.
(16) ౦ ఇది అంతరసంజ్ఞ. దీనికి కుడి ఎడమ వైపులగల సంఖ్యలలో నేది పెద్దదియో దాని వలన చిన్నసంఖ్యను వ్యవకలించి యంతరమును గనుగొనవలెను

43 9 పంక్తి తరువాత అథవాగుణకస్త్రిభి ర్భక్తో ౪ లబ్ధం ఏభిస్త్రిభిశ్చగుణ్యే గుణితేజాతం తదేవ ౧౬౨౦.

43 19 లో "స్థానవిభాగగుణనము" తరువాత "గుణ్యగుణక విభాగగుణనము" అనియు వుండవలెను.

244 9 లో ప్రమాణకాలసంబంధి ఫలము ప్రమాణకాలమునం దగుచో ఇచ్ఛాధనమునకు ఇచ్ఛాకాల సంబంధిఫలము ఎంతకాలమునకగును?

374 11 లో తరము 7 చే గుణించి భూమి 9 చే భాగింప $108 \div 9 = 21$ లబ్ధ.

క్షేత్ర చిత్రములలో (బ్లాకులలో) సవరణలు.

378 పుట. వృత్తాన్తర్గత చతుర్భుజమునందు ఘాతరేఖయందు 'చ' ఉండవలెను

405 పుట త్రిభుజక్షేత్రమునందు లోపల $38\frac{622}{625}$ వుండవలెను.

417 పుట సూచీక్షేత్రమునందు అంతర్గతచతుర్భుజముయొక్క 125 పరిమితిగల రేఖకు ఎడమవైపున 'జ' కుడివైపున 'త' ఉండవలెను.

పు	పం	తప్పు	సవరణ	పు	పం	తప్పు	సవరణ
1	8	ధ్యాయేత	ధ్యాయేత్త	62	13	4=16	$4^2=16$
35	7	1260	1620		15	4=64	$4^3=64$
41	9	(68 × 100) (71 × 10)	(67 × 100) (81 × 10)		17	4 ఇది	4^4=ఇది
42	14	లక్ష్యగ	లక్ష్యముగ	63	21	ఘాతక	ఘాత
55	15	౧౯-౨౦	౧౬-౨౦	70	2	సంఖ్యకువర్గము	సంఖ్య
62	12	4 ఇది	4^1 ఇది	71	21	1159	1169
				83	6	నెడమవైపున	కుడివైపున

పు	పం	తప్పు	సవరణ
85	2	(19)	(9)
92	6	ఆద్యాంకవా	ఆద్యాంకతో నా
92	6	కార్యతో:	కార్య:
94	22	625 × 12=	625 × 12 × 3=
116	25	57 ప్రి 3 సి	53 ప్ర 3 సి
130	21	నముచ్ఛేదీ	సమచ్ఛేదీ
138	11	ధనవర్ణ	ధనర్ణ
169	3	.7=70	.7= 70
170	2	4 4 అగు	4.4 అగు
	4	2 దిం	$\frac{2}{5}$ దిం
	12	064 అగు	.064 అగు
172	9	457 339	457.339
	11	545 97	545.97
	20	970 అట్లు 8	.970 అట్లు .8
	21	339	.339
	22	97	.97
	23	8	.8
	24	987	987
173	14	9876	.9876
	15	$\frac{32.0300}{.9876}$	32.0300 .9876
195	6	యన్నిష్ట	యన్నిష్ప
198	13	శృంగోవి	భృంగోలి
	15	ద్రష్టన్యమ్	ద్రష్టవ్యమ్
199	8	ద్వష్టకర్ణ	ద్విష్టకర్ణ
200	4	ఆస్థి	ఆస్తి
	9	ధనము ×	ధనము 6 ×
219	13	$(\frac{గు}{2})^2$	$(\frac{గు}{2})^{\frac{1}{2}}$
,,	,,	$(\frac{గు}{2})^2$	$(\frac{గు}{2})^{\frac{1}{2}}$
223	16	మూలతీంమాల	మూలంమాలతీం

పు	పం	తప్పు	సవరణ
225	22	$\frac{0 \times 2 \times 05}{15 \times 3}$	$\frac{100 \times 2 \times 5}{15 \times 3}$
262	9	96 రూ	94 రూ
268	14	$\frac{1}{3}$, 1	$\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$,
	16	$\frac{3}{1}$,	$\frac{3}{1}$, $\frac{6}{1}$,
273	16	షోడశాంశ	షోడశాష్ట
281	19	సర్ణైక్య	స్వర్ణైక్య
284	25	(అ యోవ)	(అ - యోవ)
301	11	165=సం	165=సం.యో
	12	యోఇది	ఇది
306	18	$\frac{2ప(ప^2+ప)\ (ప^2+ప)}{6}$	$\frac{2ప(ప^2+ప)+(ప^2+ప)}{6}$
313	3	$\frac{ప \times అ2}{2}$	$\frac{ప \times అ2}{2}$
330	10	$(4^2 - 3)$	$(4^2 - 4)$
	22	వరసలు గో	వరసలు 5 గో
333	12	కాపునసే	కాపునసే
360	17	తాఉ + త్గాస	తాఉ + తాస
	18	$తాఉ^2$ + తాస	$తాఉ^2$ + తాస
389	18	$\frac{31}{2} \times \frac{32}{2}$	$\frac{33}{2} \times \frac{12}{1}$
424	17	హారముకలన	హారమువలన
432	20	ట — ట్ర	ట — [illegible]
539	6	$\frac{3877}{4620}$	$\frac{4513}{4620}$
544	9	3, 2, 0	1, 3, 2, 0